7. Die Wellengleichung

7.1. Lichtkegel.

$$\partial_t^2 - \Delta \text{ hat Symbol } -\tau^2 + |\xi|^2$$

Charakteristik

$$\begin{array}{lr} \Sigma = \{(\xi,\tau) \neq 0 : |\xi|^2 = \tau^2\} & \text{Lichtkegel} \\ \Sigma \cap \{\tau > 0\} & \text{Vorwärtslichtkegel} \\ \Sigma \cap \{\tau < 0\} & \text{Rückwärtslichtkegel.} \end{array}$$

7.2. Satz. *Es sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ und $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$. Ferner sei $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ und $u = \partial_t u = 0$ auf dem Ball*

$$B = \{(x,0) : |x - x_0| < t_0\}$$

zur Zeit $t = 0$ (mit festem $x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < t_0 \leq T$)

Dann ist $u \equiv 0$ in dem Gebiet

$$\Omega = \{(x,t) : 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

Insbesondere: Ist u eine Lösung der Wellengleichung, so hängt der Wert von u in (x_0, t_0) nur von $u(x,0)$ und $\partial_t u(x,0)$ für $|x - x_0| < t_0$ ab.

Beweis. OBdA u reell (sonst Realteil und Imaginärteil betrachten). Setze

$$B_t = \{x : |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

Die Energie der Welle zur Zeit t in B_t ist

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_{B_t} |\nabla_{x,t} u(x,t)|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{B_t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right] dx \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \int_{B_t} \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}\right] dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\partial B_t} |\nabla_{x,t} u|^2 \, dS(x) \end{aligned}$$

(letzter Term, weil $\frac{d}{dr}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy = \frac{d}{dr}\int_0^r \int_{S_1(x)} f(s\theta)s^{n-1} dS ds = \int_{S_r(x)} f(y)\,dS(y)$) und $B_t = B_{t_0 - t}(x_0)$. Nun gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
&\int_{B_t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial t}\right]dx\\
=\;&\int_{B_t}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}}_{=0\text{ (Wellengleichung)}}\right)+\operatorname{div}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\nabla_x u\right)dx\\
\overset{\text{Gauß}}{=}\;&\int_{\partial B_t}\frac{\partial u}{\partial t}\langle\nabla_x u,\nu\rangle\,dS.
\end{aligned}$$

Nun schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}\langle\nabla_x u,\nu\rangle &\overset{CauchyS}{\le} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\|\nabla_x u\|\underbrace{\|\nu\|}_{=1}\\
&\overset{2ab\le a^2+b^2}{\le} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\|\nabla_x u\|^2\right)
\end{aligned}$$

somit:

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\partial B_t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\langle\nabla_x u,\nu\rangle-\frac{1}{2}\|\nabla_{x,t}u\|^2\right)dS\le 0.$$

Nun ist $E(t)\ge 0$ und $E(0)=0$ nach Annahme, folglich ist

$$E(t)=0\quad\text{für alle } t.$$

Damit wiederum ist $\nabla_{x,t}u=0$ für alle t und somit u konstant auf Ω. Wegen der Anfangswerte ist dann $u\equiv 0$. $\triangleleft$

7.3. Das Cauchyproblem in $\mathbb{R}^n$. Gegeben f,g, finde die Lösung von

$$\partial_t^2 u-\Delta u=0,\quad u(x,0)=f,\quad \partial_t u(x,0)=g.$$

7.4. Der Fall $n=1$. Wir wissen aus 2.2, dass die Lösung der Aufgabe 7.3 gegeben ist durch

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)\,ds.$$

Beobachtung. Ist $f\in\mathcal{C}^2$ und $g\in\mathcal{C}^1$, so ist $u\in\mathcal{C}^2$ und eine Lösung der Aufgabe.

7.5. Bemerkung. Sind $f,g\in L^1_{\text{loc}}$, und definiert man u nach der obigen Formel, so kann man zeigen, dass $t\mapsto u(\cdot,t)$ eine glatte Funktion mit Werten in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist, die die Wellengleichung im Distributionssinn erfüllt, wobei $\lim_{t\to 0}u(t,\cdot)=f$, $\lim_{t\to 0}\partial_t u(\cdot,t)=g$. Details in Folland.

7.6. Das sphärische Mittel. Wir definieren

$$\begin{aligned}
M_\varphi(x,r) &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{|x-y|=r}\varphi(y)\,dS(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1}\varphi(x+ry)\,dS(y).
\end{aligned}$$

Beachte: Die letzte Formel ist für $x\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{R}$ sinnvoll!

7.7. Satz. *Ist $\varphi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, so gilt*

$$\Delta_x M_\varphi(x,r)=\left[\partial_r^2+\frac{n-1}{r}\partial_r\right]M_\varphi(x,r)\qquad r\ne 0.$$

Beweis. Wegen Symmetrie genügt es, $r > 0$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_r M_\varphi(x,r) &= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} \langle \nabla_x \varphi(x+ry), y\rangle \, dS(y) \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|\le 1} \operatorname{div}_y \nabla_x \varphi(x+ry)\, dy \\
&\overset{\operatorname{div}_y = r \operatorname{div}_x}{=} \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|\le 1} \Delta\varphi(x+ry) r \, dy \\
&= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{|z|\le r} \Delta\varphi(x+z)\, dz.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit r^{n-1} und Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
r^{n-1}\partial_r M_\varphi(x,r) &= \frac{1}{\omega_n}\int_0^r \int_{|y|=1} \Delta\varphi(x+\rho y)\rho^{n-1}\, dS(y) d\rho \\
\text{also } \partial_r[r^{n-1}\partial_r M_\varphi(x,r)] &= \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1} \Delta\varphi(x+ry) r^{n-1}\, dS(y) \\
&= r^{n-1}\Delta_x M_\varphi(x,r).
\end{aligned}$$

Weil

$$\partial_r(r^{n-1}\partial_r) = r^{n-1}\partial_r^2 + r^{n-1}\frac{n-1}{r}\partial_r$$

ist, folgt die Behauptung nach Division durch r^{n-1}. ◁

7.8. Folgerung. *Es sei $u = u(x,t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ und $M_u(x,r,t)$ das sphärische Mittel von $u(\cdot,t)$. Dann ist äquivalent*

(a) *u erfüllt Wellengleichung*

(b) $\left[\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right] M_u(x,r,t) = \partial_t^2 M_u(x,r,t)$.

Beweis. Folgt aus Satz 7.7, weil $M_{\partial_t^2 u}\partial_t^2 M_u$ und $M_{\Delta u} = \Delta M_u = \left[\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right] M_u$. ◁

7.9. Lemma. *Ist $k \ge 1, \varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$*

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 (r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\varphi(r)] &= (r^{-1}\partial_r)^k [r^{2k}\varphi'(r)] \\
&= (r^{-1}\partial_r)^{k-1}(r^{2k-1}\varphi'' + 2kr^{2k-2}\varphi').
\end{aligned}$$

Beweisskizze. Zeige die erste Identität zunächst für $\varphi(r) = r^m$. Dann gilt sie auch für Polynome, da die Gleichung linear ist. Nun zeigt man, dass beide Seiten für $r = r_0$ Null sind, falls φ eine Nullstelle der Ordnung $k+1$ in r_0 hat. Da man nach dem Satz von Taylor φ stets schreiben kann als $\varphi(r) = p(r) + q(r)$, wobei p ein Polynom ist und q von Ordnung $k+1$ in r_0 verschwindet, folgt die Behauptung.

Die zweite Identität ist klar. ◁

7.10. Definition.

Wir definieren den Operator T_k durch

$$T_k\varphi = (r^{-1}\partial_r)^{k-1}(r^{2k-1}\varphi(r)).$$

Nach obigem Lemma

$$\partial_r^2 T_k\varphi(r) = T_k(\partial_r^2 + 2kr^{-1}\partial_r)\varphi.$$

Speziell für $2k+1=n$ sehen wir, dass für jede Lösung u der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_r^2 T_k M_u(x,r,t) &= \left(T_k(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) M_u(x,r,t) \\ &\overset{7.8}{=} T_k\partial_t^2 M_u(x,t,r) = \partial_t^2 T_k M_u(x,r,t).\end{aligned}$$

Die Funktion $T_k M_u$ erfüllt dann für jedes x als Funktion von r die eindimensionale Wellengleichung.

7.11. Lemma.

$$T_k\varphi(r) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^{j+1}\varphi^{(j)}(r)$$

mit geeigneten c_j. Speziell für $j=0$ (keine Ableitung auf φ) sieht man $c_0 = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)$.

7.12. Satz. *Es sei $n \geq 3$ ungerade. Ist $f \in \mathcal{C}^{(n+3)/2}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}^{(n+1)/2}(\mathbb{R}^n)$, so liefert*

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\omega_n}\left[\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\int_{|y|=1} f(x+ty)\,dS(y)\right)\right.\\ &\quad \left. +(t^{-1}\partial_t)^{\frac{(n-3)}{2}}\left(t^{n-2}\int_{|y|=1} g(x+ty)\,dS(y)\right)\right]\end{aligned}$$

eine Lösung des Cauchyproblems.

Beweis. Bis auf einen konstanten Faktor ist der zweite Term rechts

$$v(x,t) = (t^{-1}\partial_t)^{\frac{(n-3)}{2}}(t^{n-2}M_g(x,t)) \underset{2k+1=n}{=} T_k M_g(x,t).$$

Dann ist (wegen $2k+1=n$ und weil Δ mit ∂_r vertauscht)

$$\begin{aligned}\Delta_x v(x,t) &= T_k(\Delta_x M_g(x,t) \\ &\overset{2k+1=n,7.7}{=} T_k(\partial_t^2 M_g + 2kt^{-1}\partial_t M_g) \\ &\overset{7.9}{=} \partial_t^2 T_k M_g(x,t) \\ &= \partial_t^2 v(x,t).\end{aligned}$$

Damit erfüllt v die Wellengleichung.

Analog: Die durch

$$w(t) = (t^{-1}\partial_t)^{\frac{(n-3)}{2}}(t^{n-2}M_f(x,t)) = T_k M_f(x,t)$$

definierte Funktion w erfüllt die Wellengleichung, somit auch $\partial_t w$ (beachte: $f \in \mathcal{C}^{\frac{(n+3)}{2}}$, und $(\partial_t^2 - \Delta)\partial_t w = \partial_t(\partial_t^2-\Delta)w = 0$). Dies ist der erste Term rechts.

Zur Anfangsbedingung: Schreibe $T_k\varphi = \sum c_j r^{j+1}\varphi^{(j)}(r)$.

Dann ist

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{c_0}(\partial_t T_k M_f(x,t) + T_k M_g(x,t)) \\ &= \partial_t\left[tM_f(x,t) + \frac{c_1}{c_0}t^2\partial_t M_f(x,t) + O(t^3)\right] \\ &\quad +tM_g(x,t) + O(t^2) \\ &= M_f(x,t) + \frac{c_0+2c_1}{c_0}t\partial_t M_f(x,t) + tM_g(x,t) + O(t^2).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u(x,0) &= M_f(x,0) = f(x) \\ \partial_t u(x,0) &= \frac{c_0 + c_0 + 2c_1}{c_0} \partial_t M_f(x,0) + M_g(x,0). \end{aligned}$$

Da $M_f(x,t)$ eine gerade Funktion von t ist, ist $\partial_t M_f(x,0) = 0$. Daher ist $\partial_t u(x,0) = M_g(x,0) = g(x)$. ◁

Die Lösung für gerades n.

7.13. Satz. *Es sei $n \geq 2$ gerade. Ist $f \in \mathcal{C}^{(n+4)/2}(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{C}^{(n+2)/2}(\mathbb{R}^n)$, so ist*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\omega_{n+1}} \left[\partial_t (t^{-1}\partial_t)^{\frac{(n-2)}{2}} \left(t^{n-1} \int_{|y| \leq 1} \frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\, dy \right) \right. \\ &\quad \left. + (t^{-1}\partial_t)^{\frac{(n-2)}{2}} \left(t^{n-1} \int_{|y|\leq 1} \frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\, dy \right) \right] \end{aligned}$$

eine Lösung des Cauchyproblems.

Beweis. Wir betrachten f und g als Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}$, die in x_{n+1} konstant sind. Dann definieren wir u wie in Satz 7.12 (für $n+1$!).

Beachte: Da f und g nun Funktionen auf $\mathbb{R}^{n+1}$ sind, erhöhen sich die Differenzierbarkeitsannahmen.

Dann erfüllt u die Wellengleichung in $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$. Da u von x_{n+1} gar nicht abhängt, erfüllt u auch die Wellengleichung in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$!

Ferner ist

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f \quad \text{(betrachtet als konstante Funktion in } x_{n+1}) \\ \partial_t u(x,0) &= g \quad \text{(als konstante Funktion in } x_{n+1}). \end{aligned}$$

Daher löst u das Cauchyproblem.

Zu erklären bleibt die unterschiedliche Form der Integrale und der Faktor 2. Dies ergibt sich durch einfache Rechnung: Wir schreiben

$$\int_{|\tilde{y}|=1 \text{ in } \mathbb{R}^{n+1}} f(x+t\tilde{y})\, d\tilde{y} \overset{\text{Symmetrie}}{=} 2 \int_{\text{obere Hemisphäre in } \mathbb{R}^{n+1}} f(x+t\tilde{y})\, d\tilde{y}$$

Nun schreiben wir die obere Hemisphäre als Graph. Wir setzen

$$\begin{aligned} \psi &: \{y \leq 1\} \to \mathbb{R}^{n+1}, \\ \psi(y) &= (y, F(y))) \text{ mit } F(y) = (1-|y|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Das Oberflächenmaß ist dann gegeben durch (Analysis 3, Beispiel 26.26, 26.27)

$$dS = \sqrt{1 + \|\nabla F(y)\|^2}\, dy = \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

Damit ergibt sich die Behauptung. ◁

7.14. Bemerkung.

(a) Damit ist das Cauchyproblem für die Wellengleichung für alle Dimensionen gelöst.

(b) Satz 7.2 liefert eine Eindeutigkeitsaussage: Der Wert von u in (x_0, t_0) hängt nur ab von $u(x,0)$ und $\partial_t u(x,0)$ für $|x-x_0|<t_0$. Genau dieser Abhängigkeitsbereich tritt auch in geraden Dimensionen auf.

In ungeraden Dimensionen hängt $u(x_0,t_0)$ nur von den Werten von $u(x)$ bzw. $\partial_t u(x,0)$ für eine infinitesimale Umgebung von $\{|x-x_0|=t_0\}$ ab.

Bekanntes Phänomen: Blitz in 3D: sofort vorbei, Wasserwelle in 2D: klingt nach.

7.15. Verallgemeinerung. Wir definieren für ungerade Dimension die Distributionen Σ_t^u, $t\in\mathbb{R}$, durch

$$\Sigma_t^u(\psi) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1}\psi(ty)\,dS(y)$$

Dann ist $t\mapsto \Sigma_t^u$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathcal{D}'$ (d.h. für jedes $\psi\in\mathcal{D}$ ist $t\mapsto\Sigma_t^u(\psi)$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung). Wir zeigen: Setzt man

$$\Phi_t = \frac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+2)}T_k\Sigma_t^u \qquad n=2k+1$$

so ist für ungerades $n\geq 3$

(1) $$u(\cdot,t) = f*\partial_t\Phi_t + g*\Phi_t$$

eine Lösung des Cauchyproblems im Distributionssinn. Dazu erinnern wir uns, dass die Faltung $\psi * T$ einer Funktion ψ mit einer Distribution T punktweise definiert werden kann durch

$$(\psi*T)(x) = T(\tau_x\psi)^\vee = T(\psi(x-\cdot)).$$

Also ist

$$g*\Phi_t(x) = \Phi_t f(x-\cdot) = \frac{1}{c_0}T_k\Sigma_t(f(x-\cdot) = \frac{1}{\omega_n c_0}T_k\int_{|y|=1}f(x+ty)dS(y).$$

Dies ist genau der zweite Term aus Satz 7.12 für hinreichend glattes f; analog für den ersten.

Für gerade Dimension lässt sich (1) ebenfalls anwenden mit:

$$\begin{aligned}\Sigma_t^g(\psi) &= \frac{1}{\omega_{n+1}}\int_{|y|\leq 1}\frac{\psi(ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,dy,\\ \Phi_t^g &= \frac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}T_k\Sigma_t^g\end{aligned}$$

Für $n=1$ verwendet man $\Phi_t(\psi)=\frac{1}{2}\int_{-t}^t\psi(s)\,ds$.

7.16. Das Cauchyproblem für die inhomogene Wellengleichung. Löse

(1) $$\partial_t^2 u - \Delta u = w(x,t)$$
(2) $$u(x,0) = f(x)$$
(3) $$\partial_t u(x,0) = g(x).$$

Wir wissen bereits, wie man diese Aufgabe für $w=0$ löst, etwa durch u_1. Es langt also, die Aufgabe für $f=g=0$ zu lösen, etwa durch u_2.

Dann ist $u=u_1+u_2$ eine Lösung des Problems.

Dazu

7.17. Satz. *Es sei $w \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Für $s \in \mathbb{R}$ sei $v = v(x,t,s)$ die Lösung von*

$$\partial_t^2 v - \Delta v = 0, \quad v(x,0,s) = 0, \quad \partial_t v(x,0,s) = w(x,s).$$

Dann löst

$$u(x,t) = \int_0^t v(x, t-s, s)\, ds$$

die Aufgabe 7.16(1),(2) *mit $f = g = 0$.*

Beweis. Klar: $u(x,0) = 0$. Ferner ist

$$\begin{aligned} (\partial_t u)(x,t) &= \underbrace{v(x,0,t)}_{=0} + \int_0^t \partial_t v(x,t-s,s)\, ds \\ \text{somit: } (\partial_t u)(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Noch einmal nach t ableiten:

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u)(x,t) &= \partial_t v(x,0,t) + \int_0^t \partial_t^2 v(x,t-s,s)\, ds \\ &\overset{\text{Ann.}}{=} w(x,t) + \int_0^t \Delta_x v(x,t-s,s)\, ds \\ &\overset{\text{Def.}}{=} w(x,t) + \Delta_x u(x,t). \end{aligned}$$

◁

7.18. Bemerkung. Satz 7.17 ist vor allem dann interessant, wenn man die Wellengleichung für $t \geq 0$ betrachtet.

Physikalisch ebenfalls interessant ist es, die Lösungen der Aufgabe

(1)
$$\partial_t^2 u - \Delta u = w(x,t)$$

zu bestimmen unter der Annahme, dass $t \in \mathbb{R}$ und

$$w(x,t) = 0 \text{ für } t \leq t_0.$$

Man sucht eine Lösung u mit

(2)
$$u(x,t) = 0 \text{ für } t \leq t_0.$$

Dies ist jedoch leicht:

7.19. Satz. *Es sei $w \in \mathcal{C}^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ und $w(\cdot,t) = 0$ für $t \leq t_0$. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ sei $v(x,t,s)$ die Lösung von*

$$\partial_t^2 v - \Delta v = 0, \qquad v(x,t_0,s) = 0, \qquad \partial_t v(x,t_0,s) = w(x,s)$$

Dann löst die Funktion

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^t v(x,t-s,s)\, ds$$

die Gleichungen

$$\partial_t^2 v - \Delta v = w, \qquad u(\cdot,t) = 0 \text{ für } t \leq 0.$$

Beweis. Zunächst ist $v(\cdot,\cdot,s) = 0$ für $s \leq t_0$, da dann v das Cauchyproblem mit Nulldaten löst. Daher ist auch $u(\cdot,t) = 0$ für $t \leq t_0$. ◁

Die Wellengleichung im Fourierbild.

7.20. Umformulierung. Wir betrachten das Cauchyproblem für die homogene Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad \partial_t u(x,0) = g(x)$$

Anwendung der Fouriertransformation in x-Richtung

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 \hat{u}(\xi,t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi,t) = 0, \\ &\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \\ &\partial_t \hat{u}(\xi,0) = \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

Die Lösung ist eine Linearkombination von $\cos(|\xi|t)$ und $\sin(|\xi|t)$, nämlich

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(|\xi|t) + \frac{\hat{g}(\xi)\sin|\xi|t}{|\xi|}$$

Folglich ist

$$u(\cdot,t) = f * \Psi_t + g * \Phi_t,$$

wobei Ψ_t und Φ_t die inversen Fouriertransformationen der Funktion

$$\hat{\Phi}_t(\xi) = \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \qquad \hat{\Psi}_t(\xi) = \cos(|\xi|t) = \partial_t \hat{\Phi}_t(\xi)$$

sind.

Problem: Schwer zu berechnen. *Aber:* Wir kennen bereits die Antwort.

Für $n \geq 3$ ungerade ist

$$\Phi_t \text{ die Distribution aus 7.15}, \Psi_t = \partial_t \Phi_t$$

Für $n \geq 2$ gerade ist Φ_t analog konstruiert.

Für $n = 1 : \Phi_t(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \varphi(s)\, ds$; wir können dies auch direkt verifizieren:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_t(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{2}\frac{e^{-i\xi t} - e^{+i\xi t}}{-i\xi} \\ &= \frac{\sin \xi t}{\xi} = \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall können wir trotzdem einiges sagen:

7.21. Lemma. *Definiere*

$$\hat{\Phi}_t^\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|}\hat{\Phi}_t(\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi}_t^\varepsilon \to \hat{\Phi}_t \textit{ gleichmäßig auf } \mathbb{R}^n \textit{ für } \varepsilon \longrightarrow 0 \\ \textit{Also} \quad & \hat{\Phi}_t^\varepsilon \to \hat{\Phi}_t \textit{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ \textit{und} \quad & \Phi_t^\varepsilon \to \Phi_t \textit{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

7.22. Die inverse Fouriertransformierte von $\hat{\Phi}_t^\varepsilon$. Es ist

$$\hat{\Phi}_t^\varepsilon(\xi) = \frac{e^{-(\varepsilon-it)|\xi|} - e^{-(\varepsilon+it)|\xi|}}{2i|\xi|} = \frac{1}{2i}\int_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it} e^{-s|\xi|}\, ds$$

Es folgt

$$\Phi_t^\varepsilon(x) = \frac{1}{2i}(2\pi)^{-n/2}\int_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-s|\xi|}\,d\xi ds$$

Das innere Integral kann man berechnen, es ist

$$(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}e^{-s|\xi|}\,d\xi = c_n\frac{s}{(s^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

Diese Identität gilt zunächst für $s>0$, setzt sich aber (Holomorphie) fort zu $s\in\mathbb{C}, \operatorname{Re}s>0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Phi_t^\varepsilon(x) &= \frac{1}{2i}c_n\int_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it}\frac{s}{(s^2+|x|^2))^{\frac{n+1}{2]}}}\,ds \\
&= \frac{c_n}{2i(1-n)}(s^2+|x|^2)^{\frac{1-n}{2}}\Big|_{s=\varepsilon-it}^{s=\varepsilon+it} \\
(1) \qquad &= \frac{c_n}{2i(1-n)}\left[\left((\varepsilon+it)^2+|x|^2\right)^{\frac{1-n}{2}} - \left((\varepsilon-it)^2+|x|^2\right)^{\frac{1-n}{2}}\right]
\end{aligned}$$

Nun lassen wir $\varepsilon\longrightarrow 0$ geben.

(a) Für $|x|>|t|$ sehen wir sofort, dass $\Phi_t^\varepsilon(x)\longrightarrow 0$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{|x|>|t|\}$. Somit hat

$$\operatorname{supp}\Phi_t\subseteq\{|x|\le|t|\}$$

(b) Ist $1<n$ ungerade, so ist $\frac{1-n}{2}$ eine ganze Zahl. Wegen

$$\frac{1}{a^k}-\frac{1}{b^k}=\frac{b^k-a^k}{a^kb^k}=\frac{b-a}{a^kb^k}(1+\dots)$$

folgt, dass auch $\Phi_t^\varepsilon(x)\longrightarrow 0$ für $|x|<|t|$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{|x|<|t|\}$. Somit ist auch in diesem Fall

$$\operatorname{supp}\Phi_t\subseteq\{|x|=|t|\} \qquad \text{„Huygens-Prinzip“}$$

(c) Für $|x|<|t|$ gilt $(\varepsilon\pm it)^2+|x|^2\longrightarrow|x|^2-|t|^2\in\mathbb{R}_{<0}$ und zwar von $\{\operatorname{Im}z>0\}$ für „+“, von $\{\operatorname{Im}t<0\}$ für „-“, falls $t>0$ (für $t<0$ umgekehrt).

Ist n gerade, so ist $1-n$ ungerade. Damit liegen (für kleines $\varepsilon>0$)

$$\left((\varepsilon\pm it)^2+|x|^2\right)^{n-1} \text{ in } \{\operatorname{Im}t\gtrless 0\} \text{ (für } t>0)$$

Da die Wurzel über dem Schnitt von $\mathbb{C}$ entlang $\mathbb{R}_-$ das Vorzeichen wechselt, *addieren* sich in diesem Fall die Terme in (1) auf $\{|x|<|t|\}$.

Damit gilt für $|x|<|t|$

$$\Phi_t(x) = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{c_n}{1-n}\,\frac{1}{(|t|^2-|x|^2)^{\frac{n-1}{2}}}\operatorname{sgn}t$$

Beachte: Zum Einen wechselt das Vorzeichen mit $\operatorname{sgn}t$; zum Anderen haben wir den Faktor $(-1)^{\frac{n}{2}}$, weil im Nenner $\sqrt{e^{i(n-1)\pi^-}}=e^{i\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi^-}=(-1)^{\frac{n}{2}}i$.

Bemerkung Wir wissen ja bereits, dass

$$\Phi_t = \frac{2\operatorname{sgn}t}{1\cdot 3\cdots(n-1)\omega_{n+1}}(t^{-1}\partial_t)^{(n-2)/2}(t^2-|x|^2)^{-1/2}.$$

Man kann nachrechnen, dass beide Ausdrücke übereinstimmen.

7.23. Satz. *Es seien $f, g \in L^2$ und – mit den Bezeichnungen von 7.20 –*

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^n}(\hat{f}\hat{\Psi}_t + \hat{g}\hat{\Phi}_t)$$

die (distributionelle) Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung. Dann ist

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \text{ gleichmäßig beschränkt für } t \in [t_0, t_1];$$

insbesondere: $u \in L^2(\mathbb{R}^n \times [t_0, t_1])$ für beliebige t_0, t_1 in $\mathbb{R}$.

Beweis. Es ist $\|\hat{f}\hat{\Psi}_t\|_2 \le \|\hat{f}\|_2 \|\hat{\Psi}_t\|_\infty \le C$ für alle t, ebenso $\|\hat{g}\hat{\Phi}_t\|_2$. Damit ist $\|\hat{u}(\cdot t)\|_2$ gleichmäßig beschränkt, also nach Plancherel auch $\|u(\cdot,t)\|_2$. $\triangleleft$

7.24. Erinnerung. Sobolevräume für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} H^k(\Omega) &= \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2\ \forall |\alpha| \le k\} \\ \text{alternativ für } \Omega = \mathbb{R}^n : H^k(\mathbb{R}^n) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in L^2\ \forall |\alpha| \le k\} \end{aligned}$$

7.25. Satz. *Es sei $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Lösung des Cauchyproblems*

$$u \in H^k(\mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]) \quad \text{für beliebige } t_0, t_1.$$

Beweis. Es ist

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f} * \cos(|\xi|t) + \hat{g} * \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$$

Nach der Regel $(D^\alpha_x u)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$ schließen wir $(D^\alpha_x \partial^j_t u)^\wedge(\xi)$ ist eine Linearkombination von Termen der Form

$$\xi^\alpha \left[|\xi|^{j_1} \hat{f} * \cos^{(j_l)}(|\xi|t) + |\xi|^{j_2-1} \hat{g} * \sin^{(j_2)}(|\xi|t) \right]$$

mit $j_1 + j_2 = j$.

Damit ist die L^2-Norm von $(D^\alpha_x \partial^j_t u)^\wedge$ gleichmäßig in t beschränkt, falls $|\alpha| + j \le k$. Es folgt, dass $D^\alpha_x D^j_t u \in L^2(\mathbb{R}^1 \times [t_1, t_2])$ für beliebige t_1, t_2. $\triangleleft$

Die Wellengleichung in beschränkten Gebieten. Im Folgenden sei Ω beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

7.26. Das Cauchyproblem mit Dirichletdaten (Neumanndaten). Gesucht ist die Lösung u der Aufgabe

(1) $$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty)$$

(2) $$u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ auf } \partial\Omega, t > 0 \qquad (\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0)$$

(3) $$u|_{t=0} = f \text{ in } \Omega$$

(4) $$\partial_t u|_{t=0} = g \text{ in } \Omega$$

7.27. Lösungsidee. Wir machen den Separationsansatz

$$u(x,t) = \sum F_j(x) G_j(t),$$

wobei alle Summanden die Wellengleichung samt Randwerten erfüllen. Wir erhalten

$$\frac{\Delta F_j}{F_j}(x) = \frac{G_j''}{G_j}(t) = -\lambda_j^2 \in \mathbb{C}$$

Finden wir also F_j mit

$$\begin{aligned} \Delta F_j + \lambda_j^2 F_j &= 0 \text{ in } \Omega \\ F|_{j,\partial\Omega} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (\text{bzw. } \partial_\nu F_j = 0 \text{ auf } \partial\Omega) \end{aligned}$$

so erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = \sum F_j(x)(a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t))$$

wobei a_j und b_j durch die Anfangsbedingung fixiert werden.

Hier

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum a_j F_j(x); && (1)\\ \partial_t u(x,0) &= \sum \lambda_j b_j F_j(x). && (2)\end{aligned}$$

Wir wissen schon:

7.28. Satz. *Es sei Ω beschränkt mit (hinreichend) glattem Rand. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\{F_j\}$ von $L^2(\Omega)$ bestehend aus Eigenfunktionen des Dirichletproblems auf Ω zu Eigenwerten $-\lambda_j^2$ mit $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$*

7.29. Lösung der Wellengleichung. Es seien $f, g \in L^2(\Omega)$. Zur Lösung von 7.26(1)-(4) müssen wir noch 7.27(1)/(2) lösen. Dies geschieht durch

$$a_j = \langle f, F_j\rangle \qquad b_j = \lambda_j^{-1}\langle g, F_j\rangle$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum |a_j|^2 &= \|f\|_{L^2} < \infty;\\ \sum |b_j|^2 &\le c\|g\|_{L^2} < \infty.\end{aligned}$$

Daher konvergiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Summe in $L^2(\Omega)$ (gleichmäßig in t). Damit ist $u \in L^2(\Omega \times [t_0, t_1])$ für beliebige t_0, t_1.

7.30. Beispiel. $n = 1, \Omega = [0, L]$. Die Eigenfunktionen sind (wegen der Randbedingungen)

$$F_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$$

Die Eigenwerte $-\lambda_j^2$ sind $-\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2$.

Die obige Lösung $u(x,t)$ hat daher die Gestalt

$$u(x,t) = \sum \left(a_j \cos\left(\frac{j\pi t}{L}\right) + b_j \sin\left(\frac{j\pi t}{L}\right)\right) \sin\frac{j\pi x}{L}$$

mit

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx\\ b_j &= \frac{2}{\pi j}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx\end{aligned}$$

Die Radon-Transformation. Die Radontransformation hat eine Vielzahl von Anwendungen, am bekanntesten ist die Computertomographie.

7.31. Beobachtung. Angenommen, die Cauchydaten f und g für die Wellengleichung auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ hängen nur von x_1 ab (nicht von $x_2, \ldots, x_n$). Dann können wir u mit Hilfe der eindimensionalen Formel definieren

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x_1 + t) + f(x_1 - t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t} g(s)\, ds$$

Dies liefert eine Lösung der Wellengleichung. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist dies *die* Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung.

7.32. Beobachtung. Die Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die senkrecht auf dem Vektor $w \in S^{n-1}$ steht und den Vektor v_0 enthält, ist gegeben als $\{x : \langle x - v_0, w\rangle = 0\} = \{x : \langle x, w\rangle = \langle v_0, w\rangle\}$. Die Gesamtheit solcher Hyperebenen ist also die Menge aller

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, w\rangle = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist c ist der gerichtete Abstand zu 0 (schreibe $v_0 = cw + w^\perp$ mit $w^\perp \perp w$).

Eine Funktion, die auf jeder Hyperebene senkrecht zu w konstant ist, ist daher von der Form $f(x) = F(\langle x, w\rangle)$ mit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

7.33. Beobachtung. Es seien die Cauchydaten f, g konstant auf jeder zu $w \in S^{n-1}$ normalen Hyperfläche. Dann existiert $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = F(\langle x, w\rangle), g(x) = G(\langle x, w\rangle)$$

Wir setzen

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(\langle x, w\rangle + t) + F(\langle x, w\rangle - t)\right) + \frac{1}{2}\int_{\langle x,w\rangle - t}^{\langle x,w\rangle + t} G(s)\, ds$$

Man nennt dieses u eine ebene Welle in Richtung w.

7.34. Die Radontransformation. Es sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Radontransformierte von f ist die Funktion

$$\begin{aligned} Rf \quad &: \quad \mathbb{R} \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (Rf)(s,w) \quad &= \quad \int_{\langle x,w\rangle = s} f(x)\, dx \end{aligned}$$

Dabei ist dx das $(n-1)$-dimensionale Lebesguemaß auf der Hyperebene $\{\langle x, w\rangle = s\}$

Klar:

(a) $Rf \in C^\infty(\mathbb{R} \times S^{n-1})$

(b) Für jedes feste $w \in S^{n-1}$ ist $(Rf)(\cdot, w) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(c) $(Rf)(-s, -w) = Rf(s, w)$

7.35. Beziehung zur Fouriertransformation. Es seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), w \in S^{n-1}$. Mit $\widehat{Rf}$ bezeichne die Fouriertransformation von $s \mapsto Rf(s, w)$. Dann gilt

$$\widehat{(Rf)}(\rho, w) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(\rho w), \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere folgt mit der Inversionsformel sofort

$$(Rf)(s,w) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int e^{is\rho} \hat{f}(\rho w)\, đ\rho.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\rho w) \quad &= \quad (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-i\rho\langle w,x\rangle} f(x)\, dx \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \quad (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\langle y,w\rangle = s} e^{-i\rho s} f(y)\, dy ds \\ &= \quad (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\rho s} (Rf)(s,w)\, ds = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \widehat{Rf}(\rho, w). \end{aligned}$$

◁

7.36. Inversion der Radontransformation, Teil I. Es sei $f \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{ix\rho w} \hat{f}(\rho w) \rho^{n-1}\, d\rho\, dS(w) \\ &\overset{7.35}{=} (2\pi)^{\frac{1}{2}-n} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{ix\rho w} \widehat{Rf}(\rho, w) \rho^{n-1}\, d\rho dS(w) \\ &= (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} h(\langle x, w\rangle, w)\, dS(w) \end{aligned}$$

mit

$$h(s,w) = \int_0^\infty e^{i\rho s} \widehat{Rf}(\rho, w) \rho^{n-1}\, đ\rho \quad \text{(beachte: } đ\text{)}.$$

Da $h(\langle x, w\rangle, w)$ über die gesamte Einheitssphäre integriert wird, können wir uns bzgl. w auf den geraden Anteil beschränken und erhalten dasselbe Ergebnis, d.h.

(1) $$f(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \left(h(\langle x, w\rangle, w) + h(-\langle x, w\rangle, -w)\right) dS(w)$$

Wegen

(2) $$\widehat{(Rf)}(\rho, w) = \widehat{Rf}(-\rho, -w).$$

ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(h(s,w) + h(-s,-w)) \\ &\overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{i\rho s} \widehat{Rf}(\rho, w) \rho^{n-1}\, đ\rho + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-i\rho s} \widehat{Rf}(\rho, -w) \rho^{n-1}\, đ\rho \\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{i\rho s} \widehat{Rf}(\rho, w) \rho^{n-1}\, đ\rho + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{i\rho s} \widehat{Rf}(\rho, w) (-\rho)^{n-1}\, đ\rho \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho s} \widehat{Rf}(\rho, w) |\rho|^{n-1}\, đ\rho \end{aligned}$$

also

(3) $$f(x) = (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \widetilde{R}f(\langle x, w\rangle, w)\, dS(w).$$

7.37. Definition. Wir nennen

$$\widetilde{R}f(s,w) = \frac{1}{2}\int e^{i\rho s} \widehat{Rf}(\rho, w) |\rho|^{n-1}\, đ\rho$$

die modifizierte Radontransformierte von f. Wir drücken nun $\tilde{R}f$ durch Rf aus:

Fall 1: n ungerade. Dann ist $|\rho|^{n-1} = \rho^{n-1}$

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}f)(s,w) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \int e^{i\rho s} (i\rho)^{n-1} \widehat{Rf}(\rho, w)\, đ\rho \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \partial_s^{n-1} Rf(s,w). \end{aligned}$$

Fall 2: n gerade. Dann ist $|\rho|^{n-1} = \operatorname{sgn}\rho\, \rho^{n-1}$ und

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}f)(s,w) &= (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{2} \int e^{i\rho s} (-i \operatorname{sgn}\rho)(i\rho)^{n-1} \widehat{Rf}(\rho, w)\, đ\rho \\ &= (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{2} H \partial_s^{n-1} Rf(s,w). \end{aligned}$$

Dabei ist H die Hilberttransformation:

7.38. Definition. Wir definieren den Operator

$$H : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

durch

$$(Hf)^\wedge(\xi) = -i\mathrm{sgn}\,\xi \hat{f}(\xi)$$

7.39. Inversionsformel für die Radontransformation. Kombination von 7.36(3) mit 7.37 liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \widetilde{R}f(\langle x, w\rangle, w)\, dS(w) \\ &= \begin{cases} (2\pi)^{1-n}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \partial_s^{n-1}(Rf)(\langle x, w\rangle, w)\, dS(w) & n \text{ ungerade} \\ (2\pi)^{1-n}(-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} H\partial_s^{n-1}(Rf)(\langle x, w\rangle, w)\, dS(w) & n \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hier eine andere Anwendung der Radontransformation:

7.40. Lösung des Cauchyproblems für die Wellengleichung. Es seien $f, g \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \widetilde{Rf}(\langle x, w\rangle, w)\, dS(w) \\ g(x) &= (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \widetilde{Rg}(\langle x, w\rangle, w)\, dS(w) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine (und folglich *die*) Lösung des Cauchyproblems durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \Big[\widetilde{Rf}(\langle x, w\rangle + t, w) + \widetilde{Rf}(\langle x, w\rangle - t, w) \\ &\quad + \int_{\langle x,w\rangle - t}^{\langle x,w\rangle + t} \widetilde{Rg}(s, w)\, ds\Big]\, dS(w) \end{aligned}$$

Allgemeine hyperbolische Gleichungen. Nun sei wieder Ω ein beschränktes Gebiet, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, und der Operator L definiert durch

$$Lu = -\sum_{jk} \partial_{x_j}(a^{jk}(x,t)\partial_{x_k} u) + \sum_j b^j(x,t)\partial_{x_j} u + c(x,t)u.$$

mit $a^{jk}, b^j, c \in C^1(\overline{\Omega}_T)$. Dabei gelte zusätzlich

(i) $a^{jk} = a^{kj}$

(ii) Für ein $\delta > 0$ ist $\sum_{jk} a^{jk}(x,t)\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2$ für alle $(x,\xi) \in \Omega_T$.

Wir betrachten das Cauchy-Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u + Lu &= f \quad \text{in } \Omega_T \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \\ u &= g \quad \text{auf } \Omega \times \{0\} \\ \partial_t u &= h \quad \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

für $f \in L^2(\Omega_T)$, $g \in H_0^1(\Omega)$, $h \in L^2(\Omega)$.

Wir führen nun den Begriff schwacher Lösungen ein. Dazu definieren wir wie im Beweis von Satz 6.18 eine zeitabhängige Bilinearform B auf $H^1(\Omega)$ durch

$$B(u,v;t) = \int_\Omega \sum_{jk} a^{jk}\partial_{x_k} u \partial_{x_j} v\, dx + \int_\Omega b^k \partial_{x_k} uv\, dx + \int_\Omega cuv\, dx.$$

Im Folgenden schreiben wir $u(t)$ für die Funktion $u(t,\cdot)$.

7.41. Definition. Wir nennen eine Funktion $u \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ mit $\partial_t u \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ und $\partial_t^2 u \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$ eine schwache Lösung, falls

$$\begin{aligned} &(1) & \langle \partial_t u(t), v\rangle_{H^{-1},H_0^1} + B(u,v,t) &= \langle f(t), v\rangle_{L^2,L^2}, \quad \text{f.ü. bzgl. } t \text{ für } v \in H_0^1(\Omega)\\ &(2) & u(0) &= g\\ &(3) & \partial_t u(0) &= h. \end{aligned}$$

7.42. Bemerkung.

(a) Wie vorher auch ist der Begriff der schwachen Lösung dadurch motiviert, dass man die Gleichung $\partial_t^2 u + Lu = f$ mit $v \in H_0^1(\Omega)$ skalar multipliziert und partiell integriert.

(b) Dass in (2) und (3) die Werte $u(0)$ und $\partial_t u(0)$ definiert sind, ist eine Konsequenz des folgenden Satzes.

7.43. Satz. *Ist X ein Banachraum und ist $u \in L^2(0,T,X)$ (im Distributionensinn) nach $t \in [0,T]$ differenzierbar mit $\partial_t u \in L^2(0,T,X)$, so gilt*

(i) $u \in C([0,T],X)$ *(evtl. nach Umdefinition auf einer Menge vom Maß Null)*

(ii) $u(t) - u(s) = \int_s^t \partial_t u(\tau)\, d\tau$

(iii) $\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X \le C \max\{\|u\|_{L^2(0,T,X)}, \|\partial_t u\|_{L^2(0,T,X)})$

(ohne Beweis, s. Evans, Theorem 2 in Section 5.9.2).

7.44. Existenz schwacher Lösungen mit dem Galerkin-Verfahren. Wir wählen eine ONB $\{w_1, w_2, \ldots\}$ von $L^2(\Omega)$, bestehend aus Eigenvektoren des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingung, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis von $H_0^1(\Omega)$ ist.

Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ gehen wir nun wie folgt vor: Wir machen den Ansatz

$$(1) \qquad u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k.$$

Dabei seien die Koeffizienten $d_m^k(t)$ so gewählt, dass

$$\begin{aligned} &(2) & \langle \partial_t^2 u_m(t), w_k\rangle_{H^{-1},H_0^1} + B(u_m, w_k; t) &= \langle f(t), w_k\rangle\\ &(3) & d_m^k(0) &= \langle g, w_k\rangle, \quad k = 1,\ldots,m\\ &(4) & \partial_t d_m^k(0) &= \langle h, w_k\rangle, \quad k = 1,\ldots,m. \end{aligned}$$

Damit erfüllt u^m die Projektion des Cauchy-Problems auf die lineare Hülle von $\{w_1,\ldots,w_m\}$.

Nun zeigen wir zuerst, dass dieses System eindeutig lösbar ist (Lemma 7.45 unten). Anschließend zeigen wir eine Energieabschätzung (Satz 7.46 unten. Daraus schließen wir in Satz 7.47, dass die Folge (u_m) eine schwach konvergente Teilfolge hat und überzeugen uns, dass der Grenzwert die Aufgabe löst.

7.45. Lemma. *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ hat das System* 7.44(2), (3), (4) *eine eindeutige Lösung.*

Beweis. Ableiten von (1) liefert

$$\langle \partial_t^2 u(t), w_k\rangle = \partial_t^2 d_m^k(t).$$

Wir schreiben

$$e_l^k = B(w_l, w_k; t), \quad k, l = 1, \ldots, m.$$

Dann gilt

$$B(u_m, w_l; t) = \sum_{l=1}^m e_l^k d_m^l.$$

Um (1) zu erfüllen, lösen wir die inhomogen lineare Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \partial_t^2 d_m^k + \sum e_l^k d_m^l &= \langle f, w_k \rangle \\ d_k^m(0) &= \langle g, w_k \rangle \\ \partial_t d_m^k(0) &= \langle h, w_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit der e_k^l ist dies nach Picard-Lindelöf auf ganz $[0, T]$ möglich und liefert C^2-Funktionen $d_m^1, \ldots, d_m^m$. ◁

7.46. Satz: Energieabschätzungen. Es existiert eine Konstante C, die nur von Ω, T und den Koeffizienten von L abhängt, so dass gilt

$$\begin{aligned} &\max_{0 \le t \le T} \left(\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\partial_t u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|\partial_t^2 u_m\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \\ &\le \; C \left(\|f\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|g\|_{H_0^1(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad m = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Der *Beweis* ist eine längere Abschätzung, s. Evans, 7.2.2, Theorem 2. ◁

7.47. Satz: Existenz schwacher Lösungen. Das Cauchy-Dirichlet-Problem für L hat eine schwache Lösung.

Beweis. Schritt 1. Aus den Energieabschätzungen folgt, dass die Folge (u_m) in $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ beschränkt ist, dass die Folge $(\partial_t u_m)$ in $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ beschränkt ist, und dass $(\partial_t^2 u_m)$ in $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ beschränkt ist.

Da beschränkte Folgen in Hilberträumen schwach konvergente Teilfolgen haben, finden wir ein $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ mit $\partial_t u \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ $\partial_t^2 u \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ und eine Teilfolge, o.B.d.A. wieder (u_m), mit

$$\begin{aligned} u_m &\overset{w}{\to} u && \text{schwach in } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \\ \partial_t u_m &\overset{w}{\to} \partial_t u && \text{schwach in } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \\ \partial_t^2 u_m &\overset{w}{\to} \partial_t^2 u && \text{schwach in } L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

Schritt 2. Wir betrachten nun eine Funktion $v \in C^1([0, T], H_0^1(\Omega))$ der Form

$$v(t) = \sum_{k=1}^{N} v^k(t) w_k$$

mit beliebigen $v^k \in C^\infty([0, T]$. Für $m \ge N$ erhalten wir mit partieller Integration:

$$\int_0^T \langle \partial_t^2 u_m(t), v(t) \rangle + B(u_m, v, t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle\, dt. \tag{1}$$

Die schwache Konvergenz zeigt, dass wir zum Grenzwert übergehen können. Folglich

$$\int_0^T \langle \partial_t^2 u(t), v(t) \rangle + B(u, v, t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle\, dt. \tag{2}$$

Nun bilden die Funktionen der obigen Form eine dichte Teilmenge in $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$. Wir schließen, dass

$$\langle \partial_t^2 u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + B(u, v, t) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \quad \text{für fast alle } t.$$

Damit ist die Differentialgleichung $\partial_t^2 u + Lu = f$ im schwachen Sinn erfüllt.

Schritt 3. Wir überprüfen die Anfangsbedingung: Dazu wähle oben zusätzlich v^k) mit $v^k(T) = \partial_t v^k(T) = 0$. Mit Hilfe von partieller Integration in (2) sehen wir, dass

$$\int_0^T \langle u(t), \partial_t^2 v(t)\rangle + B(u,v,t)\,dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\,dt - \langle u(0), \partial_t v(0)\rangle + \langle \partial_t u(0), v(0)\rangle. \tag{3}$$

Ebenso liefert (1)

$$\int_0^T \langle u_m(t), \partial_t^2 v(t)\rangle + B(u_m,v,t)\,dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\,dt - \langle u_m(0), \partial_t v(0)\rangle + \langle \partial_t u_m(0), v(0)\rangle.$$

Da $m \geq N$ ist, ist die rechte Seite nach Konstruktion gleich

$$\int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\,dt - \langle g(0), \partial_t v(0)\rangle + \langle h(0), v(0)\rangle.$$

Für $m \to \infty$ konvergiert die linke Seite gegen die linke Seite von (3). Der Vergleich der beiden Formeln liefert

$$\langle u(0), \partial_t v(0)\rangle - \langle \partial_t u(0), v(0)\rangle = \langle g, \partial_t v(0)\rangle - \langle h, v(0)\rangle.$$

Weil wir durch geeignete Wahl von N und den v^k für $t = 0$ jedes Paar von Elemente von $H_0^1(\Omega)$ beliebig gut approximieren können, schließen wir, dass $u(0) = g$ und $\partial_t u(0) = h$. $\triangleleft$