3. Distributionen, Fouriertransformation, Fundamentallösung

3.1. Der Schwartz-Raum. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Vektorraum aller $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, für die gilt:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \, \exists C_{\alpha\beta} \, \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^\alpha D_x^\beta f(x)| \leq C_{\alpha\beta}; \tag{1}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt auch der Raum der *schnell fallenden Funktionen*, da aus (1) folgt (und dazu äquivalent ist), dass

$$\forall \beta \in \mathbb{N}_0^n \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists C_{\beta N} \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n : |D_x^\beta f(x)| \leq C_{\beta N}(1 + |x|)^{-N}. \tag{2}$$

Eigenschaften:

(a) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\alpha D^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

(b) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(c) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p \leq \infty$.

(d) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein vollständiger metrischer Raum. Die Metrik wird durch die abzählbare Folge von Halbnormen (= beste Konstanten) aus (1) oder (2) definiert.

(e) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|x^\alpha D_x^\beta (f_n - f)\|_\infty = 0 \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

(f) Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, falls es zu jeder Wahl von $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ endlich viele Multi-Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{N}_0^n$ und ein $C \geq 0$ gibt mit

$$\|x^\alpha D^\beta (Tf)\|_\infty \leq C \max_{j=1}^{k} \|x^{\alpha_j} D^{\beta_j} f\|_\infty.$$

Beweis.

(a) Leibniz-Regel

(b) Leibniz-Regel

(c) Genau dann ist $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-L} \, dx < \infty$, wenn $L > n$. Zu $1 \leq p < \infty$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $pN > n$. Nach (2) gibt es ein $C \geq 0$, so dass $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-N}$. Also ist

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \leq C^p \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-Np} \, dx < \infty.$$

(d) Funktionalanalysis. Zu einem Punkte trennenden System von abzählbar vielen Halbnormen $\|\cdot\|_j$ definiert man eine Metrik d durch

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} \frac{\|f - g\|_j}{1 + \|f - g\|_j}.$$

(e) Eine Folge konvergiert in der obigen Metrik, falls sie in jeder Halbnorm konvergiert.

(f) Eine lineare Abbildung $T : V_1 \to V_2$ zwischen zwei metrischen Räumen mit Metrik von obigem Typ ist genau dann stetig, wenn jede Halbnorm $\|Tv\|_j$ von Tv in V_2 durch ein (konstantes) Vielfaches von endlich vielen der Halbnormen von v in V_1 abgeschätzt werden kann. $\triangleleft$

3.2. $\mathcal{C}_c^\infty$ und Distributionen.

(a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ist der Vektorraum aller Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$, deren Träger eine kompakte Teilmenge von Ω ist. Dabei ist der *Träger* von f die Menge

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega.$$

Statt $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ schreibt man auch $\mathcal{D}(\Omega)$. Man könnte auf $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ die Metrik einführen, die durch Konvergenz in allen Ableitungen entsteht. Dann ist jedoch der Träger der Grenzfunktion nicht notwendig kompakt. Man versieht daher $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ mit der *induktiven Topologie*, die dadurch entsteht, dass man den (induktiven) Limes über die Räume $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} u \subseteq K\}$ bildet, wobei K alle kompakten Teilmengen von Ω durchläuft. Dabei trägt $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen. Details zur Topologie von $\mathcal{C}_c^\infty$ finden sich z.B. bei Rudin [6, Chapter 6]. Es gilt:

> Eine Folge $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ist konvergent gegen $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, falls ein kompaktes $K \subset \Omega$ existiert mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ für alle n und $\varphi_n \to \varphi$ in allen Ableitungen.

(b) $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist der Raum aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ nach $\mathbb{C}$. Dabei folgt aus der Definition der induktiven Topologie, dass $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ genau dann stetig ist, wenn

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T\varphi_n \longrightarrow T\varphi \text{ in } \mathbb{C}.$$

Statt $T\varphi$ schreibt man oft $\langle T, \varphi\rangle$. Die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ nennt man *Distributionen*.

(c) Eine *temperierte Distribution* ist eine stetige lineare Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$. Wir schreiben $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Beachte: $\Omega = \mathbb{R}^n$.

3.3. Einfache Eigenschaften. Es seien $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ offen in $\mathbb{R}^n$.

(a) $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist ein Vektorraum. In natürlicher Weise ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega_1) &\subseteq \mathcal{D}(\Omega_2), \text{ falls } \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \\ \text{also } \mathcal{D}'(\Omega_2) &\supseteq \mathcal{D}'(\Omega_2), \text{ falls } \Omega_1 \subseteq \Omega_2. \end{aligned}$$

(b) Konvergiert eine Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ist also T stetig auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so auch auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Es folgt

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

d.h. jede temperierte Distribution ist eine Distribution.

(c) Nach Definition der Topologie ist $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ genau dann stetig, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge K von Ω ein $C \geq 0$ und ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$|T\varphi| \leq C \max_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha\varphi\|_{\sup}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(K)$$

3.4. Lemma. *Es sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Dann ist $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Alle Ableitungen verschwinden von beliebig hoher Ordnung bei $\{|x| = 1\}$. ◁

3.5. Faltung. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Faltung $f * g$ von f und g durch

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int f(x-y)g(y)\,dy.$$

Es gilt:

(a) $f * g \in L^1$, und $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

(b) $f * g = g * f$.

(c) Ist $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

(d) Ist $\operatorname{supp} f \subseteq V$ und $\operatorname{supp} g \subseteq W$, so ist $\operatorname{supp} f * g \subseteq \{x + y : x \in V, y \in W\}$.

(e) Verallgemeinerung von (a): Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, $1 \leq p \leq \infty$ (Youngsche Ungleichung).

Beweis. (a) Fubini, (b) klar, (c): Differenzieren unter dem Integral (d) klar, (e) weglassen. ◁

3.6. Lemma. *$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Analysis 3, Satz 22.18. ◁

3.7. Satz. *$\mathcal{C}_c^\infty$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Es sei $f \in L^p$ und (nach Lemma 3.6) o.B.d.A. in $\mathcal{C}_c$. Es sei ψ die Funktion aus Lemma 3.4 (oder eine beliebige andere nichtnegative $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ψ mit Träger in $\overline{B(0,1)}$ und $\psi(0) = 1$). Für $0 < \varepsilon \leq 1$ definiere ψ_ε durch

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} c \psi(x/\varepsilon), \qquad c = (\int \psi \, dx)^{-1}.$$

Dann hat ψ_ε Träger in $\{|x| < \varepsilon\}$ und

$$\int \psi_\varepsilon(x) dx = 1 \text{ für alle } \varepsilon. \tag{1}$$

Die Funktion

$$f_\varepsilon = \psi_\varepsilon * f \tag{2}$$

ist $\mathcal{C}^\infty$ nach Lemma 3.5(c) und hat kompakten Träger nach 3.5(d). Ferner ist nach (1)

$$\begin{aligned} f(x) - f_\varepsilon(x) &= \int (f(x) - f(x-y)) \psi_\varepsilon(y) \, dy \\ &= c \int (f(x) - f(x - \varepsilon u)) \psi(u) \, du \\ &= c \int (f(x) - \tau_{-\varepsilon u} f(x)) \psi(u) \, du. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir für $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\tau_y f$ die um y verschobene Funktion, definiert durch $(\tau_y f)(x) = f(x + y)$.

Da das Integral nur über $\overline{B(0,1)}$ genommen werden muss, ist für jedes feste x:

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \sup_{u \in B(0,1)} |f(x) - \tau_{-\varepsilon u} f(x)| \, c \int \psi(u) \, du = \sup_{u \in B(0,1)} |f(x) - \tau_{-\varepsilon u} f(x)|.$$

Wir finden nun eine kompakte Menge K, die den Träger aller Funktionen $\tau_{\varepsilon u}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, $u \in \overline{B(0,1)}$, enthält. Damit verschwindet die rechte Seite für x außerhalb K, und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f konvergiert sie für $\varepsilon \to 0$ auf K gleichmäßig gegen Null, auch in der p-ten Potenz. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt, dass $\|f - f_\varepsilon\|_p \to 0$. ◁

3.8. Folgerung. *$\|f - f_\varepsilon\|_p \to 0$ gilt auch für das ursprüngliche f. Ist nämlich $\tilde{f}$ die stetige Hilfsfunktion, so gilt nach (2) oben und der Youngschen Ungleichung*

$$\begin{aligned} \|f - f_\varepsilon\|_p &\leq \|f - \tilde{f}\|_p + \|\tilde{f} - \tilde{f}_\varepsilon\|_p + \|\tilde{f}_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &\leq \|f - \tilde{f}\|_p \, (1 + \|\psi_\varepsilon\|_1) + \|\tilde{f} - \tilde{f}_\varepsilon\|_p. \end{aligned}$$

Bei geschickter Wahl von $\tilde{f}$ konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $\varepsilon \to 0$.

3.9. Definition. $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ist die Menge aller messbaren Abbildungen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, für die $\int_K |f(x)| \, dx < \infty$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$ ("lokal integrierbare Funktionen").

3.10. Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\int f(y)\varphi(y)\,dy = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Dann ist $f(x) = 0$ f.ü..*

Beweis. Da das Resultat lokal ist, können wir annehmen, dass f kompakten Träger hat, also L^1-Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist. Wir wissen nach Folgerung 3.8, dass $f * \psi_\varepsilon \to f$ in L^1. Andererseits ist für festes x die durch $\varphi(y) = \psi_\varepsilon(x - y)$ definierte Funktion ein Element von $\mathcal{C}_c^\infty$, und somit nach Annahme $(f * \psi_\varepsilon)(x) = 0$ für jedes x. Es folgt $f = 0$. $\lhd$

3.11. Beispiele.

(a) Wir definieren zu $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ein Element $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$T_f\varphi := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

(Wegen des Satzes über die dominierte Konvergenz ist T_f tatsächlich stetig auf $\mathcal{D}(\Omega)$.) Aus Satz 3.10 folgt:

$$T_{f_1} = T_{f_2} \iff f_1 = f_2 \text{ fast überall in } \Omega.$$

Somit kann man also die Distribution T_f mit der Funktion f identifizieren und Distributionen als „verallgemeinerte Funktionen" betrachten.

Distributionen der Form T_f heißen *regulär* und f heißt auch *Dichte* von T_f. Meist macht man keinen Unterschied zwischen der Funktion f und der Distribution T_f.

(b) Es sei $x_0 \in \Omega$. Wir definieren

$$\delta_{x_0} : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, \delta_{x_0}\varphi = \varphi(x_0).$$

Diese Abbildung ist stetig, sowohl auf $\mathcal{D}(\Omega)$ als auch auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Also ist $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\delta_{x_0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. δ_{x_0} heißt *Delta-Distribution* („Delta-Funktion") in x_0. Statt δ_0 schreibt man oft δ.

3.12. Lemma. *Es gibt* keine *lokal integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ mit $\delta = T_f$. Die Distribution δ ist also nicht regulär, und Distributionen verallgemeinern die Funktionen daher wirklich.*

Beweis. Da $\delta(\varphi) = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ wäre $\int f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ nach Lemma 3.10. Damit wäre $f(x) = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, somit $f \equiv 0$ Widerspruch. $\lhd$

3.13. Definition. Wir versehen $\mathcal{D}'(\Omega)$ mit der schwach-*-Topologie. Eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ konvergiert damit genau dann gegen $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wenn sie punktweise konvergiert, d.h.

$$T_k\varphi \to T\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

3.14. Operationen mit Distributionen. Man möchte für Distributionen Operationen wie die Multiplikation mit glatten Funktionen, Differentiation, Fourier-Transformation oder Faltung so definieren, dass sich die üblichen Operationen ergeben, falls die Distribution regulär (d.h. von der Form T_f für eine Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$) ist.

(a) Multiplikation mit C^∞-Funktion χ.

Ist $T = T_f$, so soll χT gerade $T_{\chi f}$ sein. Wegen

$$T_{\chi f}(\varphi) = \int \chi f \varphi = \int f \chi \varphi = T_f(\chi\varphi)$$

definiert man allgemein für $T \in \mathcal{D}'(\Omega), \chi \in C^\infty(\Omega)$

$$(\chi T)(\varphi) = T(\chi\varphi).$$

(b) Differentiation. Für $T = T_f$ soll $D^\alpha T$ gerade $T_{D^\alpha f}$ sein. Wegen

$$\begin{aligned} T_{D^\alpha f} &= \int (D^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int f(D^\alpha \varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \end{aligned}$$

für hinreichend glattes f definiert man

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi).$$

Ist $P = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ mit Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty$, so ist

$$(P(T))(\varphi) = \sum_{|\alpha| \le k} (-1)^{|\alpha|} T(D_x^\alpha (a_\alpha \varphi)).$$

(c) Translation. Es sei $y \in \mathbb{R}^n$. Auf Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist der Translationsoperator τ_y definiert durch $(\tau_y \varphi)(x) = \varphi(x+y)$. Wegen

$$T_{\tau_y f}(\varphi) = \int f(x+y)\varphi(x)\, dx = \int f(x)\varphi(x-y) = T_f(\tau_{-y}\varphi)$$

definiert man

$$(\tau_y T)(\varphi) = T(\tau_{-y}\varphi), \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(d) Reflektion. Für Funktionen definiert man

$$f^\vee(x) = f(-x)$$

also definiert man für Distributionen

$$T^\vee(\varphi) = T(\varphi^\vee).$$

(e) Faltung. Ist $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so gilt für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \int (\psi * f)\varphi &= \iint \psi(x-y) f(y) \varphi(x)\, dx\, dy \\ &= \int f(\psi^\vee * \varphi)\, dy \end{aligned}$$

also setzt man für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$(\psi * T)(\varphi) = T(\psi^\vee * \varphi)$$

Eine Alternative dazu: Wir beobachten, dass für $g = \tau_x \psi$ gilt $g(y) = \psi(x+y)$, also $g^\vee(y) = \psi(x-y)$. Somit ist

$$(\psi * f)(x) = \int f(y)(\tau_x \psi)^\vee(y)\, dy = T_f(\tau_x \psi)^\vee.$$

Man definiert daher für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ die Faltung als Funktion (!) $\psi * T$ *punktweise* durch

$$(\psi * T)(x) = T((\tau_x \psi)^\vee).$$

Das Resultat ist sogar eine stetige Funktion. Man zeigt leicht: Diese beiden Definitionen stimmen überein.

Dazu: Sei $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$. Zunächst gilt offensichtlich

$$(\varphi * \psi^\vee)(y) = \int \varphi(x)(\tau_x \psi)^\vee(y)\, dx$$

Analoge Formeln erhalten wir für die partiellen Ableitungen D_y^α. Wähle eine kompakte Menge K so, dass

$$\operatorname{supp}(\tau_x \psi)^\vee \subseteq K \qquad \text{für alle } x \in \operatorname{supp}\varphi,$$

und wähle N entsprechend zu 3.3(c) zu T. Wegen $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ finden wir Riemannsche Zwischensummen

$$h_k(y) = \sum_{x_j \in P_k} \varphi(x_j)(\tau_{x_j}\psi)^\vee(y)\Delta x_j$$

derart, dass

$$h_k \longrightarrow \varphi * \psi^\vee$$

gleichmäßig in allen Ableitungen der Ordnung $\leq N$. Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto T(\tau_x\psi)^\vee$ ist auch $\int T(\tau_x\psi)^\vee\varphi(x)\,dx$ als Grenzwert einer Riemann-Summe darstellbar.

Es folgt: Ist $\psi * T$ als Funktion definiert, so wirkt diese auf $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ durch

$$\begin{array}{lrcl} & (\psi * T)(\varphi) & = & \displaystyle\int (\psi * T)(x)\varphi(x)\,dx \\ & & = & \displaystyle\int T(\tau_x\psi)^\vee\varphi(x)\,dx \\ \text{Gilt für jede Verfeinerung} & & = & \displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{x_j \in P_k} T(\tau_{x_j}\psi)^\vee\varphi(x_j)\Delta x_j \\ \text{T linear} & & = & \displaystyle\lim_{k\to\infty} T\underbrace{\sum(\tau_{x_j}\psi)^\vee\varphi(x_j)\Delta x_j}_{h_k} \\ \begin{array}{l}\text{Glm. Konvergenz von } h_k \text{ in } N \\ \text{Ableitungen gegen } \psi^\vee * \varphi\end{array} & & = & T(\psi^\vee * \varphi). \end{array}$$

Letzteres ist die Wirkung im Sinne der ersten Definition.

Was ist $\partial^\alpha(\psi * T)$? Nach Definition

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\psi * T)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}T(\psi^\vee * \partial^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(\int \psi(-y)(\partial^\alpha\varphi)(x-y)\,dy \\ &= T((\partial^\alpha\psi)^\vee * \varphi) = (\partial^\alpha\psi * T)(\varphi). \end{aligned}$$

Also ist $\partial^\alpha(\psi * T) = \partial^\alpha\psi * T$ ebenfalls eine stetige Funktion. Damit ist $\psi * T \in \mathcal{C}^\infty$.

3.15. Definition.

(a) Wir sagen, dass die Distributionen T_1 und T_2 aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ auf der offenen Menge $U \subseteq \Omega$ übereinstimmen, falls $T_1\varphi = T_2\varphi$ für $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Insbesondere sagt man, dass $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auf U mit der C^∞-Funktion f übereinstimme, falls $T\varphi = T_f\varphi$ für $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$.

(b) Der Träger einer Distribution ist das Komplement der größten offenen Menge, auf der die Distribution mit der Nullfunktion übereinstimmt. Bezeichnung supp T.

(c) Der singuläre Träger ist das Komplement der größten offenen Menge, auf der sie mit einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion übereinstimmt. Bezeichnung sing supp T.

Achtung. Bekanntlich ist $T_f = T_g$, falls $f$und g außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Dass T_f auf U gleich einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ist, heißt also nur, dass f fast überall mit einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion übereinstimmt.

(d) $\mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ ist die Menge aller Distributionen mit kompaktem Träger in Ω.

3.16. Beispiel. δ_0 stimmt auf jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit der Nullfunktion überein. Daher ist $\operatorname{supp}\delta_0 = \{0\}$. Da δ_0 keine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ist, ist auch $\operatorname{sing\,supp}\delta_0 = \{0\}$.

3.17. Faltung (Fortsetzung). Ist $T \in \mathcal{E}', \psi \in \mathcal{C}_c^\infty$, so ist (analog zu 3.14) $\psi * T \in \mathcal{C}_c^\infty$ und

$$\begin{aligned} \langle \psi * T, \varphi\rangle &\overset{\text{Def} *}{=} \langle T, \psi^\vee * \varphi\rangle = \langle T, (\psi * \varphi^\vee)(-\cdot)\rangle \\ &= \langle T^\vee, \varphi^\vee * \psi\rangle = \langle \varphi * T^\vee, \psi\rangle \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist auch definiert, falls $\psi \in \mathcal{D}'$ ist. Für $T \in \mathcal{E}', v \in \mathcal{D}'$ können wir daher $v * T$ definieren durch

$$(v * T)(\varphi) = v(\varphi * T^\vee).$$

Damit ist $v * T \in \mathcal{D}'$.

Ebenso können wir $T * v$ definieren. Es gelten folgende Regeln (vgl. Rudin, FA, Kap. 6, speziell 6.37)

(i) $T * v = v * T$

(ii) $\operatorname{supp} T * v \subseteq \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} v$

(iii) $\partial^\alpha v = (\partial^\alpha \delta) * v = v * (\partial^\alpha \delta)$

(iv) $\partial^\alpha (T * v) = (\partial^\alpha T) * v = T * (\partial^\alpha v)$.

Zu (iii) $(v * \delta)(\varphi) = v(\varphi * \delta^\vee)$. Nun ist $\delta^\vee = \delta$, und $(\varphi * \delta)(\psi) = \delta(\varphi^\vee * \psi) = \int \varphi\psi$, also

$$\varphi * \delta = \varphi$$

somit $v(\varphi * \delta^\vee) = v(\varphi)$.

3.18. Fouriertransformation. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ bzw. $\hat{f}$ als Funktion auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \xi \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Abkürzung: $đx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, dx$

3.19. Wichtige Regeln. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(a) Für $g(x) = f(x+a), h(x) = e^{ixa} f(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\hat{g}(\xi) = e^{ia\xi} \hat{f}(\xi), \hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$$

(b) Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Transformation, so ist nach dem Transformationssatz

$$\int e^{-ix\xi} f(Tx)\, dx = \int e^{-i(T^{-1})u\xi} f(u) |\det T^{-1}|\, du,$$

und somit

$$(f \circ T)^\wedge(\xi) = |\det T|^{-1} \hat{f}\left((T^{-1})^* \xi\right)$$

Insbesondere:

- Ist $g(x) = f(\lambda x), 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\hat{g}(\xi) = |\lambda|^{-n} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$
- Ist T orthogonal (d.h. $T^* = T^{-1}$), so ist $(f \circ T)^\wedge = \hat{f} \circ T$

(c) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{g}$:

$$\int e^{-ix\xi} \int f(x-y) g(y)\, dy dx = \int\int e^{-i(x-y)\xi} f(x-y) e^{-iy\xi} g(y)\, dy dx$$

3.20. Satz von Riemann-Lebesgue. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\widehat{f}$ eine stetige Funktion mit $\|\widehat{f}\|_{\sup} \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$ und $\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Wir schreiben $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Stetigkeit von $\widehat{f}$ folgt sofort aus dem Satz von der dominierten Konvergenz, und die erste Abschätzung ist klar. Zur zweiten:

Ist zusätzlich $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, so ist wegen $(1 - \Delta) e^{-ix\xi} = (1 + |\xi|^2) e^{-ix\xi}$:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^2} \int (1 - \Delta) e^{-ix\xi} f(x)\, dx \overset{\text{part.Int.}}{=} \frac{1}{1 + |\xi|^2} \int e^{-ix\xi} (1 - \Delta) f(x)\, dx.$$

Folglich ist in diesem Fall $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Im allgemeinen Fall finden wir zu $f \in L^1$ eine Folge $f_k \in \mathcal{C}_c^\infty$ mit $\|f_k - f\|_1 \to 0$. Damit ist

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| \le \lim_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}_k(\xi)| + \sup_\xi |\widehat{f}_k(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \le \|f_k - f\|_1 \to 0.$$

◁

3.21. Lemma. *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt*

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \qquad\qquad (x^\beta f)^\wedge(\xi) = (-1)^{|\beta|} D^\beta \hat{f}(\xi)$$

Insbesondere folgt, dass die Fouriertransformation $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ abbildet.

Beweis. Direkte Rechnung zeigt die beiden Identitäten.

Es folgt, dass $\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = (-1)^{|\beta|}(D_x^\alpha(x^\beta f))^\wedge(\xi)$. Nach 3.1(a), (c) ist $D_\alpha(x^\beta f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also die rechte Seite beschränkt nach 3.20. Die Stetigkeit folgt mit 3.1(d). ◁

3.22. Satz. *Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\, dx$$

Beweis. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\int \left\{ \int e^{-iyx} f(y)\, dy \right\} g(x)\, dx = \iint f(y) e^{-iyx} g(x)\, dxdy = \int f(y) \left\{ \int e^{-ixy} g(x)\, dx \right\} dy.$$

◁

3.23. Lemma. *Setze $\psi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{2}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\widehat{\psi}(x) = \psi(x).$$

Beweis. Wegen

$$\int e^{-ix\xi} u(x)\, dx = \Pi_{j=1}^n \int e^{-ix_j\xi_j} u(x_j)\, dx_j$$

genügt es, die Aussage für $n = 1$ zu zeigen.

In diesem Fall erfüllt ψ die gewöhnliche Differentialgleichung $\psi'(x) = -x\psi(x)$.

Für die Fouriertransformierte gilt dies ebenfalls, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int \partial_\xi(e^{-ix\xi})\psi(x)\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int (-ix) e^{-ix\xi}\psi(x)\, dx \\ &\overset{\text{Dgl}}{=} (2\pi)^{-1/2} \int i e^{-ix\xi}\psi'(x)\, dx = -\xi\widehat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Ferner gilt $\psi(0) = (2\pi)^{-1/2} = \widehat{\psi}(0)$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf stimmen die beiden Funktionen überein. ◁

3.24. Inversionsformel. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $\mathcal{F}^4 = \mathrm{Id}$. Also ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektiv und $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$, also

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\, đ\xi$$

Beweis. Es sei $\psi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{2}\right)$. Dann ist $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\|\psi\|_{L^1} = 1$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Mit Lemma 3.23 und 3.19(b) folgt

$$\widehat{\psi(\varepsilon\cdot)} = \psi_\varepsilon(\xi).$$

Wegen $\psi(0) = (2\pi)^{-n/2}$ ergibt sich:

$$\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-ix\xi}\hat{f}(\xi)\,đ\xi \underset{\text{dom. Kvgz}}{\overset{\varepsilon\to 0}{\longleftarrow}} \int \underbrace{e^{-ix\xi}\hat{f}(\xi)}_{=(\widehat{f(\cdot-x)})}\psi(\varepsilon\xi)\,d\xi$$

$$\overset{3.22}{=} \int \widehat{\psi(\varepsilon\cdot)}(\xi)f(\xi - x)\,d\xi = \int \psi_\varepsilon(\xi)f(\xi-x)\,d\xi = (\psi_\varepsilon * f(-\cdot))(x).$$

Nach Folgerung 3.8 gilt:

$$(\psi_\varepsilon * f(-\cdot)) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f(-\cdot) \text{ in } L^1(\mathbb{R}^n).$$

Nun hat bekanntlich jede in L^1 konvergente Folge eine punktweise fast überall konvergente Teilfolge. Es gibt also eine Folge $\varepsilon_k \longrightarrow 0$ mit $(\psi_{\varepsilon_k} * f(-\cdot))(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(-x)$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$. Also $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ f.ü. und somit überall auf $\mathbb{R}^n$, da f und $\hat{\hat{f}}$ stetig sind. ◁

3.25. Folgerung. *Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\int \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\,dx = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Insbesondere ist $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Beweis. Setze $h = \bar{\hat{g}}$. Dann ist

$$h(y) = \overline{\int e^{-ixy}g(x)\,đx} = \int e^{ixy}\overline{g(x)}\,đx = \hat{\bar{g}}(-y).$$

Folglich ist $\hat{h} = (\hat{\bar{g}}(-\cdot))^\wedge \overset{3.24}{=} \bar{g}$, und die Behauptung folgt aus 3.22. ◁

3.26. Satz von Plancherel. Die Fourier-Transformation lässt sich zu einem Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Es gilt

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad f, g \in (\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere ist $\mathcal{F}$ eine Isometrie, d.h. $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ wähle $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $f_k \longrightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nach 3.25 ist $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$, also konvergent, da $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig. Setze $\hat{f} := \lim_{n\to\infty}\hat{f}_n$. ◁

3.27. Fouriertransformation von Distributionen. Für $T \in \mathcal{S}'$ motiviert 3.22 die Definition von $\hat{T} \in \mathcal{S}'$ durch

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$$

3.28. Beispiel. $\hat{\delta}(u) = \delta(\hat{u}) = \hat{u}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int e^{-ix0}u(x)\,dx$. Somit ist $\hat{\delta}$ ist die konstante Funktion $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$

3.29. Lemma. *Für $T \in \mathcal{S}'$ gilt:*

(a) *$uT \in \mathcal{S}'$, falls $u \in \mathcal{C}^\infty$ und samt allen Ableitungen nur polynomial wächst.*

(b) $D^\alpha T \in \mathcal{S}'$

(c) $(D^\alpha T)^\wedge = \xi^\alpha \hat{T}$ *(Produkt im Sinne von (a))*

Beweis.

(a) Es seien $v_n, v \in \mathcal{S}, v_n \longrightarrow v$ in $\mathcal{S}$. Dann gilt $uv_n \longrightarrow uv$ in $\mathcal{S}$ und $(uT)(v_n) = T(uv_n) \longrightarrow T(uv) = (uT)(v)$. Somit ist uT stetig auf $\mathcal{S}$.

(b) analog.

(c) $(D^\alpha T)^\wedge(u) = (D^\alpha T)(\hat{u}) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \hat{u}) = (-1)^{|\alpha|} T((-\xi)^\alpha \hat{u})$.

$\lhd$

3.30. Definition. Es sei $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit $\mathcal{C}^\infty$-Koeffizienten auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Man nennt die Funktion

$$\sigma_L(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) \xi^\alpha$$

das (volle) Symbol von L und

$$\sigma_L^m(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(x) \xi^\alpha$$

das Hauptsymbol.

(b) Man nennt (x_0, ξ_0) nicht-charakteristisch, falls $\sigma_L^m(x_0,\xi_0) \neq 0$.

(c) Die Menge $\operatorname{char} L = \{(x,\xi) : \xi \neq 0, \sigma_L^m(x,\xi) = 0\}$ heißt die Charakteristik von L.

(d) L heißt elliptisch, falls $\operatorname{char} L = \emptyset$.

(e) Man nennt L *lokal lösbar nahe* x_0, falls es eine Umgebung Ω von x_0 gibt mit der Eigenschaft, dass zu jedem $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ ein $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existiert mir $Lu = f$.

Nicht jeder Differentialoperator ist lokal lösbar:

3.31. Beispiel. (Hans Lewy) Auf $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x,y,t) betrachte den Operator

$$L = \partial_x + i\partial_y - 2i(x+iy)\partial_t.$$

Ist $f = f(t)$ stetig und reellwertig, so hat die Gleichung $Lu = f$ in einer Umgebung von $(0,0,0)$ nur dann eine $\mathcal{C}^1$-Lösung, wenn f in einer Umgebung von $t = 0$ analytisch ist, d.h. mit seiner Potenzreihe übereinstimmt.

Beweis. Schreibe $z = x + iy$ und betrachte die Abbildung

$$V : \{r < \varepsilon\} \times \{|t| < 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$V(r,t) = \int_{|z|=r} u(z,t)\, dz$$

Nach dem Satz von Stokes ist

$$V(r,t) = \iint_{B(0,r)} d(u(z,t)\,dz) = \iint_{B(0,r)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dx \wedge i dy \tag{1}$$

$$= i \iint_{B(0,r)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx \wedge dy \tag{2}$$

In Polarkoordinaten ist

$$\begin{aligned}
V(r,t) &= i\int_0^r\int_0^{2\pi}(\partial_x u + i\partial_y u)(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,t)\,\rho\,d\rho d\theta\\
\text{und somit } \partial_r V(r,t) &= i\int_0^{2\pi}(\partial_x u + i\partial_y u)(r\cos\theta, r\sin\theta,t)\,r d\theta\\
&= \int_{|z|=r}(\partial_x u + i\partial_y u)(x,y,t)\,r\frac{dz}{z}.
\end{aligned}$$

Es folgt mit $r(s)=\sqrt{s}$:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(r(s),t) = \frac{\partial V}{\partial r}(r(s),t)\frac{\partial r}{\partial s}(s) = \frac{\partial V}{\partial r}(r(s),t)\frac{1}{2r(s)} = \frac{1}{2}\int_{|z|=r(s)}(\partial_x u + i\partial_y u)\frac{dz}{z}$$

Gilt $Lu=f$, so folgt $\partial_x u + i\partial_y u = 2iz\partial_t u + f$, also

$$\frac{\partial V}{\partial s} = i\int_{|z|=r}\partial_t u(z,t)\,dz + \frac{1}{2}\int_{|z|=r} f(t)\frac{dz}{z} = i\frac{\partial V}{\partial t} + i\pi f(t).$$

Setzen wir also $F(t)=\int_0^t f(\theta)\,d\theta$ und $U(s,t)=V(s,t)+\pi F(t)$, so folgt

$$\frac{\partial U}{\partial t} + i\frac{\partial U}{\partial s} = 0.$$

Damit erfüllt U die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung in dem Gebiet

$$\{t+is : 0<s<\varepsilon^2, |t|<\varepsilon\}$$

ist dort also holomorph. Ferner ist U stetig bis an $s=0$ heran; es gilt

$$U(0,t) = 0+\pi F(t)\in\mathbb{R} \qquad \text{da } f \text{ reellwertig.}$$

Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip können wir U fortsetzen auf

$$\{t+is : |s|<\varepsilon^2, |t|<\varepsilon\}.$$

Insbesondere ist $\pi F(t) = U(0,t)$ analytisch in t. Somit ist auch $f=F'$ analytisch. $\lhd$

Wie die folgenden Sätze zeigen, ist die Situation für Operatoren mit *konstanten* Koeffizienten besser.

3.32. Satz. *Ein linearer Differentialoperator mit* konstanten *Koeffizienten ist auf* $\mathbb{R}^n$ *lokal lösbar.*

Beweisskizze. Da f kompakten Träger hat, können wir annehmen, dass u außerhalb einer kompakten Menge verschwindet. Insbesondere ist dann $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Es sei $L=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha D^\alpha$, $l(\xi)=\sum a_\alpha\xi^\alpha$ und $f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Naiv:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & l(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\\
\overset{?}{\Rightarrow} \qquad & \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{l(\xi)}\\
\overset{?}{\Rightarrow} \qquad & u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{l(\xi)}\,d\xi.
\end{aligned}$$

Das geht tatsächlich gut, wenn l von Null weg beschränkt ist. Im Allgemeinen ist aber $\hat{f}/l$ nicht einmal lokal integrierbar, wenn l Nullstellen hat. Wir machen folgende Beobachtungen:

- $\hat{f}$ hat eine Fortsetzung zu einer ganzen Funktion ($\hat{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$)
- Da das Hauptsymbol $\neq 0$ ist, können wir (ggf. nach Koordinatentransformation) annehmen, dass der Vektor $(0, \dots, 0, 1)$ nichtcharakteristisch ist. Wir können dann den Koeffizienten von ξ_n^m abdividieren. O.B.d.A. hat also l die Form $l(\xi) = \xi_n^m +$ Terme niedrigerer Ordnung in ξ_n.
- Wir betrachten, für festes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $l(\xi', \xi_n)$ als Polynom in ξ_n. Mit $\lambda_1(\xi'), \dots, \lambda_m(\xi')$ bezeichnen wir seine Nullstellen. Wir ordnen sie so, dass für $j \leq k$ gilt $\operatorname{Im} \lambda_j \leq \operatorname{Im} \lambda_k$ und $\operatorname{Re} \lambda_j \leq \operatorname{Re} \lambda_k$, falls $\operatorname{Im} \lambda_j = \operatorname{Im} \lambda_k$
- Da die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängen, ist die Funktion $\xi' \mapsto \operatorname{Im} \lambda_j(\xi')$ ist stetig.

Nun braucht man Lemmata:

3.33. Lemma. *Es gibt eine messbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow [-m-1, m+1]$ derart, dass für alle $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt:*

$$\min_{j=1}^{m} \left\{ |\varphi(\xi') - \operatorname{Im} \lambda_j(\xi')| \right\} \geq 1$$

Beweis. Für festes ξ' enthält die Menge $\{\operatorname{Im} \lambda_j(\xi'), j = 1, \dots, m\}$ höchstens m verschiedene Elemente. Von den $m+1$ Intervallen $[2k-m-1, 2k-m+1), k = 0, \dots, m$, enthält also eines keines davon, und wir setzen

$$V_k := \{\xi' : \operatorname{Im} \lambda_j(\xi') \notin [2k-m-1, 2k-m+1) : j = 1, \dots, m\}$$

Die Mengen $V_0, \dots, V_m$ überdecken also $\mathbb{R}^{n-1}$. Sie sind messbar, da $\xi' \mapsto \operatorname{Im} \lambda_j(\xi')$ stetig ist. Wir setzen

$$\varphi(x) = 2k - m, \text{ falls } x \in V_k \setminus \bigcup_{0}^{k-1} V_m \quad k = 0, \dots, m.$$

$\triangleleft$

3.34. Lemma. *Das Polynom g habe Grad m, Höchstkoeffizient 1, Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, alle $\neq 0$. Setze $d := \min\{|\lambda_j| : j = 1, \dots, m\}$.*

Dann ist $|g(0)| \geq d^m$.

Beweis. Klar, weil $g(z) = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)$. $\triangleleft$

3.35. Lemma. *Es sei $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\widehat{f}$ fortsetzbar zu einer ganzen Funktion. Variiert $\operatorname{Im} \xi$ nur über eine beschränkte Menge, so ist $\widehat{f}(\xi)$ (gleichmäßig) schnellfallend für $|\operatorname{Re} \xi| \longrightarrow \infty$.*

Beweis. Schreibe $\xi = \rho + i\eta, \rho, \eta \in \mathbb{R}^n$.

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} f(x)\, đx = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\rho} \underbrace{[e^{+x\eta} f(x)]}_{\in \mathcal{C}_c^\infty} đx$$

$\triangleleft$

Damit schließen wir den Beweis von 3.32 ab. Wir setzen

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{l(\xi)}\, đ\xi_n đ\xi'$$

mit φ aus 3.33. Nach Lemma 3.34 (angewandt auf $g(z) = l(\xi', \xi_n + z)$) wissen wir, dass $l(\xi', \xi_n) \geq 1$ auf $\{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')\}$ gilt (Beachte: die Nullstellen von g sind die Werte $\lambda_j(\xi') - \xi_n$, diese haben auf $\{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')\}$ Betrag ≥ 1). Aus Lemma 3.35 wissen wir, dass $\widehat{f}(\xi)/l(\xi)$ für $\{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')\}$

(beschränkt!) schnellfallend in $\operatorname{Re}(\xi', \xi_n)$ ist. Das obige Integral existiert also. Wir können unter dem Integral differenzieren und erhalten

$$Lu(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, đ\xi_n đ\xi'.$$

Da der Integrand holomorph ist und schnell fällt, ist nach Cauchy

$$\int_{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')} \dots\, d\xi_n = \int \dots\, d\xi_n$$

und somit $Lu = f$. ◁

3.36. Definition. Eine Fundamentallösung für einen linearen Differentialoperator L mit konstanten Koeffizienten ist eine Distribution $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $LK = \delta$.

3.37. Lemma. *Hat L eine Fundamentallösung $K \in \mathcal{D}$, so ist L lokal lösbar.*

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{C}_c^\infty$. Setze $u := K * f$. Dann gilt $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$Lu = L(K * f) = LK * f = \delta * f = f$$

nach 3.17. ◁

3.38. Satz. (Malgrange-Ehrenpreis). *Jeder lineare Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten hat eine Fundamentallösung.*

Beweis. Definiere K auf $\mathcal{C}_c^\infty$ durch (Bezeichnungen wie beim Beweis von 3.32)

$$Kf = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')} \frac{\hat{f}(-\xi)}{l(\xi)}\, đ\xi_n đ\xi.$$

Man sieht leicht, dass K stetig ist: Wähle k so groß, dass $2k > n$ ist. Das Integral ist dann beschränkt durch

$$\sup_{|\operatorname{Im} \xi_n| \le k} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{f}(\xi)| \int (1 + |\xi|^2)^{-k}\, đ\xi \le c' \|(1 - \Delta)^k f\|_{L^1} \le c'' \|(1 - \Delta)^k f\|_{sup}$$

wobei c'' nur vom Träger von f abhängt. Also ist $K \in \mathcal{D}'$. Ferner ist

$$LK(f) \overset{\text{Def}}{=} K(L'f), \text{ wobei } L' = \sum a_\alpha (-D)^\alpha$$

Dabei ist $(L'f)^\wedge(\xi) = l(-\xi)\hat{f}(\xi)$. Es folgt

$$LK(f) \;=\; (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\operatorname{Im} \xi_n = \varphi(\xi')} \hat{f}(-\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(0) = \delta(f).$$

Also ist $LK = \delta$. ◁

3.39. Bemerkung. Es ist nicht möglich, $K \in \mathcal{E}'$ zu finden: Dann wäre nämlich $\widehat{K} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ und $\sigma_L(\xi)\widehat{K}(\xi) = \widehat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}$ Widerspruch.

3.40. Definition. Ein Differentialoperator mit $\mathcal{C}^\infty$-Koeffizienten heißt *hypoelliptisch* auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, falls die Glattheit von L die von u erzwingt: $Lu \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Bemerkung. Wir werden später sehen: Jeder elliptische Operator ist hypoelliptisch.

3.41. Satz. *Für einen Differentialoperator L mit konstanten Koeffizienten ist äquivalent:*

(i) *L ist hypoelliptisch*

(ii) *Jede Fundamentallösung ist $\mathcal{C}^\infty$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

(iii) *Eine Fundamentallösung ist $\mathcal{C}^\infty$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma

3.42. Lemma. *Es sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $T * E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} E)$.*

Beweis. Sei $x \notin \operatorname{supp} E$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $B(x, \varepsilon) \cap \operatorname{supp} E = \emptyset$. Wähle $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0, \frac{\varepsilon}{2}))$ mit $\varphi \equiv 1$ nahe 0. Dann ist

$$T * E = \varphi T * E + (1 - \varphi) T * E$$

Nun ist (vgl. 3.17)

$$\operatorname{supp}(\varphi T * E) \subseteq \operatorname{supp} \varphi + \operatorname{supp} E \text{ disjunkt zu } B(x, \frac{\varepsilon}{2}),$$

also $\varphi T * E = 0$ auf $B(x, \varepsilon/2)$. Nahe x ist also $T * E = (1 - \varphi) T * E$. Andererseits ist $(1 - \varphi) T$ durch eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion gegeben, also ist auch $(1 - \varphi) T * E$ durch $\mathcal{C}^\infty$-Funktion gegeben. $\lhd$

Beweis von Satz 3.41:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei K eine Fundamentallösung. Dann ist $LK = \delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, also wegen der Hypoelliptizität $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es sei $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ eine Fundamentallösung, $u \in \mathcal{D}'$, $Lu \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Zeige: Zu jedem $x \in \Omega$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $u \in \mathcal{C}^\infty(B(x, \varepsilon))$.

Zu $x \in \Omega$ wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B(x, 2\varepsilon) \subseteq \Omega$; wähle $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x, 2\varepsilon))$ mit $\varphi \equiv 1$ auf $B(x, \varepsilon)$. Wir schreiben

$$L(\varphi u)) = \varphi L u + v;$$

dabei ist $v \equiv 0$ auf $B(x, \varepsilon)$, weil dort $\varphi \equiv 1$ und somit $L(\varphi u) = Lu = \varphi L u$.

Es folgt

$$\varphi u = \delta * \varphi u = LK * \varphi u = L(K * \varphi u) \overset{3.17}{=} K * L\varphi u = K * \varphi L u + K * v.$$

Nun ist $\varphi L u \in \mathcal{C}_c^\infty$, also ist $K * \varphi L u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ während $K * v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} v)$ glatt ist nahe x, vgl. Lemma 3.42. $\lhd$