4. Der Laplace-Operator

In diesem Kapitel sei $n \geq 2$. Wieso spielt der Laplace-Operator in der Natur so eine wichtige Rolle?

4.1. Satz. *Es sei L ein linearer partieller Differentialoperator auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt: L kommutiert genau dann mit allen Translationen und Rotationen, wenn L ein Polynom in Δ ist, d.h. $L = \sum_{j=1}^m a_j \Delta^j, a_j \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Leicht zu sehen: Ein Differentialoperator L kommutiert mit allen Translationen genau dann, wenn er konstante Koeffizienten hat. In diesem Falle gilt für das Symbol l von L

$$(Lu)^\wedge(\xi) = l(\xi)\hat{u}(\xi), \quad u \in \mathcal{S}.$$

Da die Fouriertransformation mit Rotationen kommutiert, folgt

$$\begin{aligned} & L \text{ vertauscht mit Rotationen} \\ \iff & l(\xi)\hat{u}(R\xi) = \mathcal{F}(LRu)(\xi) = R\mathcal{F}Lu(\xi) = l(R\xi)\hat{u}(R\xi) \\ \iff & l(R\xi) = l(\xi) \ \text{ für alle } \ R \in O(n), \ \text{d.h. } l \text{ ist radial.} \end{aligned}$$

Ist also $L = \sum a_j \Delta^j$, so ist l radial mit konstanten Koeffizienten. L vertauscht dann mit Translationen und Rotationen.

Hat L umgekehrt diese Eigenschaft, so ist l radial. Damit ist auch jede homogene Komponente $l_j = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha \xi^\alpha$ von l radial. Damit hängt jedes l_j nur von $|\xi|$ ab. Da l_j homogen vom Grad j ist, ist also $l_j(\xi) = \alpha_j |\xi|^j$. Da andererseits l ein Polynom ist, ist $\alpha_j = 0$ für ungerades j. Damit ist $l(\xi) = \sum \alpha_{2j} |\xi|^{2j}$ und $L = \sum \alpha_{2j} \Delta^j$. ◁

4.2. Laplace-Operator auf radialem Feld. Es sei f eine radiale Funktion, d.h. $f(x) = \varphi(r)$ für $x \in \mathbb{R}^n, r = |x|$ mit einer Funktion φ auf $\mathbb{R}_+$. Dann gilt: Δf hängt nur von r ab, und

$$(\Delta f)(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r)$$

Beweis. Es ist $\dfrac{\partial r}{\partial x_j} = \dfrac{x_j}{r}$, also

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 \varphi(r) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \left(\varphi'(r) \frac{x_j}{r} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\varphi''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + \varphi'(r)\frac{1}{r} - \varphi'(r)\frac{x_j^2}{r^3} \right) \\ &= \varphi''(r) + n\varphi'(r)\frac{1}{r} - \varphi'(r)\frac{1}{r} \end{aligned}$$

◁

4.3. Definition. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt *harmonisch auf* Ω, falls $\Delta u = 0$.

4.4. Lemma. *Ist $f = f(x) = \varphi(r)$ radial und harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ist φ von der Form*

$$\varphi(r) = \begin{cases} a + br^{2-n} & n \neq 2 \\ a + b \ln r & n = 2 \end{cases}$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$. Umgekehrt ist jedes solches φ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beweis. Nach 4.2 heißt $\Delta f = 0$, dass

$$\frac{\varphi''(r)}{\varphi'(r)} = \frac{1-n}{r}$$

bzw.

$$(\ln \varphi')'(r) = \frac{1-n}{r}$$

Es folgt

$$\ln \varphi'(r) = (1-n)\ln r + \ln c$$

also

$$\varphi'(r) = cr^{1-n}.$$

Integration liefert Behauptung. $\triangleleft$

4.5. Die Greenschen Formeln. Ω sei beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. Ferner sei ν der Einheitsnormalenvektor nach außen auf $\partial\Omega =: S$; $d\sigma$ sei das Oberflächenmaß auf S. Dann gilt

$$\int_S v\partial_\nu u \, d\sigma = \int_\Omega v\Delta u + \nabla v \nabla u \, dx \tag{1}$$

$$\int_S (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma = \int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \, dx. \tag{2}$$

Beweis. (1) Wende Gauß-Stokes an auf das Vektorfeld $v\nabla u$. Beachte

$$\langle v\nabla u, \nu\rangle = v\partial_\nu u, \quad \operatorname{div} v\nabla u = \langle \nabla v, \nabla u\rangle + v\Delta u.$$

(2) folgt aus (1). Rollen von u und v vertauschen, subtrahieren.

4.6. Folgerung. *Ist $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ harmonisch auf Ω, so ist*

$$\int_S \partial_\nu u \, d\sigma = 0.$$

(Wähle in 4.5(1) $v \equiv 1$).

4.7. Definition.

$$S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

$$\omega_n = \mathrm{vol}_{n-1}(S(0,1)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Die Gamma-Funktion lässt sich hier berechnen aus $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1, \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

4.8. Satz. Mittelwerteigenschaft auf Sphären. *Es sei u harmonisch auf $\Omega, x \in \Omega$ und $r > 0$ so, dass $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$. Dann gilt:*

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S(x,r)} u(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+ry)\, d\sigma(y).$$

Beweis. Die zweite Identität folgt aus der ersten durch $y \mapsto x + ry$. Also ist nur die erste zu beweisen. Durch Komposition mit Translation können wir $x = 0$ annehmen. Wir wenden nun 4.5(2) an mit

$$v(y) = \begin{cases} |y|^{2-n} & n > 2 \\ \ln|y| & n = 2 \end{cases}$$

und $\Omega = B(0,r) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}$ für $0 < \varepsilon < r$. Nach Lemma 4.4 ist v harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ferner ist auf $B(0,r)$

$$\partial_\nu v \quad = \quad \langle \nabla v, \frac{x}{|x|} \rangle = \begin{cases} \langle (2-n)\frac{x}{|x|}|x|^{1-n}, \frac{x}{|x|} \rangle = (2-n)r^{1-n}, & n > 2 \\ \langle \frac{x}{|x|}\frac{1}{|x|}, \frac{x}{|x|} \rangle = r^{-1}, & n = 2. \end{cases}$$

Auf $B(0,\varepsilon)$ zeigt ν nach 0 hin, daher ist dort

$$\partial_\nu v = \begin{cases} -(2-n)\varepsilon^{1-n} & n > 2 \\ -\varepsilon^{-1} & n = 2. \end{cases}$$

Die zweite Greensche Formel (Gleichung 4.5(2)) liefert für $n > 2$:

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \int_{S(0,r)} v\partial_\nu u - u\partial_\nu v \, d\sigma - \int_{S(0,\varepsilon)} v\partial_\nu u - u\partial_\nu v \, d\sigma \\ &= \quad r^{2-n} \int_{S(0,r)} \partial_\nu u \, d\sigma + \varepsilon^{2-n} \int_{S(0,\varepsilon)} \partial_\nu u \, d\sigma \\ &\quad\; -(2-n)r^{1-n} \int_{S(0,r)} u \, d\sigma + (2-n)\varepsilon^{1-n} \int_{S(0,\varepsilon)} u \, d\sigma. \end{aligned}$$

(für $n = 2$ analog).

Die beiden ersten Terme fallen nach 4.6 weg (u harmonisch). Es folgt

$$\frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,r)} u \, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\varepsilon)} u \, d\sigma.$$

Weil u eine stetige Funktion ist, konvergiert die rechte Seite für $\varepsilon \to 0$ gegen $u(0)$. Dies liefert die Behauptung. $\triangleleft$

4.9. Folgerung. Mittelwerteigenschaft auf Kugeln. *Mit obigen Bezeichnungen ist*

$$u(x) = \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy = \frac{n}{\omega_n} \int_{B(0,r)} u(x+ry) \, dy.$$

Beweis. Multipliziere beide Seiten der Gleichung

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+\rho r y) \, d\sigma(y)$$

mit $\rho^{n-1} \, d\rho$, integriere von 0 bis 1. $\triangleleft$

4.10. Satz. *Es sei u stetig auf der offenen Menge Ω, und für alle Kugeln $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$ gelte die Mittelwerteigenschaft*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+ry) \, d\sigma(y).$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^\infty$ und harmonisch.

Beweis. Wähle $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,1))$ mit $\int \varphi = 1$ und $\varphi(x) = \psi(|x|)$ für ein $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Für $\varepsilon > 0$ setze $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ und

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \Omega\}.$$

Ist $x \in \Omega_\varepsilon$, so hat die Funktion $y \mapsto \varphi_\varepsilon(x-y)$ Träger in Ω, und

$$\begin{aligned}
u * \varphi_\varepsilon(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} u(x-y)\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}\,dy \\
&= \int_{B(0,1)} u(x-\varepsilon y)\varphi(y)\,dy \\
&= \int_0^1 \int_{S(0,1)} u(x-r\varepsilon y)\psi(r)\ r^{n-1}\,d\sigma(y)dr \\
&\overset{MWE}{=} \omega_n u(x)\int_0^1 \psi(r)\ r^{n-1}\,dr \\
&= u(x)\int_0^1 \int_{S(0,1)} \varphi(ry)r^{n-1}\,d\sigma(y)dr \\
&= u(x)\int_{B(0,1)} \varphi(y)\,dy \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Nun ist $u * \varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, also $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Da ε beliebig war, ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Wieso harmonisch? Es sei $x \in \Omega_\varepsilon$. Dann ist der Mittelwert von u auf $S(x,r)$ unabhängig von r für $0 < r < \varepsilon$. Also folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dr}\int_{S(0,1)} u(x+ry)\,d\sigma(y) \\
&= \int_{S(0,1)} \langle \nabla u(x+ry), y\rangle\,d\sigma(y) \\
&= r^{1-n}\int_{S(x,r)} \partial_\nu u(z)\,d\sigma(z) \\
\text{Green, 4.5(1) mit } v\equiv 1 \quad &= r^{1-n}\int_{B(x,r)} \Delta u(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\Delta u \equiv 0$. $\triangleleft$

4.11. Folgerung. *Ist $u (\in \mathcal{C}^2)$ harmonisch auf Ω, so ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

4.12. Folgerung. *Ist u_k eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω, die auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert, so ist u harmonisch: Da jedes Folgenglied die MWE hat, hat sie auch u.*

4.13. Satz. (Maximumsprinzip) *Ω sei offen und zusammenhängend in $\mathbb{R}^n$. Ist u harmonisch und reellwertig auf Ω und $\sup_{x\in\Omega} u(x) = A < \infty$, so ist entweder $u(x) < A$ für alle $x \in \Omega$ oder $u(x) \equiv A$.*

Beweis. Die Menge $\Omega_A = \{x \in \Omega : u(x) = A\}$ ist (relativ) abgeschlossen in Ω. Ist $x_0 \in \Omega_A$, so folgt aus der MWE, dass auf jeder Kugel $B(x_0, r)$, deren Abschluss in Ω liegt, $u(y) \equiv A$ ist (sonst wäre der Mittelwert $< A$). Also ist die Menge Ω_A auch offen in Ω. Damit ist entweder $\Omega_A = \Omega$ oder $\Omega = \emptyset$. $\triangleleft$

4.14. Folgerung. *Ist zusätzlich u stetig auf $\overline{\Omega}$ und nimmt u sein Maximum auf $\overline{\Omega}$ an (z.B. wenn $\overline{\Omega}$ kompakt ist), so wird es am Rand erreicht.*

Beweis. Wird das Maximum an einem inneren Punkt angenommen, so ist nach 4.13 $u \equiv A$. Damit wird A auch am Rand erreicht. $\triangleleft$

4.15. Bemerkung. Aussage 4.14 gilt auch für $|u|$ bei komplexwertigem u.

[Hat nämlich für ein komplexwertiges harmonisches u die Funktion $|u|$ in $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum, so existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $|u(x_0)| = cu(x_0)$. Wir betrachten dann $v(x) = \operatorname{Re} cu(x)$. Dies ist eine reellwertige harmonische Funktion, die in x_0 ein lokales Maximum annimmt. Damit ist sie (und dann auch $|u|$) lokal konstant.]

4.16. Identitätssatz. Es sei $\overline{\Omega}$ kompakt; die Funktionen u_1, u_2 seien harmonisch auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Gilt $u_1(x) = u_2(x)$ auf $\partial\Omega$, so ist $u_1 = u_2$ auf Ω.

Beweis. Betrachte Realteil und Imaginärteil von $u_1 - u_2$ und $u_2 - u_1$. Beide sind harmonisch auf Ω, stetig auf $\bar{\Omega}$. Sie nehmen ihr Maximum auf $\partial\Omega$ an. Dort sind beide gleich Null, also sind sie überall gleich Null. $\triangleleft$

4.17. Bemerkung. Maximumsprinzip gilt für größere Klassen von partiellen Differentialgleichungen, z.B. für Operatoren der Form $L = \sum_{jk} a_{jk}\partial_j\partial_k + \sum_j b_j\partial_j$ mit stetigen a_{jk} und b_j, sofern die Matrix (a_{jk}) positiv definit ist.

4.18. Satz. (Liouville) *Ist u harmonisch und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$, so ist u konstant.*

Beweis. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $R > |x|$ gilt nach 4.9:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \frac{n}{R^n w_n}\left|\int_{B(x,R)} u(y)\,dy - \int_{B(0,R)} u(y)\,dy\right| \\ &\le \frac{n}{R^n w_n}\|u\|_{\sup}\int_D dy, \end{aligned}$$

wobei D die symmetrische Differenz von $B(x,R)$ und $B(0,R)$ ist. Nun ist D in $\{y : R - |x| < |y| < R + |x|\}$ enthalten. Daher ist

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\le \frac{n}{R^n w_n}\ \|u\|_{\sup}\int_{R-|x|<|y|<R+|x|} dy \\ &= \frac{n}{R^n}\ \|u\|_{\sup}\int_{R-|x|}^{R+|x|} r^{n-1}\,dr \\ &= \|u\|_{\sup}\ \frac{(R+|x|)^n - (R-|x|)^n)}{R^n} \longrightarrow 0, \quad R \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

weil sich im Zähler die R^n-Potenzen wegheben. Also: $u(x) = u(0)$. $\triangleleft$

4.19. Satz. *Folgende Funktion ist eine Fundamentallösung von Δ auf $\mathbb{R}^n$.*

$$N(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln|x|}{2\pi} & n = 2 \\[2ex] \dfrac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_n} & n > 2. \end{cases}$$

N heißt Newton-Potential.

Zum Beweis benötigen wir folgenden Satz:

4.20. Satz. *Es seien $T_j \in \mathcal{D}'(\Omega), j \in \mathbb{N}$, und es existiere für jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ der Grenzwert*

$$\lim_{j\to\infty} T_j\varphi =: T\varphi \in \mathbb{C}.$$

Dann ist $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und

(1) $$D^\alpha T_j \longrightarrow D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Beweis. Rudin, Functional Analysis, Thm. 6.17: Für jedes kompakte $K \subseteq \Omega$ ist

$$T : \mathcal{D}_K \longrightarrow \mathbb{C}$$

stetig nach Banach-Steinhaus ($\mathcal{D}_K$ ist vollständiger metrischer Raum). Damit ist $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann folgt (1) sofort. $\triangleleft$

Beweis von 4.19: Wir betrachten den Fall $n > 2$, der Beweis für $n = 2$ ist analog. Setze

$$N_\varepsilon(x) = \frac{(|x|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{(2-n)}{2}}}{(2-n)\omega_n}.$$

Dann gilt

$$N_\varepsilon(x) \longrightarrow N(x) \text{ für } \varepsilon \longrightarrow 0 \text{ für jedes feste } x; \tag{1}$$

$$|N_\varepsilon(x)| \leq |N(x)| \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \text{ da } \frac{2-n}{2} > -n. \tag{2}$$

Nach 4.20 konvergiert also $N_\varepsilon \longrightarrow N$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (dominierte Konvergenz!). Da folglich auch $\Delta N_\varepsilon \longrightarrow \Delta N$ konvergiert, langt es zu zeigen, dass

$$\Delta N_\varepsilon(\varphi) \longrightarrow \delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Dazu rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} \Delta N_\varepsilon &= \frac{n}{\omega_n}\varepsilon^2(|x|^2+\varepsilon^2)^{-(n+2)/2} = \varepsilon^{-n}\psi(\varepsilon^{-1}x) \\ \text{wobei } \psi(x) &= \Delta N_1(x) = \frac{n}{\omega_n}(|x|^2+1)^{-(n+2)/2}. \end{aligned}$$

[Dazu:

$$\begin{aligned} \partial_{x_j}(|x|^2+\varepsilon^2)^{(2-n)/2} &= \frac{1}{2}(2-n)(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2}\ 2x_j \\ \partial^2_{x_j}(\ldots) &= (2-n)\left(-\frac{n}{2}\right)(|x|^2+\varepsilon^2)^{(-2-n)/2}\ 2x_j^2 + \\ &\quad (2-n)(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \Delta(\ldots) &= -(2-n)n(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n+2}{2}}|x|^2 + (2-n)n(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n+2}{2}}(|x|^2+\varepsilon^2) \\ &= (2-n)n(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n+2}{2}}\varepsilon^2 \end{aligned}$$

]

Damit ist

$$\begin{aligned} (\Delta N_\varepsilon)(\varphi) &= \int \Delta N_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int \varepsilon^{-n}\psi(\varepsilon^{-1}x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int \psi(x)\varphi(\varepsilon x)\,dx \\ &\to \int \psi(x)\varphi(0)\,dx \\ &= \int \psi(x)\,dx\ \varphi(0). \end{aligned} \tag{3}$$

Nun ist mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int \psi(x)\,dx &= n\int_0^\infty (r^2+1)^{-\frac{n+2}{2}} r^{n-1}\,dr \\ \left(\text{mit } s=\frac{r^2}{r^2+1} \text{ und } ds=\frac{2r\,dr}{(r^2+1)^2} \text{ also}\right) &= \frac{n}{2}\int_0^1 s^{\frac{n-2}{2}}\,ds = 1 \end{aligned}$$

Fertig! ◁

4.21. Folgerung. *Δ ist hypoelliptisch nach 3.41 (Erinnerung: $u \in \mathcal{D}', Au \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$). Insbesondere ist jede distributionelle Lösung von $\Delta u = 0$ automatisch eine C^∞-Funktion.*

4.22. Satz. (Lösung der inhomogenen Laplace-Gleichung) *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\int |f(y)\log|y||\,dy < \infty, \text{ falls } n=2.$$

Dann ist $f * N$ definiert als lokal integrierbare Funktion und $\Delta(f*N) = f$.

Beweis. (nur $n>2$). Es sei χ_r die charakteristische Funktion von $B(0,r)$. Dann ist $\chi_r N \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $(1-\chi_r)N \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Sogar $\chi_r N \in L^p$ für $p < \frac{n}{n-2}$ und $(1-\chi_r)N \in L^p$ für $p > \frac{n}{n-2}$).
Nach Young:

$$f*(\chi_r N) \in L^1, \text{ und } f*(1-\chi_r)N \in L^\infty.$$

Damit ist $f*N$ definiert. Ferner gilt $\chi_r f \to f$ in L^1 für $r\to\infty$. Also nach Young

$$\begin{aligned} (\chi_r f)*(\chi_1 N) &\longrightarrow f*\chi_1 N \text{ in } L^1 \\ (\chi_r f)*((1-\chi_1)N) &\longrightarrow f*(1-\chi_1)N \text{ in } L^\infty. \end{aligned}$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} \chi_r f &\longrightarrow f \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ (\chi_r f)*N &\longrightarrow f*N \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Da $\chi_r f$ kompakten Träger hat, stimmt die Faltung $\chi_r f * N$ mit der distributionellen Faltung überein, und nach 4.20 folgt

$$\Delta(f*N) = \lim \Delta(\chi_r f * N) = \lim(\chi_r f * \delta) = \lim \chi_r f = f.$$

◁

4.23. Definition. Im Folgenden schreiben wir häufig: $N(x,y) = N(x-y)$.

4.24. Satz. (Darstellung durch Randintegral) *Ω sei beschränktes Gebiet mit $\mathcal{C}^1$-Rand. Ist $u \in \mathcal{C}^1(\bar\Omega)$ und harmonisch in Ω, so gilt für $x \in \Omega$*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_{\nu_y}N(x,y) - \partial_\nu u(y)N(x,y)\,d\sigma(y). \tag{1}$$

Beweis. Es sei $N_\varepsilon(x,y) = N_\varepsilon(x-y)$ wie im Beweis von 4.19. Da $\Delta u = 0$ ist, liefert die Greensche Formel für $x\in\Omega$

$$\int_\Omega u(y)\Delta_y N_\varepsilon(x,y)\,dy = \int u(y)\partial_{\nu_y}N_\varepsilon(x,y) - \partial_\nu u(y)N_\varepsilon(x,y)\,d\sigma(y) \tag{2}$$

Für $\varepsilon \longrightarrow 0$ konvergiert die rechte Seite gegen die rechte Seite von (1) (beachte: $N(x,y)$ hat keine Singularität, da $x\in\Omega, y\in\partial\Omega$, und $\partial_{x_j}N_\varepsilon(x,y) \longrightarrow \partial_{x_j}N(x,y)$ punktweise, + dominierte Konvergenz).

Andererseits ist die linke Seite von (2) gerade $(u*\Delta N_\varepsilon)(x)$, weil $\Delta_y N(x-y) = \Delta_x N(x-y)$.

Behauptung: $(u * \Delta_y N_\varepsilon)(x) \longrightarrow u(x)$.

Dazu: Wie im Beweis von 4.19(3)

$$\begin{aligned}
(u * \Delta_y N_\varepsilon)(x) &= \int \Delta N_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \int \varepsilon^{-n}\psi(\varepsilon^{-1}(x-y))u(y)\,dy \qquad w = \varepsilon^{-1}(x-y) \\
&= \int \psi(w)u(x-\varepsilon w)\,dw \qquad \begin{matrix} \varepsilon w = x-y \\ y = x - \varepsilon w \end{matrix} \\
&\longrightarrow u(x)
\end{aligned}$$

4.25. Bemerkung. Man könnte den Eindruck gewinnen, es sei möglich, die Aufgabe

(1) $$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \qquad u|_{\partial\Omega} = f \qquad \partial_\nu u|_\Omega = g$$

zu lösen, indem man

(2) $$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)\partial_{\nu_y} N(x,y) - g(y)N(x,y)\,d\sigma(y)$$

setzt. Dies geht jedoch nicht: Wir wissen, dass u bereits durch $\Delta u = 0$ in $\Omega, u|_{\partial\Omega} = f$ bestimmt ist (Identitätssatz), Also kann eine Lösung zu (1) nur dann existieren, wenn g die Normalableitung dieser Funktion ist. Formel (2) liefert offensichtlich eine harmonische Funktion (da für $x \in \mathbb{R}, y \in \partial\Omega$ die Funktion $N(x,y)$ harmonisch ist); das Randverhalten stimmt jedoch im Allgemeinen nicht.

Zwei Regularitätsresultate ohne Beweis:

4.26. Satz.

(a) *Ist f analytisch auf Ω und u distributionelle Lösung von $Lu = f$, so ist u analytisch. Insbesondere sind harmonische Funktionen sogar analytisch.*

(b) *Ist $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega), k \in \mathbb{N}_0, 0 < \alpha < 1$ und ist u distributionelle Lösung von $\Delta u = f$, so ist $u \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}$.*