6. Die Wärmeleitungsgleichung

6.1. Problemstellung auf $\mathbb{R}^n$. Zu einer gegebenen Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ suchen wir die Lösung u der Aufgabe

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty); \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

6.2. Lösung für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir wenden Fouriertransformation in $\mathbb{R}^n$ an:

$$\partial_t \widehat{u}(\xi,t) + |\xi|^2 \widehat{u}(\xi,t) = 0 \qquad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi).$$

Dies ist eine Anfangswertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung; die Lösung ist

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}.$$

Es folgt wegen $(f * g)^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\widehat{g}$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}) \\ &= f * K_t. \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} K_t(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}) = (2\pi)^{-n/2} (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi} e^{-|\xi|^2 t}\, d\xi \\ &\overset{\xi = \eta/\sqrt{2t}}{=} (2\pi)^{-n} (2t)^{-n/2} \int e^{ix\eta/\sqrt{2t}} e^{|\eta|^2/2}\, d\eta = (4\pi t)^{-n/2} e^{y^2/2}_{|y = x/\sqrt{2t}} \\ &= (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hence: Die Funktion $K = K(t,x) = K_t(x)$ heißt *Gauß-Kern* oder *Wärmeleitungskern*.

6.3. Lemma.

(a) $K_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} K_1(t^{-\frac{1}{2}} x)$.

(b) $\int K_t(x)\, dx = 1 \qquad \forall t > 0$.

Beweis.

(a) folgt sofort aus 6.2 (1).

(b) $\int K_t(x)\, dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{K_t(0)} = e^{-|\xi|^2 t}|_{\xi=0} = 1.$ ◁

6.4. Satz. *Es sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$. Dann löst die Funktion*

$$u(x,t) = (f * K_t)(x)$$

die Gleichung $\partial_t u - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

(a) *Ist f stetig und beschränkt, so ist u auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ stetig fortsetzbar durch $u(x,0) = f$.*

(b) *Ist $f \in L^p$ für ein $p < \infty$, so konvergiert die Funktion*

$$u_t(x) = u(x,t)$$

gegen f für $t \longrightarrow 0^+$ in L^p.

(c) *Ist f stetig und $f(x) \le C \exp(|x|^2/4T)$, so existiert die Faltung $f * K_t$ ebenfalls für $0 < t < T$ und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung. Für $t \to 0$ gilt*

$$f * K_t \to f$$

auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (a), (b) Da $K_t \in L^1$ ist, ist $f * K_t \in L^p$ nach Young. Ferner ist

$$(\partial_t - \Delta)(f * K_t) = f * ((\partial_t - \Delta)K_t) = 0 \tag{1}$$

da $(\partial_t + |\xi|^2)\widehat{K_t}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\partial_t + |\xi|^2)e^{-t|\xi|^2} = 0$.

Den Rest beweist man analog zum Beweis von 5.37, wobei man benutzt, dass $\int K_t\,dx = 1$ und dass für jedes $\delta > 0$ die Funktion $x \mapsto K_t(x)$ für $t \to 0^+$ auf $\{x : |x| \geq \delta\}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

Im Detail: Nach 6.3(a) und dem Transformationssatz ist

$$\begin{aligned} u(t,x) = (f * K_t)(x) &= \int f(y)\ t^{-n/2} K_1\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) dy \\ &= \int f(x - \sqrt{t}z) K_1(z)\,dz \end{aligned} \tag{2}$$

Insbesondere ist also wegen 6.3(b)

$$(f * K_t)(x) - f(x) = \int \Big(f(x - \sqrt{t}z) - f(x)\Big) K_1(z)\,dz. \tag{3}$$

(a) Ist f stetig und beschränkt, so folgt wegen $\int K_1\,dz = 1$ und $K_1 > 0$ für jedes x:

$$|u(t,x) - f(x)| \leq \sup\{|f(x + \sqrt{t}z) - f(x)|\},$$

und die rechte Seite geht gegen Null, falls $t \to 0$ und x über eine kompakte Menge variiert (gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen auf kompakten Mengen). Damit ist f eine stetige Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$.

(b) Für $f \in L_p$ gilt

$$\begin{aligned} \|u(t,x) - f(x)\|_{L^p} &= \left\| \int (f(x - \sqrt{t}z) - f(x))K_1(z)\,dz \right\|_{L^p} \\ &\overset{Minkowski}{\leq} \int \|f(\cdot - \sqrt{t}z) - f(\cdot)\|_{L^p} K_1(z)\,dz. \end{aligned}$$

Da $\|f(\cdot - \sqrt{t}z) - f(\cdot)\|_{L^p} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow 0$ (Stetigkeit im p-ten Mittel, $p < \infty$) und durch $2\|f\|_{L^p}$ abschätzbar ist, liefert der Satz von der dominierten Konvergenz, dass die rechte Seite für $t \to 0$ gegen 0 konvergiert.

(c) Für $0 < t < T$ ist der Integrand im Faltungsintegral eine L^1-Funktion, daher existiert das Integral. Wir können unter dem Integral differenzieren und sehen, dass $f * K_t$ die Wärmeleitungsgleichung löst. Ferner gilt

$$\begin{aligned} (f * K_t)(x) - f(x) &= (4\pi t)^{-n/2} \int (f(y) - f(x)) \exp(-|x-y|^2/4t)\,dy \\ &\overset{z=(x-y)/2\sqrt{t}}{=} \pi^{-n/2} \int (f(x - 2z\sqrt{t}) - f(x)) \exp(-|z|^2)\,dz \\ &\overset{t\to 0}{\to} 0, \end{aligned}$$

nach dem Satz von der dominierten Konvergenz, gleichmäßig für x in kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, da dann

$$\begin{aligned} |f(x + 2z\sqrt{t})| &\leq \exp((C + 2|z|\sqrt{t})^2/4T) \\ &\leq C' \exp((Cz\sqrt{t} + |z|^2 t)/T) \\ &\leq C'' \exp(c|z|^2), \quad \text{falls } |z| \text{ groß}, \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten C, C', C'', abhängig von x, und $c < 1$. ◁

6.5. Lemma. *Unter obigen Annahmen ist die Lösung $u = u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung $\mathcal{C}^\infty$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Da $K_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ ist, überträgt sich dies bei Faltung auf u. $\lhd$

Eindeutigkeit.

6.6. Satz. *Es sei u stetig auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und $\mathcal{C}^2$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.*
Ferner gelte

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq Ce^{\varepsilon|x|^2} \\ |\nabla_x u(x,t)| &\leq Ce^{\varepsilon|x|^2}, \end{aligned}$$

so ist $u \equiv 0$.

Beweis. Sind f, g $\mathcal{C}^2$-Funktion auf einem Gebiet in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, so gilt

$$g(\partial_t f - \Delta f) + f(\partial_t g + \Delta g) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(f\partial_{x_j} g - g\partial_{x_j} f) + \partial_t(fg) = \operatorname{div} F,$$

wobei $F = (f\partial_{x_1} g - g\partial_{x_1} f, \ldots, f\partial_{x_n} g - g\partial_{x_n} f, fg)$.
Wir fixieren $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 > 0$ und wählen

$$f(x,t) = u(x,t); \quad g(x,t) := K(x - x_0, t_0 - t) := K_{t_0 - t}(x - x_0)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t f - \Delta f &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t g - \Delta g &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, t_0). \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Satz von Gauß an auf das Gebiet

$$\Omega = \{(x,t) : |x| < r, a < t < b\}, 0 < a < b < t_0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \\ &= \int_{|x| \leq r} u(x,b) K(x - x_0, t_0 - b)\, dx \quad \text{(denn hier sieht der Normalenvektor nur \ldots} \\ (1) \qquad &- \int_{|x| \leq r} u(x,a) K(x - x_0, t_0 - a)\, dx \quad \text{\ldots die } n - \text{Richtung, einmal } +, \text{ einmal } - \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_a^b \int_{|x|=r} (u(x,t)\partial_{x_j} K(x,t) - \partial_{x_j} u(x,t) K(x,t)) \frac{x_j}{r}\, d\sigma(x) dt. \end{aligned}$$

Nun lassen wir $r \longrightarrow \infty$ gehen. Auf Grund unserer Annahmen an u geht das letzte Integral gegen Null. Da zudem K eine gerade Funktion von x ist, sind die ersten beiden Integrale Faltungen. Die obige Gleichung (1) liefert also im Grenzwert $r \to \infty$

$$0 = (u(\cdot, b) * K_{t_0 - b})(x_0) - (u(\cdot, a) * K_{t_0 - a})(x_0) + 0$$

Nun gilt für $b \longrightarrow t_0$ nach 6.4(c), dass $u(\cdot, b) \longrightarrow u(\cdot, t_0)$. Also

$$(u(\cdot, b) * K_{t_0 - b})(x_0) \stackrel{b \to t_0}{\longrightarrow} u(x_0, t_0).$$

Für $a \to 0$ gilt ebenso

$$(u(\cdot,a) * K_{t_0-a})(x_0) \xrightarrow{a\to 0} (\underbrace{u(\cdot,0)}_{0} * K_{t_0})(x_0) = 0.$$

Somit erhalten wir $u(x_0,t_0) = 0$. $\triangleleft$

6.7. Bemerkung. Ohne Wachstumsbedingung an u erhält man im Allgemeinen keine Eindeutigkeit der Lösung.

6.8. Definition. Wir setzen

$$K(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Klar: Wegen $\int |K(x,t)|\, dx = 1$ ist K lokal integrierbar.

6.9. Satz. *K ist eine Fundamentallösung für den Wärmeleitungsoperator.*

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ setze

$$K_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} K_t(x), & t > \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt $K_\varepsilon \to K$ im Distributionensinn auf $\mathbb{R}^{n+1}_+$ nach dem Satz von der dominierten Konvergenz. Wir sind fertig, wenn wir zeigen, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt

$$\langle K_\varepsilon, (-\partial_t - \Delta_x)\varphi\rangle \to \varphi(0,0), \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \langle K_\varepsilon, (-\partial_t - \Delta_x)\varphi\rangle &= \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)(-\partial_t - \Delta_x)\varphi(x,t)\, dx\, dt \\ &\overset{\text{part.Int.}}{=} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t - \Delta_x)K(x,t)\varphi(x,t)\, dx\, dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} K(x,\varepsilon)\varphi(x,t)\, dx \\ &= 0 + \int_{\mathbb{R}^n} K(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\, dx. \end{aligned}$$

Da K in x symmetrisch ist, können wir auch $K(x,t)$ durch $K(-x,\varepsilon)$ ersetzen. Dann stellt das letzte Integral jedoch gerade eine Faltung dar, nämlich $(K_\varepsilon * \varphi(\cdot,\varepsilon))(0)$. Nun ist

$$(K_\varepsilon * \varphi(\cdot,\varepsilon))(0) = (K_\varepsilon * \varphi(\cdot,0))(0) + (K_\varepsilon * (\varphi(\cdot,\varepsilon) - \varphi(\cdot,0))(0).$$

Nach Satz 6.4 konvergiert der erste Term rechts gegen $\varphi(0,0)$, während der zweite nach der Youngschen Ungleichung gegen 0 konvergiert:

$$\|K_\varepsilon * (\varphi(\cdot,\varepsilon) - \varphi(\cdot,0))\|_\infty \leq \|K_\varepsilon\|_1 \|\varphi(\cdot,\varepsilon) - \varphi(\cdot,0)\|_\infty \to 0.$$

(Hier benutzen wir die gleichmäßige Stetigkeit von φ und die Tatsachen, dass $K_\varepsilon \geq 0$ und $\int K_\varepsilon dx = 1$.) $\triangleleft$

6.10. Folgerung. *Der Wärmeleitungsoperator ist hypoelliptisch nach 3.41, da $K \in \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\})$.*

6.11. Satz. *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, so ist $u = f * K$ fast überall definiert und liefert eine Distributionslösung von $(\partial_t - \Delta)u = f$.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{t} \int f(y,s) K(x-y, t-s)\, dy\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} (f(\cdot,s) * K(\cdot, t-s))(x)\, ds \end{aligned}$$

mit der Faltung auf $\mathbb{R}^n$. Nun ist $f(\cdot,s) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für fast alle s und $\int \|f(\cdot,s)\|_1\, ds < \infty$. Ferner ist $\int K_{t-s} dx = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} \sup_t \int |u(x,t)|\, dx &\leq \sup_t \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} (|f(\cdot,s)| * K(\cdot, t-s))(x)\, dx\, ds \\ &= \sup_t \int_{-\infty}^{t} \| \, |f(\cdot,s)| * K(\cdot, t-s))\|_1\, ds \\ &\leq \sup_t \int_{-\infty}^{t} \|f(\cdot,s)\|_1 \cdot 1\, ds = \|f\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Daher ist $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$; insbesondere existiert das obige Integral für fast alle (x,t).

Nun folgt wie in 4.22, dass $(\partial_t u - \Delta u) = f$.

Die Wärmeleitungsgleichung in einem beschränkten Gebiet.

6.12. Die Situation.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	beschränktes Gebiet
$0 \leq t \leq T \leq \infty$	Zeitintervall
$u(x,0) = u_0$	Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$
$u(x,t) = g$	(Vorgabe der Temperatur am Rand),
$\partial_\nu u(x,t) = 0$	(isoliert) oder
$\partial_\nu u + c(u-g) = 0$	(Newtonsches Abkühlungsgesetz).

6.13. Maximumsprinzip für Wärmeleitungsgleichung. Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, $0 < T < \infty, u : \overline{\Omega} \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Auf $\Omega \times (0,T)$ erfülle u die Wärmeleitungsgleichung (ist damit also C^∞). Dann nimmt u sein Maximum auf $\Omega \times \{0\}$ oder $\partial\Omega \times [0,T]$ an.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $v_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon |x|^2$. Dann ist

(1) $$\partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon = -2n\varepsilon.$$

Wähle $0 < T' < T$.

(1) Annahme: v_ε hat ein Maximum im Inneren von $\overline{\Omega} \times [0,T']$ in (x_0,t_0).
Dann ist $\nabla_{x,t} v_\varepsilon(x_0,t_0) = 0$, also insbesondere $\partial_t v_\varepsilon(x_0,t_0) = 0$. Weil die Hesse-Matrix keine positiven Eigenwerte hat, ist ihre Spur ≤ 0, also

$$\Delta v_\varepsilon(x_0,t_0) = \sum \partial^2_{x_j} v_\varepsilon(x_0,t_0) = \operatorname{Tr} \operatorname{Hess} u_\varepsilon(x_0,t_0) \leq 0.$$

Somit ist $(\partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon)(x_0,t_0) \geq 0$ im Widerspruch zu (1).

(2) Annahme: v_ε hat ein Maximum auf $\Omega \times \{T'\}$ in (x_0,t_0).
Dann ist $\partial_t v_\varepsilon(x_0,t_0) \geq 0$ und $\sum \partial^2_{x_j} v_\varepsilon(x_0,t_0) \leq 0$. Wiederum ist $(\partial_t - \Delta) v_\varepsilon(x_0,t_0) \geq 0$ im Widerspruch zu (1).

Es folgt:

$$\begin{aligned}\max_{\overline{\Omega}\times[0,T']} u &\leq \max_{\overline{\Omega}\times[0,T']} v_\varepsilon \overset{(1),(2)}{=} \max_{(\Omega\times\{0\})\cup(\partial\Omega\times[0,T'])} v_\varepsilon \\ &\leq \max_{(\Omega\times\{0\})\cup(\partial\Omega\times[0,T'])} u + \varepsilon \max_{\overline{\Omega}} \|x\|^2\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \longrightarrow 0$ und $T' \longrightarrow T$ folgt die Behauptung. $\triangleleft$

6.14. Folgerung. *Die Aufgabe*

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)u &= 0 \textit{ in } \Omega \times (0,T) \\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]} &= g|_{\partial\Omega\times[0,T]} \\ u|_{\Omega\times\{0\}} &= g|_{\Omega\times\{0\}}\end{aligned}$$

hat für eine stetige Funktion $g : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{C}$ höchstens eine stetige Lösung u.

6.15. Das Cauchy-Dirichlet-Problem. Für $f \in H_0^1(\Omega)$ betrachten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x) && \text{in } \Omega \times \{0\} \\ u(x,t) &= 0 && \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty)\end{aligned}$$

Wir machen folgenden Ansatz für Lösung:

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Dann gilt

$$0 = \partial_t u - \Delta u = FG' - (\Delta F)G.$$

somit

$$\underbrace{\frac{G'}{G}}_{\text{nur von } t \text{ abh.}} = \underbrace{\frac{\Delta F}{F}}_{\text{nur von } x \text{ abh}} =: \lambda$$

Angenommen, wir finden eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$ von Funktionen $\{f_j\} \in H^2(\Omega)$ mit

$$\Delta f_j = \lambda_j f_j, \qquad f_j = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad \text{mit } \lambda_j < 0.$$

Dann lösen wir die Aufgabe wie folgt:

Wir entwickeln f nach den Eigenfunktionen f_j

$$f = \sum c_j f_j \qquad c_j = \langle f, f_j \rangle$$

und setzen

$$u(x,t) = \sum c_j f_j(x) e^{\lambda_j t} \tag{1}$$

Dann gilt:

(a) Die Fourierkoeffizienten c_j liegen in ℓ^2. Die Summe für u konvergiert daher in $L^2(\Omega\times(0,T))$ für jedes T insbesondere also auch im Distributionssinn. Jede endliche Teilsumme erfüllt die Wärmeleitungsgleichung in $\Omega \times (0,\infty)$, somit nach Satz 4.20 auch u. Nun ist der Wärmeleitungsoperator hypoelliptisch; somit ist u dort insbesondere eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion.

(b) Da $f \in H_0^1(\Omega)$, gilt sogar $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dazu machen wir folgende Beobachtung:

Die Funktionen f_j bilden auch eine OrthoGONALbasis für H_0^1, denn

$$\begin{aligned}\langle f_j, f_k\rangle_{H^1} &= \langle f_j, f_k\rangle_{L^2} + \langle \nabla f_j, \overline{\nabla f_k}\rangle_{L^2}\\ &\overset{=0 \text{ on } \partial\Omega}{=} \delta_{jk} - \int \Delta f_j \overline{f_k} dx\\ &= \delta_{jk} - \lambda_j \delta_{jk} = (1-\lambda_j)\delta_{jk}.\end{aligned}$$

Ist ferner $g \perp f_j$ für jedes j in H_0^1, so ist

$$0 = \langle f_j, g\rangle + \langle \nabla f_j, \nabla g\rangle \overset{\text{p.Int}}{=} \langle f_j, g\rangle - \lambda_j \int f_j \overline{g} dx = (1-\lambda_j)\langle f_j, g\rangle_{L^2}.$$

Daher steht g auch bezüglich des L^2-Skalarprodukts auf allen f_j senkrecht, ist also notwendig 0.

Mit $F_j = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_j}} f_j$ finden wir also eine ONB von $H_0^1(\Omega)$. Dann ist

$$u = \sum_j \langle f, f_j\rangle f_j e^{\lambda_j t} = \sum_j \langle f, F_j\rangle F_j (1-\lambda_j) e^{\lambda_j t}.$$

Diese Summe konvergiert sogar in $H^1(\Omega \times (\varepsilon, T))$ für jedes $\varepsilon > 0$, denn erstens ist $\sum_j \langle f, F_j\rangle F_j$ die Fourierentwicklung von f in H_0^1, so dass die Differenzierbarkeit bzgl. der x-Variablen gesichert ist, und zweitens ist für $\varepsilon \leq t \leq T$ sowohl die Folge $(1-\lambda_j)e^{\lambda_j t}$ als auch die Folge $(1-\lambda_j)\lambda_j e^{\lambda_j t}$ beschränkt, was die Differenzierbarkeit nach t liefert.

Damit liegt u in H^1; Auswertung am Rand liefert

$$u|_{\partial\Omega} = \sum_j \langle f, F_j\rangle F_j|_{\partial\Omega} (1-\lambda_j) e^{\lambda_j t} = 0.$$

Nun zu dem fehlenden Beweisteil:

6.16. Satz. *Es sei Ω glatt berandet und beschränkt. Dann existiert eine Orthonormalbasis von Eigenfunktionen zu der Aufgabe:*

$$\Delta u = \lambda u \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Die Folge der Eigenwerte erfüllt

$$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \longrightarrow -\infty$$

Beweisidee: Die Negativität der Eigenwerte folgt, weil für die zugehörigen Eigenfunktionen f_j gilt:

$$\lambda_j = \langle \Delta f_j, f_j\rangle = \int \Delta f_j \overline{f}_j = -\int \nabla f_j \overline{\nabla f_j} \leq 0.$$

Nun gilt: Der Operator $\Delta : H_0^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ ist bijektiv und selbstadjungiert als unbeschränkter Operator auf $L^2(\Omega)$. Dabei ist

$$H_0^2 = \{u \in L^2 : u \text{ zweimal im distr. Sinn diffbar mit allen Ableitungen in } L^2; u|_{\partial_\Omega} = 0\}$$

(Klar sind die Injektivität (wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Dirichletproblems) und die Symmetrie).

Andererseits ist die Einbettung $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt. Somit ist

$$\Delta^{-1} : L^2 \longrightarrow H_0^2 \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ kompakt und selbstadjungiert.}$$

Damit hat Δ^{-1} eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren mit Eigenwerten $\mu_j \to 0$, und Δ die entsprechenden Eigenfunktionen zu Eigenwerten $\lambda_j = \mu_j^{-1}$. $\triangleleft$

6.17. Bemerkung. Analog für Cauchy-Neumannproblem.

6.18. Satz. *Nun sei $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ und der Operator L definiert durch*

$$Lu = -\sum_{jk} \partial_{x_j}(a^{jk}(x,t)\partial_{x_k}u) + \sum_j b^j(x,t)\partial_{x_j}u + c(x,t)u.$$

mit $a^{jk}, b^j, c \in C([0,T], L^\infty(\Omega))$. Dabei gelte zusätzlich

(i) $a^{jk} = a^{kj}$

(ii) *Für ein $\delta > 0$ ist $\sum_{jk} a^{jk}\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2$*

Dann hat für jede Wahl von Daten $f \in C([0,T], L^2(\Omega))$ und $g \in L^2(\Omega)$ das Cauchy-Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u + Lu &= f \quad \text{in } \Omega_T; \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T); \\ u &= g \quad \text{auf } \Omega \times \{t=0\} \end{aligned}$$

eine eindeutige Distributions- (oder schwache) Lösung.

Bemerkung. Dass u die Gleichung im Distributionssinn löst (oder eine schwache Lösung ist), heißt, dass $u \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega))$ (als distributionelle Ableitung) und dass für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt

(i) $\langle \partial_t u(t,\cdot), v\rangle + B(u,v;t) = \langle f(t,\cdot), v\rangle$ fast überall auf $[0,T]$.

(ii) $u(0,\cdot) = g$

Beweisidee, mehr Details bei Evans, S.353ff (Galerkinverfahren). Wir definieren eine zeitabhängige Bilinearform B auf $H^1(\Omega)$ durch

$$B(u,v;t) = \int_\Omega \sum_{jk} a^{jk}\partial_{x_k}u\partial_{x_j}v\,dx + \int_\Omega b^k\partial_{x_k}uv\,dx + \int_\Omega cuv\,dx.$$

Nun wählen wir eine Orthonormalbasis $\{w_k\}$ von $L^2(\Omega)$, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis für $H_0^1(\Omega)$ ist (z.B. können wir eine Onrthonormalbasis aus Eigenwerten des Dirichletproblems wählen. Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ gehen wir nun wie folgt vor: Wir machen den Ansatz

$$u^m(t) = \sum_{k=1}^m d_k^m(t)w_k.$$

Dabei seien die Koeffizienten $d_k^m(t)$ so gewählt, dass

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \langle \partial_t u^m(t), w_k\rangle + B(u^m, w_k; t) &&= \langle f(\cdot,t), w_k\rangle \\ &(2) \qquad d_k^m(0) &&= \langle g, w_k\rangle, \quad k = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

Damit erfüllt u^m die Projektion des Cauchy-Problems auf die lineare Hülle von $\{w_1,\dots,w_m\}$.

Wie erhält man u^m? Wir schreiben

$$e_k^l = B(w_l, w_k; t), \quad k,l = 1,\dots,m.$$

Dann gilt

$$B(u^m, w_l; t) = \sum_{l=1}^m e_k^l d_l^m.$$

Um (1) zu erfüllen, lösen wir das inhomogen lineare System von Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} \partial_t d_k^m + \sum e_k^l d_l^m &= \langle f, w_k\rangle \\ d_k^m(0) &= \langle g, w_k\rangle, \quad k = 1,\dots,m \end{aligned}$$

Da die Funktionen e_k^l und $\langle f(\cdot,t), w_k\rangle$ stetig von t abhängen und das System linear ist (und daher eine Lipschitzbedingung erfüllt), erhalten wir ein auf ganz $[0,T]$ definierte eindeutige Lösung.

In einem nächsten Schritt zeigt man (mit längerer Rechnung) die sogenannte Energie-Abschätzung

Satz (Evans, Theorem 7.1.2)

$$\begin{aligned} &\max_{0\le t\le T} \|u^m\|_{L^2(\Omega)} + \|u^m\|_{L^2((0,T),H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t u^m\|_{L^2((0,T),H^{-1}(\Omega))} \\ \le \quad & C\left(\|f\|_{L^2((0,T),L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Damit ist die Folge (u^m) beschränkt in dem Hilbertraum $L^2((0,T),H_0^1(\Omega))$, und $(\partial_t u_m)$ ist beschränkt in $L^2((0,T),H^{-1}(\Omega))$. Die Folgen (u^m) und $\partial_t u^m$ haben also (Funktionalanalysis) schwach konvergente Teilfolgen (oBdA die Folgen selbst), d.h. es gibt ein $u \in L^2((0,t),H_0^1(\Omega))$ mit

$$\begin{aligned} u^m &\rightharpoonup u \text{ schwach in } L^2((0,T),H_0^1(\Omega)) \\ \partial_t u^m &\rightharpoonup \partial_t u \text{ schwach in } L^2((0,T),H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

Aus den Energieabschätzungen sieht man sofort, dass die Lösung, sofern sie existiert, eindeutig ist.

Man zeigt noch: u löst die Gleichung im Distributionssinn. Dazu benutzt man u.a. den unten stehenden Satz 6.19.

6.19. Satz. *Für jedes m sei $u_m \in L^2((0,T),H_0^1(\Omega))$ im Distributionensinn nach t differenzierbar, und es sei (u_m) schwach konvergent gegen u in $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ und $(\partial_t u_m)$ schwach konvergent gegen v in $L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$. Dann ist u im Distributionensinn differenzierbar und $\partial_t u = v$.*

Bemerkung. Eine Funktion $u \in L^1(0,T,X)$, X Banachraum, heißt im Distributionensinn differenzierbar (oder schwach differenzierbar) nach $t \in (0,T)$, falls ein $v \in L^1(0,T,X)$ existiert mit

$$\int_0^T u(t)\partial_t\varphi(t)\,dt = -\int_0^T v(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in C_c^\infty(0,T).$$

Man nennt v die (schwache) Ableitung von u.

Beweis. Wähle $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$ und $w \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt wegen der L^2-Konvergenz:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u(t), \partial_t\varphi(t)w\rangle\,dt &= \lim \int_0^T \langle u_m(t), \partial_t\varphi(t)w\rangle\,dt \\ &= -\lim \int_0^T \langle \partial_t u_m(t), \varphi(t)w\rangle\,dt = -\int_0^T \langle \partial_t u(t), \varphi(t)w\rangle\,dt. \end{aligned}$$

Da dies für jedes $w \in H_0^1(\Omega)$ gilt, folgt

$$\int_0^T u(t)\partial_t\varphi(t)\,dt = -\int_0^T v(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in C_c^\infty(0,T)$$

und somit $v = \partial_t u$. $\triangleleft$