5. Das Dirichletproblem und das Neumannproblem

Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand.

5.1. Definition. Das Dirichlet-Problem.

Gegeben sei eine Funktion f auf Ω und eine Funktion g auf $\partial\Omega$; gesucht ist eine Funktion u auf $\overline{\Omega}$ mit

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = g.$$

Das Neumann-Problem. Gegeben ist eine Funktion f auf Ω und eine Funktion g auf $\partial\Omega$. Gesucht ist eine Funktion u auf $\overline{\Omega}$ mit

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \qquad \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = g.$$

(Dies ist eine rein formale Definition ohne Glattheitsannahmen)

5.2. Bemerkung.

(a) Wenn das Dirichlet-Problem eine Lösung hat und diese in $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ ist, so ist sie eindeutig nach dem Identitätssatz (beachte: $\overline{\Omega}$ ist kompakt.

(b) Ist u eine Lösung des Neumann-Problems, so auch $u + c$ für jedes $c \in \mathbb{C}$.

(c) Ist $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Neumannproblems, so ist $\int_\Omega f = \int_{\partial\Omega} g$ nach 4.5, d.h. das Neumannproblem ist keinesfalls für beliebige f, g lösbar.

5.3. Bemerkung.

(a) Die Lösung des Dirichletproblems lässt sich auf die Lösung zweier semihomogener Dirichletprobleme zurückführen: Es genügt offensichtlich, folgende beiden Aufgaben zu lösen:

$$\Delta v = f \text{ auf } \Omega \quad \text{und } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega; \tag{1}$$

$$\Delta w = 0 \text{ auf } \Omega \quad \text{und } w = g \text{ auf } \partial\Omega. \tag{2}$$

(b) Die Lösung der Aufgaben (1) und (2) ist weitgehend äquivalent. Exemplarisch machen wir dazu folgende Bemerkungen:

(i) Können wir (1) lösen für jedes $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, so können wir (2) lösen für jedes g, das Einschränkung einer Funktion $\tilde{g} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ ist:
Löse dazu:

$$\Delta v = \Delta\tilde{g} \text{ auf } \Omega; \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Setze $u := \tilde{g} - v$. Dann ist $\Delta u = \Delta\tilde{g} - \Delta v = 0, u|_{\partial\Omega} = \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g$.

(ii) Umgekehrt sei $\overline{\Omega}$ kompakt und (2) lösbar für jedes stetige g. Ist dann $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ gegeben, so können wir f zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}$ mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen. Wir setzen $v' = \tilde{f} * N$. Dies ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, und es gilt nach 4.22, dass $\Delta v' = \tilde{f}$.
Wir lösen nun

$$\Delta w = 0 \text{ auf } \Omega \qquad w = v' \text{ auf } \partial\Omega.$$

Mit $v := v' - w$ erhalten wir eine Lösung von (1).

(c) Die Lösung des Neumannproblems reduziert sich auf die Lösung der homogenen Probleme

$$\Delta v = f \text{ auf } \Omega \qquad \partial_\nu v = 0 \text{ auf } \partial\Omega; \tag{3}$$

$$\Delta w = 0 \text{ auf } \Omega \qquad \partial_\nu w = g \text{ auf } \partial\Omega. \tag{4}$$

(d) Wiederum ist die Lösbarkeit von (3) in etwa äquivalent zu der von (4). Exemplarisch dazu:

(i) Können wir (3) für jedes $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ lösen, so auch (4) für jedes g, für das wir ein $\widetilde{g} \in C^2(\overline{\Omega})$ finden mit $\partial_\nu \widetilde{g} = g$ auf $\partial\Omega$. Wir lösen

$$\Delta v = \Delta \widetilde{g} \text{ auf } \Omega, \qquad \partial_\nu v = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

und setzen $w = \widetilde{g} - v$. Dies löst (4).

(ii) Umgekehrt sei $\overline{\Omega}$ kompakt und (4) lösbar für jedes $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Ist dann $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, so wählen wir eine Fortsetzung zu einer $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$-Funktion $\widetilde{f}$ und setzen $v' = N * \widetilde{f}$. Nun lösen wir

$$\Delta w = 0 \text{ auf } \Omega; \quad \partial_\nu w = \partial_\nu v' \text{ auf } \partial\Omega$$

und setzen $v = v' - w$. Dies löst (3).

Abstrakte Lösung des Dirichletproblems. Ω sei offen und beschränkt mit glattem Rand.

5.4. Definition. Wir definieren auf $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ eine Sesquilinearform D durch

$$D(u,v) = \int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}\, dx.$$

$D(u,v)$ heißt *Dirichlet-Integral* von u.
Physikalisch: $D(u,v)$ ist potentielle Energie des Feldes $-\nabla u$.

5.5. Lemma.

(a) *$u \mapsto D(u,u)^{\frac{1}{2}}$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.*

(b) *$D(u,u) = 0 \iff u$ konstant auf jeder Komponente.*

Beweis. *Klar.*

5.6. Definition. $H^1(\Omega) :=$ Vervollständigung von $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ bzgl. der Norm

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + D(u,u)\right)^{1/2}.$$

5.7. Bemerkung.

(a) Allgemeiner kann man definieren:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}' : (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2\} \text{ mit } \|u\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2}$$

und

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega : u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Da Ω beschränkt ist und glattem Rand hat, stimmen beide Definitionen überein. Allgemein ist $H^s(\Omega)$ für $s \in \mathbb{N}$ der Raum aller Funktionen aus $L^2(\Omega)$, deren distributionelle Ableitungen bis zur Ordnung s in L^2 sind.

(b) $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{H^1} = \int u\overline{v}\, dx + D(u,v).$$

5.8. Satz. *Es gibt ein $C > 0$ derart, dass*

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2\, d\sigma \le C\, \|u\|_{H^1}^2 \qquad u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

Beweis. Wir setzen das Einheitsnormalenfeld ν von $\partial\Omega$ fort zu einem glatten Vektorfeld auf $\overline{\Omega}$. Nach Gauß-Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u|^2\, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \langle |u|^2\nu, \nu\rangle\, d\sigma \overset{\text{Gauß}}{=} \sum_1^n \int_\Omega \partial_{x_j}(|u|^2\nu_j) \\ &\le \sum_1^n \int_\Omega \left[|u(\partial_{x_j}\bar{u})\nu_j| + |(\partial_{x_j}u)\bar{u}\nu_j| + |u|^2|\partial_{x_j}\nu_j|\right].\end{aligned}$$

Setzt man $C' = \sup \sum \left(|\nu_j| + |\partial_{x_j}\nu_j|\right)$, so folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u|^2\, d\sigma &\le C' \sum \int_\Omega \left[|u\partial_{x_j}\bar{u}| + |\bar{u}\partial_{x_j}u| + |u|^2\right] \\ &\overset{C.S.}{\le} C'\ (2\sum \|u\|_{L^2}\|\partial_{x_j}u\|_{L^2} + n\|u\|_{L^2}^2) \\ 2ab \le a^2+b^2 \longrightarrow \quad &\le C' \left(\sum(\|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_{x_j}u\|_{L^2}^2) + n\|u\|_{L^2}^2\right) \\ &\le C' \left(2n\|u\|_{L^2}^2 + D(u,u)\right).\end{aligned}$$

$\lhd$

5.9. Folgerung. *Die Restriktionsabbildung $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ lässt sich stetig fortsetzen zu einer Abbildung $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$.*

5.10. Bemerkung. Die ‘richtige’ (und nicht viel schwieriger zu beweisende) Version dieses Satzes ist:

Ist Ω beschränkt mit glattem Rand, so definiert die Einschränkung auf den Rand eine surjektive stetige lineare Abbildung

$$\gamma_0 : u \mapsto u|_{\partial\Omega} : H^s(\Omega) \to H^{s-1/2}(\partial\Omega), \quad s > 1/2.$$

Dabei ist $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ über Karten aus $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ definiert.

Diese Abbildung hat eine stetige Rechtsinverse, d.h. es gibt eine stetige lineare Abbildung

$$K : H^{s-1/2}(\partial\Omega) \to H^s(\Omega)$$

mit $\gamma_0 K = id$.

5.11. Definition. $H_0^1(\Omega) :=$ Abschluss von $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

Bemerkung: Klar: Ist $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, so ist $u|_{\partial\Omega} = 0$. Also gilt $u|_{\partial\Omega} = 0$ auch für $u \in H_0^1(\Omega)$. Umgekehrt gilt ebenso (hier nicht bewiesen): Aus $u \in H^1(\Omega)$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$ folgt $u \in H_0^1(\Omega)$.

5.12. Ausblick. Wir machen uns nun an die Lösung des Dirichletproblems:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = \tilde{g}.$$

Allerdings formulieren wir es um: Wir nehmen an, dass $\tilde{g} = g|_{\partial\Omega}$ für ein $g \in H^1(\Omega)$ (dies heißt bei glattem Rand genau, dass $\tilde{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$). Statt $u|_{\partial\Omega} = \tilde{g}$ verlangen wir, dass

$$u - g \in H_0^1(\Omega).$$

Unsere Aufgabe lautet also: Gegeben $g \in H^1(\Omega)$, finde $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad\qquad u - g \in H_0^1(\Omega).$$

Im Prinzip werden wir also zeigen: Ist $\tilde{g} \in H^{1/2}(\Omega)$, so existiert ein eindeutiges $u \in H^1(\Omega)$ (automatisch sogar $u \in C^\infty$ im Inneren) mit $\Delta u = 0,\ \ u|_{\partial\Omega} = \tilde{g}$. Mit etwas mehr Funktionalanalysis kann man zeigen: Der Operator

$$(\Delta, \gamma_0) : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \oplus H^{1/2}(\Omega)$$

ist ein topologischer Isomorphismus.

5.13. Satz. *Es sei $w \in H^1(\Omega)$. Dann ist w harmonisch genau dann, wenn*

$$D(w,v) = 0 \qquad \textit{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Insbesondere bilden die harmonischen Funktionen einen abgeschlossenen Unterraum von $H^1(\Omega)$.

Beweis. Ist $w \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ und $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, so ist nach Green (4.5(1))

$$0 = \int w \partial_\nu \bar{v}\, d\sigma = \int w\Delta\bar{v} + \nabla w \nabla \bar{v}\, dx$$

also im Distributionssinn

$$\Delta w(\bar{v}) = w(\Delta \bar{v}) = -D(v,w).$$

Ist nun $w \in H^1(\Omega)$ und $(w_k) \subseteq C^2(\overline{\Omega})$ eine Folge mit $w_k \longrightarrow w$ in $H^1(\Omega)$, so folgt zunächst $w_k \longrightarrow w$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und wegen der Stetigkeit von $D : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(\Delta w)(\bar{v}) = w(\Delta\bar{v}) = \lim w_n(\Delta \bar{v}) = \lim D(w_n, v) = D(w,v).$$

Also folgt $\Delta w = 0$ (im distributionellen Sinn) $\iff$ $D(w,v) = 0\ \forall v \in C_0^\infty$ $\iff$ $D(w,v) = 0\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$. Zur letzten Äquivalenz: Für jedes $v \in H_0^1$ ist $w \mapsto D(w,v)$ eine stetige lineare Abbildung von $H^1(\Omega)$ nach $\mathbb{C}$, ihr Kern also abgeschlossen. $\lhd$

5.14. Poincaré-Ungleichung. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, $1 \le p < \infty$.*

(a) **Variante 1.** *Dann existiert eine nur von Ω abhängige Konstante C, so dass für*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \textit{ für alle } u \in H_0^{1,p}(\Omega).$$

Dabei ist $H_0^{1,p}(\Omega)$ der Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in der Norm von $H^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p : \nabla u \in L^p\}$. Insbesondere ist also $H_0^{1,2} = H_0^1$.

(b) **Variante 2.** *Ω habe zusätzlich C^1-Rand. Dann existiert eine Konstante C mit der Eigenschaft, dass für alle $u \in H^{1,p}(\Omega) = \{U_{|\Omega} : U \in H^{1,p}(\mathbb{R}^n)\}$ gilt:*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p} \le C\|\nabla u\|_{L^p}$$

Dabei ist

$$u_\Omega = \frac{1}{vol\,\Omega} \int_\Omega u\, dx$$

der Mittelwert von u über Ω. Hier ist auch $p = \infty$ möglich.

Beweis. (a) Für diesen Beweis langt es sogar, dass Ω in einer Richtung beschränkt ist.

Es sei z.B. $\Omega \subseteq \{|x_1| \le R\}$. Durch partielle Integration erhalten wir für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\|\varphi\|_{L^p}^p = \int_\Omega |\varphi(x)|^p 1\, dx = -\int_\Omega \partial_{x_1}(|\varphi(x)|^p) x_1\, dx$$

$$(1) \qquad \le\ pR \int_\Omega |\partial_{x_1}\varphi(x)||\varphi(x)|^{p-1}\, dx \le pR\, \|\partial_{x_1}\varphi(x)\|_{L^p} \|\, |\varphi(x)|^{p-1}\, \|_{L^{p'}}$$

Nun ist $p' = p/(p-1)$, also

$$\|\, |\varphi(x)|^{p-1}\, \|_{L^{p'}} = \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{(p-1)/p} = \|\varphi\|_{L^p}^{p-1}.$$

Wir erhalten aus (1)

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq pR\,\|\partial_{x_1}\varphi\|_{L^p} \leq pR\|\nabla\varphi\|_{L^p}.$$

Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht ist in $H_0^{1,p}(\Omega)$, folgt die Behauptung.

(b) ohne Beweis. ◁

5.15. Folgerung. *Es sei $u \in H^1(\Omega)$ und $D(u,u) = 0$. Dann ist u lokal konstant. Insbesondere ist u harmonisch.*

Beweis. Da $u \in H^1(\Omega)$ ist, wissen wir: $\nabla u \in L^2$ (∇u Ableitung im distributionellen Sinn), vgl. 5.7. Ist $D(u,u) = 0$, so ist $\nabla u = 0$ in L^2. Aus der Poincaré-Ungleichung 5.14(b) folgt, dass u lokal konstant ist.

◁

5.16. Folgerung. *$H_0^1(\Omega)$ mit $D(\cdot,\cdot)$ als Skalarprodukt ist ein Hilbertraum: Die Definitheit von D folgt aus Lemma 5.15, die Vollständigkeit aus der Poincaré-Ungleichung 5.15(a).*

5.17. Satz. (Dirichlet-Prinzip) *Wir betrachten nun* reellwertige *Funktionen. Es sei Ω offen und beschränkt mit glattem Rand und $g \in H^1(\Omega)$ fest. Folgendes ist äquivalent:*

(i) $\Delta u = 0$ *und* $u - g \in H_0^1(\Omega)$

(ii) $D(u,\varphi) = 0$ *für alle* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *und* $u - g \in H_0^1(\Omega)$

(iii) $D(u,u)$ *ist minimal unter der Nebenbedingung* $u - g \in H_0^1(\Omega)$.

Alle Aufgaben haben eine eindeutige – und zwar dieselbe – Lösung.

Insbesondere ist die Lösung des Dirichlet-Problems die Lösung einer Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingung. $\to$ Variationsrechnung.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt aus Satz 5.13.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sind u_1 und u_2 zwei Kandidaten für Minima, so folgt wegen $u_1 - g \in H_0^1$ und $u_2 - g \in H_0^1$, dass $u_1 - u_2 \in H_0^1$. Nun ist für $\varphi \in H_0^1$

$$D(u+\varphi, u+\varphi) = D(u,u) + 2D(u,\varphi) + D(\varphi,\varphi).$$

Ist $D(u,\varphi) = 0$, so ist $D(u,u)$ offensichtlich minimal.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Analog zu oben ist für jedes feste $\varphi \in H_0^1$ und $-1 < t < 1$:

$$D(u,u) \leq D(u+t\varphi, u+t\varphi) = D(u,u) + 2tD(u,\varphi) + t^2 D(\varphi,\varphi),$$

d.h. die Funktion hat in $t = 0$ ein Minimum. Ableiten nach t liefert $D(u,\varphi) = 0$.

Zur Lösbarkeit: Setze $v = u - g \in H_0^1$. Dann ist (wegen $u = g + v$)

$$D(u,u) = D(v,v) + 2D(g,v) + D(g,g).$$

und die Aufgabe, $D(u,u)$ unter der Nebenbedingung $u - g \in H_0^1$ zu minimieren, ist (weil $D(g,g)$ konstant ist) äquivalent dazu

(1) $\quad D(v,v) + 2D(g,v)$ unter der Nebenbedingung $v \in H_0^1$ zu minimieren.

Nun ist $H_0^1(\Omega)$ mit D ein Hilbertraum und $v \mapsto -D(v,g)$ wegen $|D(v,g)| \leq D(v,v)^{1/2}D(g,g)^{1/2} \leq c\|v\|_{H_0^1}\|g\|_{H^1}$ eine stetige Linearform auf $H_0^1(\Omega)$. Nach dem Satz von Riesz existiert ein $w \in H_0^1(\Omega)$ mit

(2) $$D(\varphi, w) = -D(\varphi, g) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Damit hat die Minimierungsaufgabe (1) dieselbe Lösung wie die Aufgaben, $D(v,v) - 2D(v,w)$ bzw. $D(v,v)-2D(v,w)+D(w,w)$ zu minimieren unter allen $v \in H_0^1$. Nun ist der letzte Ausdruck gleich $D(v-w, v-w)$, und das Minimum wird (genau) für $v = w$ angenommen.

Damit hat (iii) die (eindeutige) Lösung $u = g+w$. Wegen (2) ist $D(u,\varphi) = D(g,\varphi)+D(w,\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ist. Somit hat auch (ii) (und damit (i)) eine Lösung.

Die Lösung von (ii) ist ebenfalls eindeutig: Ist $\tilde{u}$ eine weitere, so ist $u-\tilde{u} = (u-g)-(\tilde{u}-g) \in H_0^1(\Omega)$ und $D(u-\tilde{u},\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, somit $u = \tilde{u}$. Auch (i) kann keine weitere Lösung haben; sie würde auch (ii) erfüllen. $\triangleleft$

Exkurs: Lösbarkeit allgemeinerer Randwertaufgaben mit dem Satz von Lax und Milgram.

5.18. Satz. *Es sei H ein (nicht notwendig) komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $B : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear.*

(a) *Folgende Bedingungen sind äquivalent*
   (i) *B ist stetig*
   (ii) *B ist partiell stetig, d.h. $x \mapsto B(x,y)$ ist stetig für alle $y \in H$ und $y \mapsto B(x,y)$ ist stetig für alle x*
   (iii) *Es existiert ein $C > 0$ mit $|B(x,y) \le C\|x\|\,\|y\|$.*

(b) *Falls B stetig ist, so existiert ein $T \in \mathcal{L}(H)$ mit $B(x,y) = \langle Tx, y \rangle$.*

(c) *Existiert zudem ein $m > 0$ mit $|B(x,x)| \ge m\|x\|^2$ (in diesem Fall heißt B koerziv), so ist T invertierbar, und $\|T^{-1}\| \le m$.*

(d) **(Satz von Lax-Milgram)** *Ist B stetig und koerziv, und ist $l : H \to \mathbb{C}$ eine stetige Linearform, so existiert genau ein $u \in H$ mit*

$$B(x,u) = l(x) \text{ für alle } x.$$

Bemerkung. *Ist l konjugiert-linear, so erhält man genau ein u mit $B(u,x) = l(x)$.*

Beweis. (a) Klar ist $(iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)$. Wir zeigen $(ii) \Rightarrow (iii)$ mit dem Satz von Banach-Steinhaus.

Zunächst sei x fest. Dann ist $y \mapsto B_x(y) = B(x,y)$ stetig mit $B_x(0) = 0$. Daher existiert ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $|B_x(y)| \le 1$ für $\|y\| \le \varepsilon(x)$. Folglich ist wegen der konjugierten Linearität

$$|B(x,y)| = |B_x(y)| \le \varepsilon(x)^{-1} \text{ für } \|y\| \le 1.$$

Nun bilden für $\|y\| \le 1$ die Abbildungen $x \mapsto B^y(x) = B(x,y)$ eine Familie von (nach Annahme stetigen) linearen Abbildungen von H nach $\mathbb{C}$ mit

$$|B^y(x)| \le \varepsilon(x)^{-1} \text{ für alle } \|y\| \le 1.$$

Nach Banach-Steinhaus existiert ein C mit $\|B^y\| \le C$, falls $\|y\| \le 1$. Dies liefert (iii).

(b) Wir fixieren x und betrachten die Abbildung $y \mapsto \overline{B(x,y)}$ (komplexe Konjugation). Sie ist linear und stetig. Nach dem Satz von Riesz existiert ein $w \in H$ mit

$$\overline{B(x,y)} = \langle y, w \rangle \text{ bzw. } B(x,y) = \langle w, y \rangle.$$

Wir setzen $Tx = w$. Dann gilt $\langle Tx, y \rangle = B(x,y)$. Man sieht leicht, dass dies eine lineare Abbildung T auf H definiert. Ferner ist

$$|\langle Tx, y \rangle| = |B(x,y)| \le C\|x\|\|y\|$$

und damit $\|T\| \le C$.

(c) Wegen $|B(x,x) \geq c\|x\|^2$ ist der in (b) konstruierte Operator injektiv. Er hat auch abgeschlossenes Bild: Ist $(y_k) = (Tx_k)$ eine Folge in Bild T mit $y_k \to y \in H$, so ist wegen

(1) $$c\|x\|^2 = c\langle x, x\rangle \leq |B(x,x)| = |\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\|$$

die Folge (x_k) eine Cauchy-Folge in H. Sie hat also einen Grenzwert x. Auf Grund der Stetigkeit von T folgt $y = Tx \in \operatorname{Bild} T$.

Um zu zeigen, dass T surjektiv ist, wählen wir $y \perp \operatorname{Bild} T$. Aus (1) folgt sofort $y = 0$.

(d) Zu l existiert nach dem Satz von Riesz ein $w \in H$ mit $l(x) = \langle x, w\rangle$ alle $x \in H$. Setze $\tilde{B}(x,y) = \overline{B(y,x)}$. Dann erfüllt $\tilde{B}$ die Voraussetzungen von Satz 5.18, induziert somit einen invertierbaren beschränkten Operator $T : H \to H$. Insbesondere existiert ein u mit $Tu = w$. Also ist dann $l(x) = \langle x, Tu\rangle = \overline{\langle Tu, x\rangle} = \overline{\tilde{B}(u,x)} = B(x,u)$.

Gibt es ein weiteres Element u' mit $B(x,u') = l(x)$, so folgt $B(x, u-u') = 0$ für alle x und somit $u = u'$. ◁

5.19. Standardannahmen. Im Folgenden sei

(1) $$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}(a^{ij}\partial_{x_i}u) + \sum_{i=1}^{n} b^i \partial_{x_i}u + c(x)u$$

(L in 'Divergenzform'). Ferner gelte

(i) $a^{ij}, b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

(ii) $a^{ij} = a^{ji}$, $i,j = 1,\dots,n$, d.h. $a = (a^{ij})$ is symmetrisch.

(iii) L ist gleichmäßig stark elliptisch mit Elliptizitätskonstante θ, d.h.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

5.20. Schwache Lösungen. Wir nennen $u \in H_0^1$ eine schwache Lösung, falls für alle $v \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

(1) $$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{x_i}u\partial_{x_j}v + \sum_{i=1}^{n} b^i\partial_{x_i}uv + c(x)uv\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

Dabei wurde im ersten Term partiell integriert, so dass nur noch Ableitungen erster Ordnung auf u fallen. Die Randbedingung $\gamma_0 u = 0$ steckt in der Annahme, dass $u \in H_0^1(\Omega)$ liegt.

Da die Koeffizienten reell sind, ist es sinnvoll, auch nach reellen Lösungen u zu suchen. Wir können daher annehmen, dass v reell ist. Damit stimmt die rechte Seite mit dem Skalarprodukt $\langle f, v\rangle$ überein.

Beachte. Das obige Integral ist auch dann noch sinnvoll, wenn man annimmt, dass $v \in H_0^1(\Omega)$ liegt (approximiere durch $C_c^\infty(\Omega)$-Funktionen).

5.21. Definition. Wir definieren die Bilinearform B auf $H_0^1(\Omega)$ durch

(1) $$B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\partial_{x_i}u\partial_{x_j}v + \sum_{i=1}^{n} b^i\partial_{x_i}uv + c(x)uv\,dx.$$

Eine schwache Lösung unserer Randwertaufgabe ist also eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $B(u,v) = \langle u, v\rangle$ für reellwertige u, v.

Wir werden nun versuchen, Abschätzungen à la Lax-Milgram für B zu zeigen, was i.Allg. nicht ganz gelingen wird.

5.22. Satz: Energie-Abschätzungen. Für geeignete $\alpha, \beta > 0$ und $\gamma \geq 0$ ist

(1) $$|B(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \quad \text{und}$$

(2) $$\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B(u,u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2.$$

Beweis. Zu (1): Es ist

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\leq \sum_{ij} \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int |\nabla u| \, |\nabla v| \, dx + \sum_i \|b^i\|_{L^\infty} \int |\nabla u| \; |v| \, dx \\ &\quad + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u||v| \, dx \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

wobei sich α aus den L^∞-Normen von a^{ij}, b^i und c ergibt.

Zu (2): Die Annahme der gleichmäßigen Elliptizität liefert (zunächst für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ mit Fouriertransformation:

$$\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{x_i} u \partial_{x_j} u.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \theta \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx &\leq B(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i \partial_{x_i} u u + c(x) u^2 \, dx \\ &\leq B(u,u) + \sum_i \|b^i\|_{L^\infty} \int |\nabla u| \; |u| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Nun wenden wir auf den mittleren Term die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in Verbindung mit der elementaren Abschätzung

$$ab = (2\varepsilon)^{1/2} a \left(\frac{b}{(2\varepsilon)^{1/2}} \right) \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

an, wobei ε so gewählt sei, dass

$$\varepsilon \sum \|b^i\|_{L^\infty} \leq \theta/2.$$

Es folgt

$$\frac{\theta}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq B(u,u) + \left(\frac{1}{4\varepsilon} + \|c\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{L^2}^2.$$

Verwenden wir

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2,$$

so erhalten wir (2) mit $\beta = \theta/2$ und $\gamma = 1/(4\varepsilon) + \|c\|_{L^\infty} + \theta/2$.

Bemerkung. Alternativ kann man hier die Poincaré-Ungleichung 5.14 einsetzen:

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

5.23. Existenzsatz für schwache Lösungen. *Es sei γ die in Satz 5.22 bestimmte Konstante. Dann existiert zu jedem $\mu \geq \gamma$ und jedem $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Aufgabe*

(1) $$Lu + \mu u = f$$

(2) $$\gamma_0 u = 0.$$

Beweis. Definiere die Bilinearform $B_\mu(u,v) = B(u,v) + \mu\langle u,v\rangle$ mit dem obigen B. Sie entspricht dem Operator $L + \mu I$ und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Lax und Milgram. Ferner setzen wir $l(u) = \langle u, f\rangle$. Dann ist l eine stetige Linearform auf $H = H_0^1(\Omega)$, und der Satz von Lax-Milgram liefert ein eindeutig bestimmtes $u \in H$ mit $B_\mu(u,v) = l(v)$ für alle $v \in H$. Dies ist gerade die Behauptung. ◁

5.24. Bemerkung. Sind die b_j alle Null und ist $c \geq 0$ (das ist z.B. das Dirichlet-Problem der Fall), so können wir die Konstante γ aus Satz 5.22 als Null wählen:

$$B(u,u) = \sum \int a^{ij} \partial_{x_i} u \partial_{x_j} u \, dx + \int cu^2 \, dx \geq \theta \| \nabla u\|^2 \overset{\text{Poincaré}}{\geq} \eta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

für ein geeignetes $\eta > 0$. Damit erhält man die Lösbarkeit auch für $\mu = 0$, also eine schwache Lösung.

Die Greensche Funktion.

5.25. Definition. Die Greensche Funktion G für eine offene Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $G = G(x,y)$ auf $\Omega \times \overline{\Omega}$ mit folgenden Eigenschaften (im Folgenden ist N das Newton-Potential):

(a) $G(x,\cdot) - N(x,\cdot)$ ist stetig auf $\overline{\Omega}$ und harmonisch auf Ω

(b) $G(x,y) = 0$ falls $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$.

5.26. Lemma. *Für ein beschränktes Gebiet gibt es höchstens eine Greensche Funktion.*

Beweis. Für jedes feste $x \in \Omega$ ist $v(y) = G(x,y) - N(x,y)$ die Lösung des Dirichletproblems $\Delta u = 0, u|_{\partial\Omega} = -N(x,\cdot)$. Diese ist eindeutig. ◁

5.27. Satz. *Ist Ω beschränktes Gebiet mit glattem Rand, so existiert eine Greensche Funktion für Ω. Für jedes $x \in \Omega$ gilt $G(x,\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$.*

Diesen Satz können wir nicht beweisen[1]. Die Beweisidee von Green:

$\partial\Omega$ sei geerdet, Ω leer. Bringe nun eine „Probeladung“ δ_x in Ω. Es stellt sich ein Potential U_x ein. Es löst (Maxwell)

$$\begin{aligned} \Delta U_x &= \delta_x \text{ in } \Omega \\ U_x|_{\delta\Omega} &= 0 (\text{Erdung}) \end{aligned}$$

Setze nun $G(x,y) := U_x(y)$. ◁

5.28. Lemma. $G(x,y) = G(y,x), \quad x,y \in \Omega.$

Beweis. Fixiere x,y. Setze $G^\varepsilon = G - N + N^\varepsilon$:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(z) &= G^\varepsilon(x,z) \\ v^\varepsilon(z) &= G^\varepsilon(y,z) \end{aligned}$$

Dann gilt, weil $G - N$ harmonisch ist,

$$\begin{aligned} \Delta u^\varepsilon &= \Delta N^\varepsilon(x,\cdot) \to \delta_x \\ \Delta v^\varepsilon &= \Delta N^\varepsilon(y,\cdot) \to \delta_y \end{aligned}$$

[1] Einige Spezialfälle s.u.

Die Greensche Formel liefert

$$\begin{aligned} G(x,y)-G(y,x) &= \lim \int G(x,z)\underbrace{\Delta N^\varepsilon(y,z)}_{\to\delta_y} - G(y,z)\underbrace{\Delta N^\varepsilon(x,z)}_{\to\delta_x}\,dz \\ &= \lim \int_{\partial\Omega} G(x,z)\partial_{\nu_z}N^\varepsilon(y,z) - G^\varepsilon(y,z)\partial_{\nu_z}N^\varepsilon(x,z)\,d\sigma(z) \\ &= 0,\ \text{da } G(x,z)=G(y,z)=0 \text{ für } z\in\partial\Omega \end{aligned}$$

◁

5.29. Folgerung.

(a) *Man setzt daher oft G fort auf $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ durch $G(x,y)=0$ für $x\in\partial\Omega$ oder $y\in\partial\Omega$.*

(b) *$G(\cdot,y)-N(\cdot,y)$ ist stetig auf $\overline{\Omega}$ und harmonisch in Ω für jedes $y\in\Omega$.*

5.30. Satz. *Es sei Ω beschränkt mit glattem Rand, $f\in L^1(\Omega)$.*

Dann löst die Funktion

$$v(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$$

das Dirichlet-Problem

$$\Delta v = f \text{ in } \Omega; \qquad v|_{\partial\Omega}=0.$$

Beweis. Klar: $v|_{\partial\Omega}=0$, da $G(x,z)=0$, falls $x\in\partial\Omega$ (5.28). Wir denken uns f fortgesetzt durch 0 zu einer Funktion $f^0\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann hat f^0 kompakten Träger.

Um zu sehen, dass das Integral

$$\int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$$

existiert für jedes x, beachte: $G(x,\cdot)\in C^\infty(\Omega\setminus\{x\})$ und $G(x,\cdot)$ hat in x dieselbe Singularität wie N in 0. Diese ist integrierbar. Also

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy = \int_\Omega \underbrace{N(x-y)}_{\in L^1}\underbrace{f(y)}_{\in L^1}\,dy + \int_\Omega \underbrace{(G(x,y)-N(x-y))}_{\in C(\overline{\Omega})}f(y)\,dy \\ &= (f^0 * N)(x) + \int (G(x,y)-N(x-y))f(y)\,dy \end{aligned}$$

Nun ist $\Delta(f^0 * N) = f^0 = f$ in Ω, während das zweite Integral eine harmonische Funktion definiert:

$$G(\cdot,y)-N(\cdot,y)$$

ist nach 5.28(b) harmonisch. ◁

5.31. Satz. *Es sei Ω beschränkt mit glattem Rand, $g\in C(\partial\Omega)$. Dann ist durch*

$$v(x)=\int_{\partial\Omega} g(y)\partial_{\nu_y}G(x,y)\,d\sigma(y) \qquad \text{„Poisson-Formel“}$$

eine stetige Funktion v auf Ω definiert. Sie hat eine stetige Fortsetzung auf $\partial\Omega$.

Sie löst das Dirichletproblem $\Delta v=0$ in $\Omega, v|_{\partial\Omega}=g$. Die Funktion $\partial_{\nu_y}G$ auf $\Omega\times\partial\Omega$ heißt Poisson-Kern.

Beweis. Dass $\Delta v=0$ in Ω gilt, ist klar, weil $G(\cdot,y)$ für $y\neq x$ harmonisch ist, also auch $\partial_{\nu_y}G(\cdot,y)$.

Die restliche Aussage beweisen wir *nicht*. ◁

Das Dirichletproblem im Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

5.32. Notation. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &= \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\} \\ \Delta &= \Delta_x + \partial_t^2 \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Greensche Funktion.

Physikalische Intuition: Man bringt eine Ladung in (x,t) an, eine entgegengesetzte in $(x,-t)$. Das induzierte Potential ist dann Null auf $\partial\mathbb{R}^{n+1} = \{(x,t) : t = 0\}$

5.33. Satz. Die Greensche Funktion des Halbraums $\mathbb{R}^{n+1}$ *ist gegeben durch*

$$G(x,t;y,s) = N(x-y,t-s) - N(x-y,-t-s)$$

(Nicht eindeutig, s.u.).

Beweis. Es gilt:

(i) $G(x,t;y,s) - N(x-y,t-s) = -N(x-y,-t-s)$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^{n+1}_+$.
(ii) $G(x,t;y,0) = N(x-y,t) - N(x-y,-t) = 0$

Daher ist G eine Greensche Funktion. ◁

5.34. Bemerkung. Nicht eindeutig: Auch $G + cs$ erfüllt (i) und (ii)

5.35. Satz. *Es sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ mit kompaktem Träger (gilt allgemeiner).*
Dann hat das Dirichletproblem

$$\Delta_x u + \partial_t^2 u = f \text{ auf } \mathbb{R}^{n+1} \qquad u(x,0) = 0$$

die Lösung

$$u(x,t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} G((x,t),(y,s)) f(y,s)\, dy\, ds$$

Beweis. Wegen $G \in L^1_{\text{loc}}$ existiert das Integral für jedes x,t. Ferner ist (weil $N(x-y,-t-s)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^{n+1}_+$ ist)

$$\begin{aligned} \Delta u(x,t) &= \Delta \int_0^\infty \int N(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, dS \\ &= \Delta(N * f) = f \end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist $G(x,0;y,t) = 0$, daher ist $u = 0$ auf dem Rand. ◁

5.36. Vorbereitung der Lösung des dualen Dirichletproblems. Satz 5.31 suggeriert die Lösung des dualen Dirichletproblems

$$\Delta_{x,t} u(x,t) = 0 \qquad u(x,0) = g$$

durch

$$u(x,t) = \int g(y) \partial_{\nu_{y,s}} G(x,t;y,0)\, dy$$

anzusetzen. Wir berechnen also $\partial_\nu G$. Weil Normalenrichtung $-\partial_t$ ist, ist der Poissonkern

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s} G(x,t;x,y)|_{s=0} &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(N(x-y,t-s) - N(x-y,-t-s)\right)|_{s=0} \\ &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \frac{2t}{(|x-y|^2+t^2)^{(n+1)/2}} =: P_t(x-y) \end{aligned}$$

(Poissonkern für $\mathbb{R}^{n+1}_+$) $P_t(x) = \dfrac{1}{\omega_{n+1}} \dfrac{2t}{(|x|^2+t^2)^{(n+1)/2}}$

$$(1) \qquad P_t(x) = t^{-n} P_1(t^{-1}x), t > 0 \qquad \text{(klar)}$$

$$(2) \qquad \int P_1(x)\,dx = 1$$

Die zweite Identität haben wir bereits in 4.19 bewiesen.

5.37. Satz. *Es sei $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1,\infty]$. Dann ist*

$$(1) \qquad u(x,t) = \int g(y) P_t(x-y)\,dy = g * P_t(x)$$

eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

(a) *Ist g stetig und beschränkt, so ist u stetig auf $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ fortsetzbar und $u(x,0) = g(x)$.*

(b) *Ist $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p < \infty$, so gilt $u(\cdot,t) \longrightarrow g$ in L_p für $t \longrightarrow 0$.*

Daher löst u das duale Dirichletproblem. Die Lösung ist nie eindeutig.

Beweis. Es ist $P_t \in L^1 \cap L^\infty$, folglich $P_t \in L_q$ für alle $q \in [1,\infty]$. Nach der Youngschen Ungleichung ist das Integral (1) absolut konvergent für alle $(t,x), t > 0$. Dasselbe gilt für die Ableitungen $\Delta_x P_t$ bzw. $\partial_t^2 P_t$.

Für $(x,t) \neq (y,s)$ ist $(x,t) \mapsto G(x,t;y,s)$ harmonisch, daher ist für jedes $t > 0$ die Abbildung $(x,t) \mapsto P_t(x) = -\partial_s G(x,t;y,0)$ harmonisch.

Es folgt $\Delta_{x,t} u(x,t) = \Delta_{x,t}(g * P_t) = g * (\Delta_{x,t} P_t) = 0$. Ferner ist nach 5.36(1)

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int g(y)\ t^{-n} P_1\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \\ (2) \qquad &= \int g(x-tz) P_1(z)\,dz \end{aligned}$$

Ist g stetig und beschränkt, so folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz die stetige Fortsetzbarkeit von u auf $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. Ferner sieht man aus (2) sofort, dass

$$u(t,x) \longrightarrow g(x) \text{ für } t \longrightarrow 0.$$

Für $g \in L_p$ gilt nach 5.36(2) mit der Minkowski-Ungleichung für Integrale ($\|\int f(x,y)dy\|_{L^p_{dx}} \leq \int \|f(x,y)\|_{L^p_{dx}} dy$)

$$\begin{aligned} \|u(t,x) - g(x)\|_{L^p_{dx}} &= \left\| \int (g(x-tz) - g(x)) P_1(z)\,dz \right\|_{L^p_{dx}} \\ &\overset{Minkowski}{\leq} \int \|g(\cdot - tz) - g(\cdot)\|_{L^p_{dx}} P_1(z)\,dz. \end{aligned}$$

Da $\|g(\cdot - tz) - g(\cdot)\|_{L^p} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow 0$ (stetig im p-ten Mittel, $p < \infty$) und durch $2\|g\|_{L^p}$ abschätzbar ist, liefert der Satz von der dominierten Konvergenz, dass die rechte Seite für $t \longrightarrow 0$ gegen 0 konvergiert.

Zum Schlusssatz: Ist u eine Lösung, so auch $v(x,t) := u(x,t) + ct, c \in \mathbb{C}$. $\triangleleft$

Es gilt jedoch folgender Satz (ohne Beweis)

5.38. Satz. *Es sei g stetig auf $\mathbb{R}^n$ und verschwinde im Unendlichen ($g(x) \longrightarrow 0, |x| \to \infty$). Dann ist auch die Funktion u, definiert durch $u(x,t) = (g * P_t)(x)$ stetig und verschwindet im Unendlichen.*

Ferner ist u die einzige Lösung des dualen Dirichletproblems mit dieser Eigenschaft.

5.39. Folgerung. *Für $s > 0$ ist $u(t,x) = P_{s+t}(x)$ stetig auf $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ und verschwindet im Unendlichen. Ferner ist u harmonisch und $u(x,0) = P_s(x)$. Daher löst u das duale Dirichletproblem mit $g(x) = P_s(x)$. Wegen des Eindeutigkeitssatzes 5.38 folgt, dass*

$$P_s * P_t = P_{s+t}.$$

Die Funktionen $P_t : t > 0$ bilden also eine Halbgruppe bzgl. der Faltung, die sogenannte Poisson-Halbgruppe. Dies ist sogar eine Kontraktionshalbgruppe, da nach Young gilt

$$\|g * P_t\|_p \leq \|g\|_p \|P_t\|_1 = \|g\|_p.$$

Nach 5.37 ist sie stark stetig auf L_p für $1 \leq p < \infty$.

Das Dirichletproblem für die Einheitskugel.

5.40. Ausblick. Wir lösen das Dirichletproblem für die Einheitskugel

$$B = B(0,1) \text{ mit } \partial B = S(0,1) =: S$$

Die Resultate übertragen sich durch Schiebung und Streckung auf beliebige Kugeln in $\mathbb{R}^n$.

Idee zur Bestimmung der Greenschen Funktion: Die Einheitsladung in x wird neutralisiert durch eine (skalierte) Ladung im „Spiegelpunkt" $x/|x|^2$. Dazu

5.41. Lemma. *Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, |y| = 1$. Dann ist*

$$|x - y| = \left| |x|^{-1} x - |x| y \right|.$$

Beweis. $|x-y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y\rangle + 1 \overset{|y|=1}{=} |x|^2 |y|^2 - 2\left\langle \frac{x}{|x|}, |x|y \right\rangle + \left|\frac{x}{|x|}\right|^2 = \left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right|^2.$ ◁

5.42. Satz. ($n \geq 3$). *Die (eindeutig bestimmte) Greensche Funktion für B ist gegeben durch*

$$G(x,y) = N(x,y) - N\left(\frac{x}{|x|} - |x|y\right) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{(2-n)\,\omega_n}\left[|x-y|^{2-n} - \left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right|^{2-n}\right] \tag{2}$$

$$= N(x-y) - |x|^{2-n} N\left(\frac{x}{|x|^2} - y\right), \text{ falls } x \neq 0 \tag{3}$$

$$G(0,y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left[|y|^{2-n} - 1\right] \tag{4}$$

Beachte: Für jedes x ist $G(x,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(B \setminus \{x\})$: Für $x \neq 0$ folgte aus $\frac{x}{|x|} - |x|y = 0$ der Widerspruch, dass $y = x/|x|^2 \notin B$. Für $x = 0$ ist die Glattheit klar.

Beweis. (3) zeigt, dass $G(x,\cdot) - N(x,\cdot)$ für $x \neq 0$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \left\{x/|x|^2\right\}$ ist, insbesondere also harmonisch auf B und stetig auf $\overline{B}$. Für $x = 0$ sieht man aus (4), dass $y \mapsto G(0,y) - N(0,y)$ harmonisch in B und stetig auf $\overline{B}$ ist.

Für $|y| = 1$ folgt aus (1) mit Lemma 5.41, dass $G(x,y) = 0$ ist.

Aus (2) folgt, dass (4) die stetige Fortsetzung von (3) nach $x = 0$ ist. Hier ist $G(0,\cdot) - N(0,\cdot) = -\frac{1}{(2-n)w_n}$ sogar konstant. ◁

Ebenso erhält man

5.43. Satz. *Für $n = 2$ ist die Greensche Funktion*

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\log|x-y| - \log\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right| & x \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi}\log|y| & x = 0 \end{cases}.$$

Wieder: $G(x,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(B \setminus \{x\})$.

5.44. Bemerkung. Die Kugel $B(0,\rho)$ ist die Greensche Funktion

$$G_\rho(x,y) = \rho^{2-n} G\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right).$$

Beweis. Für $n > 2$ ist

$$\begin{aligned} G_\rho(x,y) - N(x,y) &\overset{n\geq 2}{=} \rho^{2-n}\left(G\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) - \frac{|x-y|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\rho^{n-2}\right) \\ &= \rho^{2-n}\left(G\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) - N\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right)\right) \text{ harmonisch;} \end{aligned}$$

für $n = 2$ ist

$$\begin{aligned} G_\rho(y,x) - N(x,y) &= G\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) - \frac{1}{2\pi}\ln|x-y| \\ &= G\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) - \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{x-y}{\rho}\right| - \frac{1}{2\pi}\ln\rho \text{ harmonisch.} \end{aligned}$$

Ferner: Ist $|y| = \rho$, so ist $\left|\frac{y}{\rho}\right| = 1$, also $G\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) = 0$. ◁

5.45. Der Poissonkern. Für $x \in B$ und $y \in S$ setzen wir $P(x,y) = \partial_{\nu_y} G(x,y) = \langle y, \nabla_y G(x,y)\rangle$. Dann gilt für $n \geq 2$

$$P(x,y) \quad = \quad -\frac{1}{\omega_n}\left[\frac{\langle y,(x-y)\rangle}{|x-y|^n} - \frac{|x|\langle y\left(\frac{x}{|x|} - |x|y\rangle\right)}{\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right|^n}\right] \overset{|y|=1}{=} \frac{1-|x|^2}{\omega_n|x-y|^n}.$$

5.46. Bemerkung. Für beliebigen Radius ρ ist

$$\begin{aligned} P_\rho(x,y) &= (\partial_{\nu_y} G_\rho)(x,y) = \frac{y}{\rho}\nabla_y\left[G\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right)\right] \\ &= \frac{y}{\rho}\rho^{2-n}\frac{1}{\rho}(\nabla_y G)\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) = \rho^{1-n}(y\nabla_y G)\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) \\ &= \rho^{1-n}P\left(\frac{x}{\rho},\frac{y}{\rho}\right) \\ &= \rho^{1-n}\frac{1-\rho^{-2}|x|^2}{\omega_n\rho^{-n}|x-y|^n} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\rho^2-|x|^2}{\omega_n|x-y|^n}. \end{aligned}$$

5.47. Satz. *Es sei $f \in L^1(S)$. Setze*

$$u(x) = \int_S P(x,y)f(y)\,d\sigma(y), \qquad x \in B.$$

(Poissonsche Integralformel)

Dann ist u harmonisch auf B. Ist f stetig, so hat u eine stetige Fortsetzung auf $\overline{B}$ mit $u|_S = f$. Ist $f \in L^p(S), p \in [1, \infty)$, so gilt $u_r \longrightarrow f$ in $L^p(S)$ für $r \longrightarrow 1$. Dabei ist

$$u_r(x) = u(rx), \quad x \in S.$$

Beweis. Für jedes $x \in B$ ist $P(x, y)$ beschränkt auf S, daher existiert das Integral. Ferner ist P harmonisch in x (da G harmonisch ist), also auch u. Nun zwei Beobachtungen

(1) $\quad \int_S P(x, y)\, d\sigma(y) = 1, \qquad x \in B;$

(2) $\quad$ Für jedes $y_0 \in S$ und jede Umgebung V von y_0 in S gilt

$$\lim_{r \to 1} \int_{S \setminus V} P(ry_0, y)\, d\sigma(y) = 0.$$

(2) sieht man leicht: $|ry_0 - y|^{-n}$ ist gleichmäßig beschränkt für $0 < r < 1$ und $y \in S \setminus V$, ferner gilt $1 - |ry_0|^2 = 1 - r^2 \longrightarrow 0$

(1) Weil $x \mapsto P(x, y)$ für $y \in S$ harmonisch ist, folgt aus der MWE für beliebiges $y \in S$, $r > 0$:

$$1 \overset{5.45}{=} \omega_n P(0, y) = \int_S P(ry', y)\, d\sigma(y').$$

Nun ist $P(ry', y) = P(ry, y')$ (weil $|ry' - y| = |ry - y'|$ für $y, y' \in S$), und es folgt (1) für $x = ry$.

Ist f stetig, so auch gleichmäßig stetig, da S kompakt ist. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \delta$. Setze $V_x = \{y \in S : |x - y| < \delta\}$. Dann gilt für $x \in S$ und $r < 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - u(rx)| &\overset{(1)}{=} \left| \int_S (f(x) - f(y)) P(rx, y)\, d\sigma(y) \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{V_x} P(rx, y)\, d\sigma(y) + 2\|f\|_{\sup} \int_{S \setminus V_x} P(rx, y)\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Nach (1) ist der erste Summand rechts $< \varepsilon$, der zweite geht gegen Null wegen (2), falls $r \longrightarrow 1$. Es folgt, dass

$$\|u_r - f\|_{\sup} \longrightarrow 0 \text{ für } r \longrightarrow 1.$$

Dies wiederum erzwingt die Stetigkeit von u auf $\overline{B}$ und $u|_S = f$.

Ist $f \in L^p(S)$, so wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{C}(S)$ mit $\|g - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Setze

$$v(x) = \int P(x, y) g(y)\, d\sigma(y).$$

Dann gilt

$$\|f - u_r\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - v_r\|_p + \|v_r - u_r\|_p.$$

Der erste Term ist $\leq \frac{\varepsilon}{3}$. Für r nahe an 1 ist auch der zweite $\leq \frac{\varepsilon}{3}$, s.o. Der dritte Term ist von der Form $\|T(f - g)\|_p$, wobei der lineare Operator

$$T : L_p(s) \longrightarrow L_p(S)$$

definiert ist durch

$$Tu(x) = \int P(rx, y) u(y)\, dy$$

Man kann relativ leicht zeigen, dass $\|T\| \leq 1$ ist (Lemma von Schur). Dies liefert die Behauptung. $\triangleleft$

5.48. Lemma. *Es sei X ein Maßraum und $k = k(x,y) : X \to \mathbb{C}$ messbar und*

$$\int_X |k(x,y)|\,dx \le C \text{ für alle } y \text{ und } \int_X |k(x,y)|\,dy \le C \text{ für alle } x$$

Dann wird durch

$$Kf(x) = \int_X k(x,y)f(y)\,dy$$

Ein stetiger linearer Operator $K : L^p(X) \to L^p(X)$ mit Norm $\|K\| \le C$ definiert.

Beweis. Es sei q der konjugierte Exponent, d.h. $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\le \int_X |k(x,y)||f(y)|\,dy \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_X |k(x,y)|^{q/q}\,dy\right)^{1/q} \left(\int_X |k(x,y)|^{p/p}|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \\ &\le C^{1/q} \left(\int_X |k(x,y)||f(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Wir schließen, dass

$$\begin{aligned} \|Kf\|_p &\le C^{1/q}\left(\int_X \left(\int_X |k(x,y)|\ |f(y)|^p\,dy\right)dx\right)^{1/p} \\ &\overset{\text{Fubini}}{\le} C^{1/q}\left(\int_X |k(x,y)|\,dx\right)^{1/p}\left(\int_X |f(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \\ &\le C^{1/q}C^{1/p}\|f\|_p. \end{aligned}$$

$\triangleleft$