8. Anhang: Das allgemeine Cauchy-Problem und der Satz von Cauchy und Kowalewskaja

8.1. Die Situation. Gesucht ist eine Lösung u der allgemeinen partiellen Differentialgleichung der Ordnung k:

$$\tilde{F}(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}) = 0, \tag{1}$$

wobei $\tilde{F}$ hinreichend glatt ist (mindestens $\mathcal{C}^1$). Ferner gelte auf der Hyperfläche S (mindestens von der Klasse $\mathcal{C}^k$)

$$u|_S = u_0, \partial_\nu u|_S = u_1, \ldots, \partial_\nu^{k-1} u|_S = u_{k-1} \tag{2}$$

(sog. Cauchy-Daten von u auf S). Dabei ist ∂_ν die Normalableitung an S, die in einer Umgebung von S definiert ist. Als allgemeines Cauchy-Problem bezeichnet die Aufgabe (1) mit (2). Wir wollen annehmen, dass $u_j \in \mathcal{C}^{k-j}$.

Standardform. Lokal kann man Koordinaten so einführen, dass S als Teilmenge von $\{x_n = 0\}$ gegeben ist. Man schreibt dann t statt x_n, d.h., wir haben Koordinaten (x,t) mit $x \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}$.

Das Cauchy-Problem hat dann die Form

$$\begin{aligned} F(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\le k}) &= 0; && (3)\\ \partial_t^j u(x,0) &= \varphi_j, \qquad j = 0,\ldots,k-1. && (4) \end{aligned}$$

Dabei ist F die Transformierte von $\tilde{F}$ und φ_j die von u_j. Wir bezeichnen de Variablen von F mit $(x, t, y_{\alpha,j} : |\alpha| + j \le k)$. Alle Differenzierbarkeitseigenschaften bleiben erhalten.

Wir möchten nun zeigen, dass bei guter Aufgabenstellung alle Ableitungen der Ordnung $\le k$ von u auf S bekannt sind. Klar ist, dass

$$\partial_x^\alpha \partial^j u(x,0) = \partial_x^\alpha \varphi_j(x), \qquad |\alpha| + j \le k, j \le k-1.$$

Es fehlt nur $\partial_t^k u$. Um es zu bestimmen, nehmen wir an, dass die Gleichung (3) nahe S nach $\partial_t^k u$ auflösbar ist. Zusätzlich fordern wir (Satz von der impliziten Funktion!)

$$\frac{\partial F}{\partial y_{0k}}(x, 0, (y_{\alpha,j})_{|\alpha|+j\le k}) \neq 0 \quad \text{für alle } x;$$

damit ist die Lösung $\mathcal{C}^1$. (Im Falle einer quasilinearen Gleichung erster Ordnung war das unsere Bedingung, dass das Vektorfeld a nicht tangential an S ist.) Wir sagen wiederum, dass S nicht-charakteristisch ist.

So können wir die Differentialgleichung nahe bei S in die "Normalform"

$$\partial_t^k u(x,t) = G(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\le k, j<k}) \tag{5}$$

bringen; dabei ist $G \in \mathcal{C}^1$, weil $F \in \mathcal{C}^1$ war. Wir betrachten im Folgenden (5) mit den Cauchy-Daten

$$\partial_t^j u(x,0) = \varphi_j, \qquad j = 0,\ldots,k-1. \tag{6}$$

Unter diesen Annahmen erhalten wir unmittelbar den ersten Teil von

8.2. Lemma. *Auf S sind alle Ableitungen von u bis zur Ordnung k bestimmt. Sind G und die φ_j hinreichend glatt, so können wir auch höhere Ableitungen berechnen.*

Beweis. Ist G differenzierbar, so folgt durch Ableiten von (5):

$$\partial_t^{k+1} u = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j\le k, j<k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha_j}} \partial_x^\alpha \partial_t^{j+1} u.$$

Iteration liefert bei hinreichender Glattheit alle Ableitungen. ◁

8.3. Erinnerung. Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to E$, E ein Banachraum, heißt *analytisch* bei $x_0 \in \Omega$, falls es einen Würfel $\Omega_\varepsilon = \{x : |x_j - x_{0j}| < \varepsilon\}$ gibt, auf dem die Taylorreihe f darstellt.

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Die Konvergenz ist auf kompakten Teilmengen von Ω_ε absolut und gleichmäßig, die Reihe kann wiederum differenziert werden.

8.4. Folgerung. *Sind $G, \varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ analytisch, so hat das Cauchy-Problem 8.1(5),(6) höchstens eine analytische Lösung, denn diese ist durch ihre Taylorkoeffizienten auf S bereits bestimmt.*

Für die Eindeutigkeit der Ableitungen auf S ist die Glattheit von G sogar unerheblich, wie der folgende Satz zeigt.

8.5. Satz. *G sei stetig und Lipschitzstetig in den $y_{\alpha,j}$, d.h., für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n$ und $(u_{\alpha,j}), (v_{\alpha,j})$, $0 \le |\alpha| + j \le k, j < k$ sei*

$$|G(x, t, (u_{\alpha,j})) - G(x, t, (v_{\alpha,j}))| \le \sum_{\alpha,j} |u_{\alpha,j} - v_{\alpha,j}|.$$

Sind u, v zwei Lösungen von 8.1(5) *mit gleichen Cauchydaten auf S, und existieren die Ableitungen $\partial_x^\alpha \partial_t^j u, \partial_x^\alpha \partial_t^j v$ für $|\alpha| \le q$ und $j \le r$ für beliebige q, r mit $q + r \ge k$, so stimmen diese Ableitungen auf S überein.*

Beweis. Setze $w = v - u$. Wir brauchen lediglich zu zeigen, dass

$$\partial_t^m w = 0 \text{ auf } S \quad \text{für } m \le r, \tag{1}$$

denn dann folgt die Aussage über die x-Ableitungen sofort. Zum Beweis von (1) benutzen wir Induktion nach m.

Für $m < k$ ist nichts zu zeigen (Cauchy-Daten). Es sei also $m \ge k$ und $\partial_t^j w = 0$ auf S für $j < m$. Der Satz von Taylor, angewendet auf $\partial_t^k w$ ergibt

$$\partial_t^k w(x, t) = \frac{t^{m-k}}{(m-k)!}\partial_t^m w(x, 0) + o(t^{m-k}), \quad t \to 0; \tag{2}$$

angewendet auf $\partial_x^\alpha \partial_t^j w$ für $j < k$, $|\alpha| + j \le k$

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j w(x, t) = \frac{t^{m-j}}{(m-j)!}\partial_x^\alpha \partial_t^m w(x, 0) + o(t^{m-j}) = o(t^{m-k}), \text{ da } m \ge k > j.$$

Nach Annahme an G folgt

$$\begin{aligned} |\partial_t^k w(x,t)| &= |G(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x, t)) - G(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j v(x, t))| \\ &\le c \sum_{\alpha,j} |\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x, t) - \partial_x^\alpha \partial_t^j v(x, t))| \\ &= c \sum_{\alpha,j} |\partial_x^\alpha \partial_t^j w(x, t))| \\ &= o(t^{m-k}) \end{aligned}$$

Mit (2) folgt also $\frac{t^{m-k}}{(m-k)!}\partial_t^m w(x, 0) = o(t^{m-k})$. Dies erzwingt $\partial_t^m w(x, 0) = 0$. ◁

8.6. Cauchy-Problem mit analytischen Daten. Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$F(x, (\partial_x^\alpha)_{|\alpha|\leq k} u) = 0, \qquad \partial_\nu^j u = \varphi_j, 0 \leq j < k \text{ auf } S$$

dabei seien die φ_j und die Hyperfläche S analytisch, F sei analytisch in einer Umgebung von S, die Funktion F sei nach $\partial_\nu^k u$ auflösbar mit $\partial_{\partial_\nu^k u} F|_S \neq 0$. Dann gilt:

8.7. Satz. Cauchy-Kowalewskaja. *Das Cauchy-Problem hat in einer Umgebung von S eine eindeutige Lösung.*

Der Beweis findet sich am Ende dieses Kapitels.

8.8. Bemerkung. Die Lösung weist i. Allg. eine schlechte Stabilität auf. In $\mathbb{R}^2$ betrachte

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_y^2) u &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ \partial_y u(x,0) &= k e^{-\sqrt{k}} \sin kx, \end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ fest. Das Problem ist nicht-charakteristisch, da $\partial F / \partial u_{yy} = 1$. Die analytische Lösung nahe $\{y = 0\}$ ist

$$u(x,y) = e^{-\sqrt{k}} (\sin kx)(\sinh ky)$$

Für $k \to \infty$ konvergieren die Cauchy-Daten sowie alle ihre Ableitungen gegen Null. Dies gilt jedoch nicht für die Lösung, da

$$e^{-\sqrt{k}} |\sinh ky| \to \infty \qquad \text{für } k \to \infty \text{ und } y \neq 0.$$

Es bleibt die Frage, ob eine analytische Gleichung nichtanalytische Lösungen haben kann. Der folgende Satz von Holmgren zeigt, dass dies im linearen Fall nicht geschehen kann. Er ist für den Fall von Gleichungen erster Ordnung formuliert, da wir jede Gleichung, auf die der Satz von Cauchy und Kowalewskaja anwendbar ist, ein solches System reduzieren können, s. den Beweis am Ende dieses Kapitels.

8.9. Satz. *(Eindeutigkeitssatz von Holmgren) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $T > 0$. Ist $u \subset \mathcal{C}^1(\Omega \times (-T,T))$ Lösung der Differentialgleichung*

$$\partial_t u(x,t) = \sum_{j=1}^{n-1} A_j(x,t) \partial_{x_j} u + A_0(x,t) u \qquad \leftarrow \textit{linear!}$$

wobei die A_j analytisch auf $\Omega \times (-T,T)$ sind, und ist $u(x,0) = 0$ für alle $x \in \Omega$, so existiert eine Umgebung V von $\Omega \times \{0\}$ in $\Omega \times (-T,T)$ mit $u|_V \equiv 0$.

(ohne Beweis)

Die Analytizität im Satz von Cauchy-Kowalewskaja ist notwendig, wie das folgende Beispiel von Hans Lewy (1957) zeigt. Auf $\mathbb{R}^3$ betrachte den Operator

$$L = \partial_x + i\partial_y - 2i(x + iy)\partial_t$$

Dann hat die Gleichung $Lu = f$ nicht für jedes f eine Lösung. Es gilt nämlich

8.10. Satz. *Es sei f eine stetige, reellwertige Funktion, die nur von t abhängt. L sei wie oben. Dann hat die Gleichung $Lu = f$ nur dann eine $\mathcal{C}^1$-Lösung u nahe $(0,0,0)$, wenn die Funktion f bei $t = 0$ analytisch ist.*

Beweis. Es sei $Lu = f$ in $\{x^2 + y^2 < \varepsilon^2, |t| < \varepsilon\}$ für ein $\varepsilon > 0$. Wir identifizieren (x, y) mit $z = x + iy$ und schreiben $z = re^{i\theta}$. Wir setzen $s = r^2$ und betrachten die Abbildung

$$V : \{|t| < 1\} \times \{r < \varepsilon\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$V(t, r) = \int_{|z|=r} u(x, y, t)\, dz = i \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta, t) re^{i\theta}\, d\theta.$$

Nach dem Satz von Gauß/Green gilt nun

$$V(t, r) = i \iint_{|z|<r} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy : \tag{1}$$

Dazu: Schreibe $u = R + iI$. Realteil von V/i in (1) ist

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (R\cos\theta - I\sin\theta) r\, d\theta \\ = & \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} R \\ -I \end{pmatrix}, \nu\rangle\, dS \quad \nu \text{ äußere Normale, } dS = rd\theta \\ \overset{\text{Gauß}}{=} & \iint (\partial_x R - \partial_y I)\, dxdy. \end{aligned}$$

Imaginärteil von V/i in (1):

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (R\sin\theta + I\cos\theta) r\, d\theta \\ = & \; r \int \langle \begin{pmatrix} I \\ R \end{pmatrix}, \nu\rangle\, dS \\ = & \iint (\partial_x I + \partial_y R)\, dxdy. \end{aligned}$$

Vergleich liefert $\partial_x u + i\partial_y u = \partial_x R + i\partial_x I + i\partial_y R - \partial_y I$.

In Polarkoordinaten ist

$$\begin{aligned} V(t, r) &= i \int_0^r \int_0^{2\pi} (\partial_x u + i\partial_y u)(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)\, \rho\, d\rho d\theta \\ \text{und somit } \partial_r V(r, t) &= i \int_0^{2\pi} (\partial_x u + i\partial_y u)(r\cos\theta, r\sin\theta, t)\, r d\theta \\ &= \int_{|z|=r} (\partial_x u + i\partial_y u)(x, y, t)\, r\frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Es folgt mit $r(s) = \sqrt{s}$:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t, r(s)) = \frac{\partial V}{\partial r}(t, r(s))\frac{\partial r}{\partial s}(s) = \frac{\partial V}{\partial r}(t, r(s))\frac{1}{2r(s)} = \int_{|z|=r(s)} (\partial_x u + i\partial_y u)\frac{dz}{2z}$$

Gilt $Lu = f$, so folgt $\partial_x u + i\partial_y u = 2iz\partial_t u + f$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= i \int_{|z|=r} \partial_t u\, dz + \int_{|z|=r} f(t)\frac{dz}{2z} \\ &= i\frac{\partial V}{\partial t} + i\pi f(t). \end{aligned}$$

Setzen wir also $F(t) = \int_0^t f(\theta)\, d\theta$ und $U(t,s) = V(t,s) + \pi F(t)$, so folgt

$$\frac{\partial U}{\partial t} + i\frac{\partial U}{\partial s} = 0.$$

Damit erfüllt U die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung in dem Gebiet

$$\{t + is : 0 < s < \varepsilon^2, |t| < \varepsilon\}$$

ist dort also holomorph. Ferner ist U stetig bis an $s = 0$ heran; es gilt

$$U(t,0) = 0 + \pi F(t) \in \mathbb{R} \qquad \text{da } f \text{ reellwertig.}$$

Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip können wir U fortsetzen auf

$$\{t + is : |s| < \varepsilon^2, |t| < \varepsilon\}.$$

Insbesondere ist $\pi F(t) = U(t,0)$ analytisch in t. Somit ist auch $f = F'$ analytisch. $\lhd$

8.11. Bemerkung. Der Satz hat folgende Erweiterungen:

(a) Ist $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ beliebig, so hat die Gleichung

$$Lu = f(t + 2y_0 x - 2x_0 y)$$

nur dann eine $\mathcal{C}^1$-Lösung nahe (x_0, y_0, t_0), falls f analytisch nahe $t = t_0$ ist.

(b) Es gibt $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen g auf $\mathbb{R}^3$ derart, dass die Gleichung $Lu = g$ keine $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-Lösung ($\alpha > 0$) in der Umgebung auch nur irgendeines Punktes in $\mathbb{R}^3$ hat.

Dazu wählt man eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion f auf $\mathbb{R}$, die nirgends analytisch ist. Dann wählt man eine in $\mathbb{R}^3$ dichte Folge $((x_j, y_j, t_j))_{j=1}^\infty$.

Nun findet man positive c_j derart, dass die Reihe

$$g_a = \sum a_j c_j f(t + 2y_j x - 2x_j y)$$

für jede Folge $a = (a_j) \in l^\infty$ eine C^∞-Funktion definiert.

Man kann dann zeigen, dass die Menge A aller a, für die die Gleichung $Lu = g_a$ eine $C^{1+\alpha}$-Lösung hat, abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen in l^∞ ist. Für die weiteren a hat also $Lu = g_a$ *keine* $C^{1+\alpha}$-Lösungen.

Beweis des Satzes von Cauchy-Kowalewskaja.

8.12. Reduktion. Wir können lokal die Transformation auf die Normalform 8.1(5)/ (5) durchführen und erhalten das äquivalente Problem

$$\partial_t^k u(x,t) = G(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\le k, j<k}) \tag{1}$$

$$\partial_t^j(x,0) = \varphi_j(x) \qquad 0 \le j < k \tag{2}$$

mit analytischen G, φ_j.

Wegen des Identititätssatzes für analytische Funktionen genügt es zu zeigen, dass man zu jedem Punkt aus S eine Umgebung finden kann, auf der eine Lösung existiert. Diese Lösungen kann man dann zu einer einzigen analytischen Funktion zusammensetzen. Mit der obigen Transformation genügt es also zu zeigen, dass (1)/(2) in einer Umgebung des Ursprungs eine Lösung hat.

8.13. Bemerkung. G, φ_j, u können hier komplexwertig, auch $\mathbb{C}^N$-wertig sein.

Die beiden folgenden Sätze benötigen wir nicht unmittelbar, sie liefern jedoch ein gutes Verständnis für reell-analytische Funktionen:

8.14. Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist äquivalent*

(a) *f ist reell-analytisch auf Ω*

(b) *für jedes $x_0 \in \Omega$ ex. eine Umgebung U_{x_0} und M, r so, dass*

$$|f^{(\alpha)}(x)| \leq M\,|\alpha|!\,r^{-|\alpha|} \qquad \text{für } x \in U_{x_0}$$

(bei $\mathbb{C}^N$-wertigen Funktionen muss (b) für jede Komponente gelten.)

Wichtig ist, dass M nicht von α abhängt.

8.15. Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist f genau dann reell-analytisch, wenn es eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}^n$ von Ω gibt, und eine Funktion $F \in \mathcal{H}(V)$ mit $F|_\Omega = f$.*

8.16. Lemma. *Die Komposition analytischer Funktionen ist analytisch, die Potenzreihendarstellung ergibt sich durch Einsetzen. Genauer:*

$$\text{Ist } f(x) = \sum a_\alpha (x - x_n)^\alpha \qquad\qquad x \in \Omega$$
$$\text{und } x = \sum b_p (\xi - \xi_0)'' \qquad\qquad b_p \in \mathbb{R}, \xi \in \Omega_0$$

so ist $F = f \circ x$ analytisch, die Potenzreihe ergibt sich

$$F(\xi) = \sum c_\gamma (\xi - \xi_0)^\gamma$$

wobei $c_\gamma = P_\gamma((a_\alpha)_\alpha), (b_\beta)_\beta)$ und P_γ ein universelles Polynom ist.

- *P_γ hängt nur von denjenigen a_α, b_β ab, für die $\alpha_j, \beta_j \leq \gamma_j$*
- *P_γ hat nichtnegative Koeffizienten, da es sich durch Addition und Multiplikation ergibt.*

Beweis. Klar. $\triangleleft$

8.17. Beispiel. Es sei $R > 0$. Dann ist die Funktion

$$f(x) = \frac{R}{R - (x_1 + \ldots + x_n)}$$

reell analytisch in dem Würfel $\{x : \max |x_j| < R/n\}$:

Die Formel für die geometrische Reihe zeigt

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{\sum x_i}{R}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^k}{R^k} = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{|\alpha|!}{\alpha! R^{|\alpha|}} x^\alpha$$

Die letzte Identität benutzt den Multinomialsatz

$$(y_1 + \ldots + y_n)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} y^\alpha$$

für $y = x/R$. Die Summe konvergiert, falls $\max\{|x_j|\} < \frac{R}{n}$ ist.

8.18. Definition. Eine Potenzreihe $\sum a_\alpha (x - x_0)^\alpha$ majorisiert eine andere Potenzreihe $\sum b_\alpha (x - x_0)^\alpha$, falls $a_\alpha \geq |b_\alpha|$. Klar: In diesem Fall erzwingt die absolute Konvergenz von $\sum a_\alpha (x - x_0)^\alpha$ diejenige von $\sum b_\alpha (x - x_0)^\alpha$.

8.19. Beispiel. Es sei $\sum a_\alpha x^\alpha$ konvergent in dem Würfel $\{x : \max |x_j| < R\}$. Dann existiert eine geometrische Reihe wie in Beispiel 8.17, die $\sum a_\alpha x^\alpha$ majorisiert: Setzt man $x = (r, \ldots, r)$ so folgt aus der Konvergenz der Summe $\sum a_\alpha x^\alpha$ im Würfel, dass für jedes $0 < r < R$

$$\sum a_\alpha r^{|\alpha|} \quad \text{konvergiert.}$$

Daher ist $|a_\alpha r^{|\alpha|}| \leq M$ für ein $M > 0$ und somit

$$|a_\alpha| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \leq \frac{M |\alpha|!}{\alpha! r^{|\alpha|}}$$

8.20. Satz. Übergang zu einem System 1. Ordnung. *Das Cauchyproblem aus 8.6 ist äquivalent zu einem quasilinearen System erster Ordnung von der Form*

$$\partial_t Y = \sum_1^n A(x,t,Y)\partial_{x_j} Y + B(x,t,Y)$$
$$Y(x,0) = \Phi(x)$$

in dem Sinne, dass die analytische Lösung des einen aus einer analytischen Lösung des anderen bestimmt werden kann (Eindeutigkeit gilt nach 8.5). Dabei sind Y, B, Φ vektorwertige Funktionen, die A_j sind matrixwertig, und A_j, B und Y sind durch die Funktionen in 8.6 explizit bestimmt.

Beweis. Der Vektor Y soll die Komponente $y_{\alpha,j}$ mit $|\alpha| + j \le k$ haben. Im Folgenden schreiben wir $y_{\alpha,j}$ für die Variable im Argument von G, die $\partial_x^\alpha \partial_t^j u$ darstellt. Ist α ein Multi-Index $\alpha \neq 0$, so sei $i(\alpha)$ die kleinste natürliche Zahl mit $\alpha_i \neq 0$). Wir schreiben $e_j = (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)$.

Das gesuchte System lautet dann

(a) $\quad \partial_t y_{\alpha,j} = y_{\alpha,j+1} \qquad |\alpha| + j < k$

(b) $\quad \partial_t y_{\alpha,j} = \partial_{x_{i(\alpha)}}, y_{\alpha - e_{i(\alpha)}, j+1} \qquad |\alpha| + j = k, j < k$

(c) $$\partial_t y_{0,k} = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{|\alpha|+j<k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} y_{\alpha,j+1} + \sum_{\substack{|\alpha|+j=k \\ j<k}} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}} \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}, j+1}$$

mit Anfangsbedingung

(d) $\quad y_{\alpha,j}(x,0) = \partial_x^\alpha \varphi_j(x) \qquad |\alpha| + j \le k, j < k$

(e) $\quad y_{0,k}(x,0) = G(x, 0, (\partial_x^\alpha \varphi_j(x))_{\substack{|\alpha|+j\le k \\ j<k}})$

1. Schritt Es sei u Lösung von 8.6. Setze $y_{\alpha_j} = \partial_x^\alpha \partial_t^j u$. Dann erfüllen die y_{α_j} die Gleichungen (a),(b),(c) mit Anfangsbedingungen (d), (e).

2. Schritt Umgekehrt sollen nun (a) - (c) mit Cauchy-Daten (d), (e) gelten. Setze $u = y_{00}$.

Behauptung. u ist Lösung von 8.6(1)/(2). Dies ist nicht trivial.

Dazu: Aus (a) folgt, dass

(1) $$y_{\alpha,j+l} = \partial_t^l (y_{\alpha,j}) \quad \text{falls } |\alpha| + j + l \le k, l \ge 1$$

Aus (b) folgt, dass für $|\alpha| + j = k, j < k$

$$\partial_t y_{\alpha,j} = \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}, j+1} \overset{(1)}{=} \partial_{x_{i(\alpha)}} \partial_t y_{\alpha - e_i(\alpha), j}.$$

Folglich ist für gewisse Funktionen $c_{\alpha,j}$,

$$y_{\alpha,j}(x,t) = \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}, j} + c_{\alpha,j}(x).$$

Die Anfangsbedingung (d) liefert

(2) $$y_{\alpha,j}(x,0) = \partial_x^\alpha \varphi_j(x) = \partial_{x_{i(\alpha)}} \partial_x^{\alpha - e_{i(\alpha)}} \varphi_j(x) = \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}, j}(x,0),$$

so dass $c_{\alpha,j} \equiv 0$. Somit ist

(3) $$y_{\alpha,j} = \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}, j}, \quad |\alpha| + j = k, j < k.$$

Schließlich folgt aus (c), (1), (3)

$$\partial_t y_{0k} = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq k\\ j<k}} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha,j}} \partial_t y_{\alpha,j} = \frac{\partial}{\partial t} G(x,t,y_{\alpha,j}(x,t)).$$

Dies erzwingt

$$y_{0k}(x,t) = G(x,t,(y_{\alpha,j}(x,t))) + c_{0k}(x).$$

mit gegebenem c_{0k}. Verwendung der Anfangsbedingungen (d), (e) ergibt, dass $c_{0k} \equiv 0$ und damit

(4)
$$y_{0k} = G(x,t,(y_{\alpha,j}(x,t)))_{|\alpha|+j\leq k, j<k}.$$

Wir zeigen nun noch eine Erweiterung von (3), nämlich

(5)
$$y_{\alpha,j} = \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha-e_{i(\alpha)},j}, \quad \alpha \neq 0, |\alpha| + j \leq k.$$

Wir verwenden vollständige Induktion nach $k - (|\alpha| + j)$; (3) ist der Induktionsanfang.

Die Induktionsannahme liefert für $|\alpha| + j < k, \alpha \neq 0$ mit (1)

$$\partial_t y_{\alpha,j} \overset{(a)}{=} y_{\alpha,j+1} \overset{\text{Ind.Anf.}}{=} \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha-e_{i(\alpha)},j+1} \overset{(b)}{=} \partial_t \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha-e_{i(\alpha)},j}.$$

Wiederum ist

$$y_{\alpha j}(x,t) = \partial_{x_{i(\alpha)}} y_{\alpha-e_{i(\alpha)},j} + c_{\alpha,j}.$$

Vergleich der Anfangswerte liefert wie in (2), dass $c_{\alpha j} = 0$. Somit ist (5) bewiesen.

Wir erhalten iterativ aus (1), (3), (5), dass

(6)
$$y_{\alpha j} = \partial_x^\alpha \partial_t^j u$$

Aus (4), (6) und (d), (e) folgt, dass u das Cauchy-Problem 8.6 löst. $\triangleleft$

8.21. Satz. *Das Cauchy-Problem aus 8.20 ist äquivalent zu einem weiteren quasilinearen Cauchy-Problem, bei dem $\Phi = 0$ ist und $A_1, \ldots, A_n, B$ nicht von t abhängen.*

Beweis. Setze zunächst $U(x,t) = Y(x,t) - \Phi(x)$. Dann löst Y das Cauchy-Problem aus 8.20 genau dann, wenn U folgendes erfüllt:

$$\partial_t U = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i(x,t,U)\partial_{x_i} U + \tilde{B}(x,t,U)$$

$$U(x,0) = 0$$

wobei

$$\tilde{A}_i(x,t,U) = A_i(x,t,U+\Phi)$$

$$\tilde{B}(x,t,U) = B(x,t,U+\Phi) + \sum A_i(x,t,U+\Phi)\partial_{x_i}\Phi$$

Um die explizite Abhängigkeit von t aus $\tilde{A}_i$ und $\tilde{B}$ zu eliminieren, vergrößern wir den Vektor U: Wir führen eine weitere Komponente u_0 ein, die die Differenzialgleichung $\partial_t u_0 = 1, u_0(x,0) = 0$ erfüllt. Damit ist $u_0(x,t) = t$. Wir können nun in $\tilde{A}_i$ und B die Variable t durch u_0 ersetzen und die Extragleichung und -anfangsbedingungen einfügen. $\triangleleft$

8.22. Bemerkung. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass in 8.20 bzw. 8.21 die Funktion Y bzw. U Werte in $\mathbb{R}^N$ für geeignetes N annehmen: Komplexwertige Systeme kann man über die Identifikation $\mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$ in entsprechende reellwertige umwandeln. Damit reduziert sich der Beweis des Satzes von Cauchy und Kowalewskaja auf den Beweis folgender Aussage:

8.23. Satz. *Es sei B analytisch nahe 0 mit Werten in $\mathbb{R}^N$;$A_1, \ldots, A_n$ seien analytisch nahe 0 mit Werten in $N \times N$-Matrizen.*

Dann gibt es eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, in der das Cauchy-Problem

$$\partial_t Y(x,t) = \sum_1^n A_j(x,Y)\partial_{x_j} Y + B(x,Y) \tag{1}$$

$$Y(x,0) = 0 \tag{2}$$

eine eindeutige analytische Lösung hat.

Beweis. Schöner Beweis in 3 Schritten:
1. Schritt. Man zeigt, dass man eine Potenzreihe für die Lösung hinschreiben kann. Die Frage ist, ob sie konvergiert.
2. Schritt. Man zeigt, dass man ein Vergleichskriterium für solche Dgl hat: Majorisieren die Koeffizienten der anderen Dgl die der unsrigen, und hat diese Dgl eine konvergente Potenzreihen-Lösung auf einem Würfel, so auch unsere.
3. Schritt. Man schreibt explizit eine solche Dgl hin und löst sie.

Dazu im Einzelnen:

1. *Schritt.* Wir schreiben

$$\begin{aligned} Y &= (y_1, \ldots, y_N) \\ B &= (b_1, \ldots, b_N) \\ A_j &= (a^j_{ml})_{m,l=1,\ldots,N}. \end{aligned}$$

Wir suchen Funktionen

$$y_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_m^{\alpha j} x^\alpha t^j, \tag{3}$$

die (1)/(2) lösen. Die Anfangsbedingung (2) ist äquivalent dazu, dass

$$c_m^{\alpha 0} = 0 \qquad \text{für alle } m, \alpha. \tag{4}$$

In Komponenten erhalten wir die Gleichungen

$$\partial_t y_m = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^N a^j_{ml}(x, y_1, \ldots, y_N)\partial_{x_j} y_l + b_m(x, y_1, \ldots, y_N), \quad m = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Wir können den Potenzreihenansatz für y_m in die a^j_{ml} und b_m einsetzen. Dies liefert eine Potenzreihe in x und t. Ihre Koeffizienten sind Polynome in den $c_m^{\alpha j}$ und den Taylorkoeffizienten der a^j_{ml} bzw. der b_m, vgl. 8.16. Die Koeffizienten in diesen Polynomen sind nichtnegativ. Die Koeffizienten der Terme, die bei t^j stehen, hängen nur von den $c_k^{\alpha l}$ ab mit $l \le j$.

Auch wenn wir die Summe

$$\sum_{j=1}^n a^j_{ml}(x, y_1, \ldots, y_N)\partial_{x_j} y_t$$

als Potenzreihe in x und t schreiben, hängen die Koeffizienten der Terme mit t^j nur von den $c_k^{\alpha l}, l \le j$ ab. Die rechte Seite von (5) hat also die Form

$$\sum_{\alpha,j} P_m^{\alpha,j}\Big((c_k^{\beta l})_{l\le j}; \text{Koeffizienten von } A_i, B\Big)\, x^\alpha t^i,$$

wobei $P_m^{\alpha j}$ ein Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten ist. Auf der linken Seite von (5) steht

$$\sum_{\alpha j}(j+1)c_m^{\alpha j+1}x^\alpha t^j.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$c_m^{\alpha j+1} = (j+1)^{-1}P_m^{\alpha j}\left((c_k^{\beta l})_{l\leq j},\ \text{Koeffizienten von } A_i \text{ und } P\right).$$

Kennen wir also die $c_k^{\beta l}$ für $l \leq j$, so können wir die rechte Seite bestimmen und damit $c_m^{\alpha j+1}$. Die Anfangsbedingung (4) liefert den Start für diese Rekursion. Wir können also alle $c_m^{\alpha j}$ berechnen und wissen weiterhin, dass

$$c_m^{\alpha j} = Q_m^{\alpha j}(\text{Koeffizienten von } A_i \text{ und } B),$$

wobei Q ein Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten ist. Es ist jedoch noch nicht klar, dass wir eine *konvergente* Potenzreihe erhalten. Um dies zu sehen, gehen wir folgendermaßen vor:

2. *Schritt.* Nehmen wir an, wir hätten ein anderes (ebenfalls $\mathbb{R}^N$-wertiges) Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \partial_t\tilde{Y}(x,t) &= \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j(x,\tilde{Y})\partial_{x_j}\tilde{Y} + \tilde{B}(x,\tilde{Y}) \\ \tilde{Y}(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

und nehmen wir an, wir wüssten, dass

(i) eine analytische Lösung existiert nahe $(0,0) \in \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}$

(ii) die Potenzreihen für die $\tilde{A}_j$ und $\tilde{B}$ diejenigen der A_j und von B majorisieren.

Dann ist – nach obigen Überlegungen – die Lösung dieses Problems von der Form $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_N)$ mit $y_m = \sum_{\alpha,j}\tilde{c}_m^{\alpha j}x^\alpha t^j$, wobei

$$\tilde{c}_m^{\alpha j} = Q_m^{\alpha j}(\text{Koeffizienten von } A_i \text{ und } B)$$

Beobachte: Wir haben *die selben* Polynome $Q_m^{\alpha j}$ wie oben (universelles Polynom)!

Da die Koeffizienten nichtnegativ sind, folgt aus (ii):

$$\begin{aligned} |c_m^{\alpha j}| &= |Q_m^{\alpha j}(\text{Koeffizienten von } A_i \text{ und } B)| \\ &\leq Q_m^{\alpha j}(\text{Koeffizienten von } \tilde{A}_i \text{ und } \tilde{B}) \\ &= \tilde{c}_m^{\alpha j} \end{aligned}$$

Also majorisiert die Taylorreihe für $\tilde{Y}$ diejenige für Y, letztere konvergiert also in einer Umgebung von $(0,0)$.

3. *Schritt.* Wir konstruieren nun solch ein majorisierendes System: Wir wissen aus 8.19, dass die Reihen für die A_j bzw. B majorisiert werden durch die Reihe, die zu der Funktion

$$\frac{Mr}{r-(x_1+\ldots+x_n)-(y_1+\ldots+y_N)}$$

gehören. Hier ist $M>0$ hinreichend groß und $r>0$ hinreichend klein. Wir betrachten nun das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} &(6) & \partial_t y_m(x,t) &= \frac{Mr}{r-\sum x_i - \sum y_j}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^N \partial_{x_i}y_j + 1\right) \\ &(7) & y_m(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Dazu finden wir tatsächlich eine Lösung: Wir lösen zunächst das Cauchy-Problem

$$\partial_t u(t,s) = \frac{Mr}{r-s-Nu}[Nn\partial_s u(t,s)+1] \tag{8}$$
$$u(0,s) = 0 \tag{9}$$

für eine skalare Funktion u. Dies können wir nach 2.11, da das Vektorfeld der Koeffizienten nicht tangential an die Hyperfläche $\{t=0\}$ ist:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -NnMr/(r-s) & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir setzen $Y=(y_1,\ldots,y_N)$ mit $y_j(x,t)=u(t,x_1+\ldots+x_n)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial_t y_j(x,t) &= \partial_t u(t,x_1+\ldots+x_n) = \frac{Mr}{r-\sum x_i - Nu}\left[Nn(\partial_s u)\left(t,\sum x_i\right)+1\right] \\
&= \frac{Mr}{r-\sum x_i - \sum_k y_k}\left[\sum_j\sum_i \partial_{x_i} y_j + 1\right]
\end{aligned}$$

da $\partial_{x_i} y_j = \partial_s u(t,\sum x_i)$, also ist (6) erfüllt, dazu (7).

Um (8)/(9) konkret zu lösen, schreiben wir (8) um: Es ist

$$(r-s-Nu)\partial_t u - MrNn\partial_s u = Mr$$

Nach Satz 2.11 haben wir folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen

$$\frac{dt}{d\tau} = r-s-Nu \qquad \frac{ds}{d\tau} = MrNn \qquad \frac{du}{d\tau} = Mr$$

mit den Anfangswerten (beachte: die Hyperfläche ist gegeben durch $g(\sigma)=(0,\sigma)$)

$$t(0)=0 \qquad s(0)=\sigma \qquad u(0)=0.$$

Wir finden die implizite Lösung

$$\begin{aligned}
s &= -MrNn\tau + \sigma \\
u &= Mr\tau \\
\dot{t} &= r + MrNn\tau - \sigma - NMr\tau \\
&= r + MrN(n-1)\tau - \sigma \quad \text{und somit} \\
t &= MrN(n-1)\frac{\tau^2}{2} + (r-\sigma)\tau.
\end{aligned}$$

Auflösen liefert

$$\sigma\tau = s\tau + MrNn\tau^2, \quad \text{also}$$

$$t = MrN\overbrace{\left(\frac{n-1}{2}-n\right)}^{-\frac{n+1}{2}}\tau^2 + (r-s)\tau \quad \text{und daher}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{1/2} &= \frac{s-r\pm\sqrt{(r-s)^2+4tMrN(-\frac{n+1}{2})}}{2MrN\left(-\frac{n+1}{2}\right)} \\
&= \frac{r-s\mp\sqrt{(r-s)^2-2MrNt(n+1)}}{MrN(n+1)}
\end{aligned}$$

Also:

$$u(s,t) = \frac{r - s - \sqrt{(r-s)^2 - 2MrNst}}{N(n+1)} \qquad \leftarrow \text{Minuszeichen bei Wurzel, da } u(s,0) = 0$$

Diese Funktion ist für kleine Werte von (s,t) analytisch, also ist auch Y analytisch.

Damit ist der Beweis vollständig. $\triangleleft$