2. Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Motivation: Transportgleichung und Wellengleichung.

2.1. Transportgleichung. $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ mit $t, x \in \mathbb{R}, 0 \neq c \in \mathbb{R}$. Wegen $\partial_v u = \langle \nabla u, v\rangle$ besagt die Differentialgleichung, dass die Richtungsableitung von u in der (t,x)-Ebene in Richtung $(1,c)$ Null ist, d.h., u ist in Richtung $(1,c)$ konstant. Wir betrachten daher für $\xi \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung auf der Geraden $g_\xi = \{(t, \xi + ct) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$. M.a.W.: Wir betrachten die Funktion

$$v_\xi(t) = u(t, \xi + ct).$$

Dann ist (Kettenregel)

$$\dot{v}_\xi(t) = \partial_t u(t, \xi + ct) + c\partial_x u(t, \xi + ct) = 0,$$

d.h. $v_\xi \equiv \text{const} = f(\xi)$ für eine Funktion f. Mit der Rücksubstitution $\xi + ct = x$ erhalten wir

$$u(t, x) = f(x - ct)$$

für eine geeignete Funktion f. Umgekehrt ist jede solche Funktion mit differenzierbarem f eine Lösung.

2.2. Die eindimensionale Wellengleichung.

(1) $$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0 \qquad x, t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bei Anwendung auf eine $\mathcal{C}^2$-Funktion u können wir schreiben

$$(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u.$$

Wir zerlegen damit (1) in eine System von zwei partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$(\partial_t - c\partial_x)u = v$$
$$(\partial_t + c\partial_x)v = 0.$$

Nach 2.1 ist $v(x,t) = f(x - ct)$ für beliebiges $f \in \mathcal{C}^1$; folglich ist

$$(\partial_t - c\partial_x)u = f(x - ct).$$

Nun schreiben wir $x = \xi - ct$ und betrachten die Funktion $w_\xi(t) = u(t, \xi - ct)$. Dann ist

$$\dot{w}_\xi(t) = \partial_t u(t, \xi - ct) - c\partial_x u(t, \xi - ct) = v(t, \xi - ct) = f(\xi - 2ct).$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung können wir leicht lösen: Es sei F eine Stammfunktion zu $-\frac{1}{2c}f$, d.h.

$$F' = -\frac{1}{2c}f.$$

Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}F(\xi - 2ct) = f(\xi - 2ct),$$

also

$$w_\xi(t) = F(\xi - 2ct) + G(\xi),$$

wobei $G(\xi)$ eine geeignete, von ξ abhängige Konstante ist. Rücksubstitution liefert

(2) $$u(t,x) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Beachte: Da f eine $\mathcal{C}^1$-Funktion ist, ist F eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. Ist also $u \in \mathcal{C}^2$, so auch G. Umgekehrt zeigt eine kurze Rechnung, dass jede Funktion von der Form (2) mit $F, G \in \mathcal{C}^2$ die Wellengleichung löst.

Oft schreibt man für die Wellengleichung die Werte

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \partial_z u(0,x) = u_1(x)$$

vor. Dann folgt

$$F(x) + G(x) = u_0(x) \text{ und } -cF'(x) + cG'(x) = u_1(x).$$

Somit ist

$$F' + G' = u_0' \text{ und } -F'(x) + G'(x) = -\frac{u_1(x)}{c},$$

so dass

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left(u_0(x) + \frac{1}{c}\int_0^x u_1(s)\right) + C_1 \\ G(x) &= \frac{1}{2}\left(u_0(x) - \frac{1}{c}\int_0^x u_1(s)\right) + C_2 \end{aligned}$$

mit Konstanten C_1, C_2. Dabei gilt $C_1 + C_2 = 0$, da $F(x) + G(x) = u_0(x)$. Insgesamt erhalten wir als Lösung der Wellengleichung mit Anfangswerten u_0 und u_1:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds.$$

2.3. Bemerkung. Dieses Verfahren funktioniert nicht in höheren Dimensionen, da dann $\partial_t^2 - \Delta$ nicht so leicht faktorisierbar ist.

Die quasilineare Gleichung. Wir wollen nun auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ die quasilineare partielle Differentialgleichung

$$\sum a_j(x,u)\partial_{x_j} u = b(x,u), x \in U,$$

lösen. So wie für gewöhnlichen Differentialgleichungen die Angabe „$x(t_0) = x_0$“ die Lösung festlegt, schreiben wir nun die Werte auf einer Hyperfläche vor. Allerdings darf diese nicht ungünstig liegen: Stichwort „nicht-charakteristisch“.

2.4. Hyperflächen. Hyperflächen sind $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$. Wir erinnern uns: Eine Hyperfläche S ist lokal gegeben als Nullstellenmenge.

> Zu jedem $s \in S$ existieren eine offene Umgebung V von s in $\mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $\Phi : V \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in V$ und
> $$V \cap S = \{x : \Phi(x) = 0\} = \Phi^{-1}(0).$$

Alternativ haben wir die Parameterdarstellung

> Zu jedem $s \in S$ existieren $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, eine Umgebung V von s in S und eine Abbildung $g : T \to \mathbb{R}^n$ mit Rang $g'(t) = n-1$ auf T und
> $$g(T) = S \cap V.$$

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *tangential* an die Hyperfläche S in $x \in S$, falls eine differenzierbare Abbildung

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

existiert, mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha'(0) = v$.

Der *Tangentialraum* an S in x, T_xS, ist die Menge aller Tangentialvektoren in x. Wir wissen: T_xS ist $(n-1)$-dimensionaler Vektorraum.

Die *Kotangentialvektoren* sind die stetigen Linearformen auf T_xS. Bezeichnung T_x^*S. Wir wissen: $\dim T_x^*S = n-1$. Speziell: $\nu \in \mathbb{R}^n$ heißt *normal* zur Hyperfläche S in x, falls ν zu allen Tangentialvektoren normal steht:

$$\nu(v) = 0 \quad \text{für alle } v \in T_xS.$$

Die Normalenvektoren in x bilden einen eindimensionalen Vektorraum in $\mathbb{R}^n$.

2.5. Beispiel. Die Sphäre $S = S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir definieren $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = 1 - |x|^2$$

Dann ist Φ differenzierbar und $\operatorname{grad}\Phi(x) = -2x \neq 0$ für $x \in S$ und

$$S^{n-1} = \Phi^{-1}(0).$$

2.6. Bemerkung. Ist S lokal von der Form $\Phi^{-1}(c)$, so ist $\operatorname{grad}\Phi$ ein Normalenvektor an S, da der Gradient auf der Niveaufläche $\{x : \Phi(x) = c\}$ senkrecht steht.

Ist S lokal gegeben als Bild der Funktion $g = (g_1, \ldots, g_n)$, so spannen $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}$ den Tangentialraum auf.

2.7. Beispiel. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und S eine Hyperfläche in U. Gesucht ist die Lösung der quasilinearen Gleichung

$$Lu(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x, u)\partial_{x_j} u = b(x, u),\ x \in U, \qquad u|_S = \varphi$$

Wir setzen $a := (a_1, \ldots, a_n)$. Für festes $s \in S$ ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(s, \varphi(s))\partial_{x_j} u = \langle a(s, \varphi(s)), \nabla u(s)\rangle$$

eine Richtungsableitung von u.

Ist der Vektor $a(s)$ tangential an S, so bringt uns dies in Schwierigkeiten, da wir $u = \varphi$ auf S vorgegeben haben, somit auch die Richtungsableitung.

Wir werden also fordern, dass $a(x)$ nirgends tangential an S ist. Man nennt dann S *nicht-charakteristisch* für L. (Eigentlich definiert man dies in anderer, aber äquivalenter Form.)

2.8. Vektorfelder und Flüsse. Es sei V ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir suchen zu V einen Fluss, d.h. für jedes x_0 suchen wir eine Funktion $\Phi(t; x_0)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{d}{dt}\Phi(t; x_0) = V(\Phi(t; x_0)), \quad \Phi(0; x_0) = x_0.$$

Dies ist gerade die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} = V(x), x(0) = x_0,$$

Wegen der Differenzierbarkeit von V garantiert uns der Satz von Picard und Lindelöf eine Lösung auf einem Intervall J_{x_0} um $t = 0$. Variiert x_0 über eine kompakte Menge, so erhalten wir sogar ein gleichmäßiges Existenzintervall.

Man nennt $\Phi(\cdot; x_0)$ auch eine Integralkurve des Vektorfelds.

2.9. Satz. *Es sei S eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ und V ein Vektorfeld, das in einer Umgebung von S definiert und nirgends tangential an S ist.*

Für jedes x_0 in S bilden wir die Funktion $\Phi(t; x_0)$ für $t \in J_{x_0}$. Dann liefert die Abbildung

$$(t, x_0) \mapsto \Phi(t; x_0)$$

einen Diffeomorphismus von einer Umgebung von $\{0\} \times S$ in $\mathbb{R} \times S$ auf eine offene Umgebung von S.

Man sagt eine Umgebung von S werde von Integralkurven des Vektorfelds abgedeckt.

Beweis. Wir schreiben S lokal als Graph von $g : T \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ und wenden den Satz von der inversen Funktion an. Die Ableitung der Funktion $(t,s) \mapsto \Phi(t; g(s))$ in $(0, g(s))$ ist wegen $\Phi(0, g(s)) = g(s)$

$$\big(\partial_t \Phi(0; g(s)), \partial_{s_1} \Phi(0; g(s)), \ldots \partial_{s_{n-1}} \Phi(0; g(s))\big) = \big(V(g(s)), \partial_{s_1} g(s), \ldots \partial_{s_{n-1}} g(s)\big)\,.$$

Diese Matrix ist invertierbar, falls V nicht tangential an S ist. Damit ist die Abbildung $(t,s) \mapsto \Phi(t; s)$ lokal ein Diffeomorphismus. Indem wir S mit Koordinatenumgebungen überdecken erhalten wir eine surjektive differenzierbare Abbildung. Durch Restriktion auf eine möglicherweise kleinere Umgebung von $\{0\} \times S$ erhalten wir Injektivität. $\triangleleft$

2.10. Die quasilineare Gleichung 1. Ordnung. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathcal{C}^1(U \times \mathbb{R})$, S eine $\mathcal{C}^1$-Hyperfläche und $\varphi \in \mathcal{C}^1(S)$. Wir betrachten die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u) \partial_{x_j} u(x) = b(x, u), \quad x \in U$$

mit der Randbedingung

$$u|_S = \varphi.$$

Wir machen zuerst folgende Beobachtung: Es sei u eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und

$$\operatorname{Graph} u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = u(x)\}$$

ihr Graph. Der Tangentialraum an den Graphen in $(x, u(x))$ wird nach Bemerkung 2.6 aufgespannt durch die Vektoren

$$(1, 0, \ldots, 0, \partial_{x_1} u)\,, \ldots, (0, 0, \ldots, 1, \partial_{x_n} u)\,.$$

Die Normale an den Graphen in $(x, u(x))$ ist daher die Menge der Vielfachen des Vektors

$$(\partial_{x_1} u(x), \ldots, \partial_{x_n} u(x), -1).$$

Die geometrische Interpretation der obigen partiellen Differentialgleichung ist also folgende: Das Vektorfeld

$$A(x, y) := (a_1(x, y), \ldots, a_n(x, y), b(x, y))$$

hat Skalarprodukt Null mit der Normale; es ist also tangential an den Graphen von u in (x, y).

Über S kennen wir den Graphen von u, da $u|_S = \varphi$. Man erhält also in einer Umgebung von S eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, indem man dem Fluss des Vektorfelds A folgt, wobei die Anfangswerte die Werte von $u (= \varphi)$ über S sind.

Damit das gut geht, darf das Vektorfeld $a = (a_1, \ldots, a_n)$ nicht tangential an S sein, da ansonsten

$$\sum a_i(x, u) \partial_{x_i} u - b(x, u)$$

bereits bestimmt wäre.

Wir können daher den folgenden Satz formulieren:

2.11. Satz. *Es sei S eine $\mathcal{C}^1$-Hyperfläche in dem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$, a_j, b reellwertige $\mathcal{C}^1$-Funktionen auf $U \times \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathcal{C}^1(S)$ reellwertig. Für $x \in S$ sei der Vektor*

$$a(x) = (a_1(x, \varphi(x)), \ldots, a_n(x, \varphi(x))$$

nicht tangential an S.

Dann gibt es in einer hinreichend kleinen Umgebung von S genau eine Lösung u der quasilinearen Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u) \partial_{x_j} u(x) = b(x, u).$$

Der folgende *Beweis* enthält die expliziten Lösungsschritte:

Wir schreiben lokal $S = \{g(s) : s \in T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\}$ und lösen die Flussgleichung für A, d.h. das von dem Parameter $s \in T$ abhängige Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & \dot{x}(t;s) &= a(x(t;s), y(t;s)), \qquad & x(0;s) &= g(s),\\
&(2) \qquad & \dot{y}(t;s) &= b(x(t;s), y(t;s)), \qquad & y(0;s) &= \varphi(g(s))
\end{aligned}$$

durch $\mathcal{C}^1$-Funktionen x, y. Dies geht nach Picard und Lindelöf; die Lösung hängt $\mathcal{C}^1$ ab von s.

Wir definieren dann u implizit als Funktion von (t,s):

$$(3) \qquad u(x(t;s)) := y(t;s).$$

Dies liefert die Lösung.

Ausführlich:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j(x(t;s))\partial_{x_j} u(x(t;s)) &\overset{(3)}{=} \dot{y}(t;s) = b(x(t;s), y(t;s))\\
u(g(s)) = u(x(0;s)) &= y(0;s) = \varphi(g(s))
\end{aligned}$$

d.h. die implizit gegebene Funktion u löst die Differentialgleichung. In einer Umgebung von S kann dann der Koordinatenwechsel $(t,s) \mapsto x$ durchgeführt werden.

Eindeutigkeit: Wir wissen, dass die Flusslinien von $A = A(x,y)$ aus 2.10 tangential an den Graphen von u sind. Daher müssen die Differentialgleichungen (1)/(2) gelten. Ihre Lösung ist nach Picard-Lindelöf eindeutig. $\triangleleft$

2.12. Beispiel. Wir lösen $u\partial_{x_1}u + \partial_{x_2}u = 1$ auf der Hyperfläche

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2 \quad 0 < x_1, x_2 < 1\}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x_1, x_1) = \frac{1}{2}x_1, \quad (x_1, x_1) \in S.$$

Wir stellen S parametrisch dar: $S = \{g(s)\}$ mit $g : (0,1) \to \mathbb{R}^2, g(s) = (s,s)$. Ferner

$$a = (u, 1), \quad b = 1, \quad \varphi(s,s) = \frac{1}{2}s.$$

Nicht-Tangentialität erfordert

$$0 \neq \det\left(\frac{\partial g}{\partial s}(s), a(g(s), \varphi(g(s)))\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}s;$$

dies ist für $0 < s < 1$ erfüllt.

Wir lösen das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & \dot{x}_1(t;s) &= a_1(x(t;s), y(t;s)) = y(t;s), \qquad & x_1(0;s) &= g_1(s) = s;\\
&(2) \qquad & \dot{x}_2(t;s) &= a_2(x(t;s), y(t;s)) = 1, \qquad & x_2(0;s) &= g_2(s) = s;\\
&(3) \qquad & \dot{y}(t;s) &= b(x(t;s), y(t;s)) = 1, \qquad & y(0;s) &= \varphi(g(s)) = \frac{1}{2}s.
\end{aligned}$$

Aus (2) und (3) folgt sofort

$$\begin{aligned}
y(t;s) &= t + \frac{1}{2}s;\\
x_2(t;s) &= t + s.
\end{aligned}$$

Damit lautet (1)

$$\dot{x}_1 = t + \frac{1}{2}s, \quad x_1(0;s) = s.$$

Damit ist

$$x_1(t;s) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st + s = \frac{1}{2}t(t+s) + s$$

Wir lösen auf nach s und t:

$$\begin{aligned}
t + s &= x_2 \\
\frac{1}{2}t(t+s) + s &= x_1 \\
\Rightarrow \frac{t}{2}x_2 + (x_2 - t) &= x_1 \\
\Rightarrow t\left(\frac{x_2}{2} - 1\right) &= x_1 - x_2 \\
\Rightarrow t &= \frac{x_1 - x_2}{\frac{x_2}{2} - 1} \\
&= \frac{2(x_1 - x_2)}{x_2 - 2} \\
\Rightarrow s &= x_2 - t \\
&= \frac{x_2^2 - 2x_2 - 2x_1 + 2x_2}{x_2 - 2} \\
&= \frac{x_2^2 - 2x_1}{x_2 - 2}.
\end{aligned}$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}
u(x(t;s)) &= y(t;s) = t + \frac{s}{2} = \frac{4x_1 - 4x_2 + x_2^2 - 2x_1}{2(x_2 - 2)} \\
&= \frac{2x_1 + x_2^2 - 2x_2}{2(x_2 - 2)}
\end{aligned}$$

2.13. Satz. *Die allgemeine Gleichung 1. Ordnung $F(x, u, \nabla_x u) = 0$ für x in einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ mit der Vorgabe $u|_S = \varphi$ auf der Hyperfläche S in U ist nahe S eindeutig lösbar, sofern $F \in \mathcal{C}^2$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$ und die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Schreibe $F = F(x, y, z)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$, und S lokal als $S = \{g(s) : s \in T \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$. Dann hat das System von n Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s_j}\varphi(g(s)) = \sum z_k(0;s)\,\frac{\partial g_k(s)}{\partial s_j}, \quad 1 \le j \le n-1 \\
&F(g(s), \varphi(g(s)), z(0;s)) = 0
\end{aligned}$$

eine $\mathcal{C}^1$-Lösung $z(0; g(s))$, und $\nabla_z F(g(s), \varphi(g(s)), z(0;s))$ ist nicht-tangential an S.

Beweis. Wie im quasilinearen Fall versuchen wir eine Lösung - sofern sie existiert - über ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für $x(t)$, $y(t) = u(x(t))$ und $z(t) = \nabla_x u(x(t))$ zu bestimmen. Der Idee eines Kartenwechsels nahe S folgend, setzen wir

$$\dot{x}(t) = \nabla_z F(x(t), y(t), z(t)). \tag{1}$$

Aus $y(t) = u(x(t))$ folgt

$$\dot{y} = \nabla_x u(x(t))\dot{x}(t) \overset{(1)}{=} z(t)\nabla_z F(x(t), y(t), z(t)). \tag{2}$$

Schließlich ist

$$\dot z_j(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x(t))\Big) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_j}(x(t))\dot x_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_j}(x(t))\frac{\partial F}{\partial z_k}(x(t), y(t), z(t)).$$

Die rechte Seite kennen wir nicht. Differenziert man die Gleichung $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ nach x_j, so erhält man sie jedoch (mit Satz von Schwarz) als dritten Summanden der folgenden Identität:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, u(x), \nabla u(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, u(x), \nabla u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_k}(x, u(x), \nabla u(x))\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)(x).$$

Einsetzen in die obige Gleichung liefert

$$\dot z(t) = -\nabla_x F(x(t), y(t), z(t)) - \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))z(t). \tag{3}$$

Gleichungen (1), (2) und (3) liefern ein System von $2n+1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Als Anfangswerte setzen wir

$$x(0; s) = g(s), \tag{4}$$

$$y(0; s) = \varphi(g(s)). \tag{5}$$

Wir brauchen nun noch Anfangswerte für ∇u. Dazu betrachten wir φ auf S. Dort ist

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\varphi(g(s)) \overset{u|_S=\varphi}{=} \sum \frac{\partial u}{\partial x_k}(g(s))\frac{\partial g_k(s)}{\partial s_j} \overset{!}{=} \sum z_k(0; s)\,\frac{\partial g_k(s)}{\partial s_j}, \tag{6}$$

$1 \le j \le n-1$. Ferner gilt

$$F(g(s), \varphi(g(s)), z(0; s)) = 0. \tag{7}$$

Nach Annahme haben die n Gleichungen (6) und (7) für $z_1(0; g(s)), \dots, z_n(0; g(s))$ eine Lösung.

Aus dieser Anfangswertaufgabe lässt sich auch u in einer Umgebung von S als Lösung von $u(x(t)) = y(t)$ bestimmen, sofern

$$\Phi : (s, t) \mapsto (g(s), x(t; s))$$

einen Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung von $T \times \{0\}$ auf eine offene Umgebung von S liefert. Dazu wenden wir den Satz von der inversen Funktion an und berechnen

$$\Phi'(s, t) = \Big(\frac{\partial g(s)}{\partial s_1}, \dots \frac{\partial g(s)}{\partial s_{n-1}}, \nabla_z F(g(s), \varphi(g(s)), z(0; s))\Big).$$

Da $\nabla_z F(g(s), \varphi(g(s)), z(0; s))$ nicht tangential an S ist, ist Φ' invertierbar.

Eindeutigkeit folgt wieder mit dem Satz Picard-Lindelöf. $\triangleleft$

Die Entwicklung von Singularitäten und schwache Lösungen.

2.14. Beispiel. Wir lösen auf $\mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$u_x + uu_y = 0 \text{ mit } u(0, y_0) = h(y_0),\ y_0 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Die Flussgleichungen (mit $a = (1, u)$, $A = (1, u, 0)$):

$$\begin{aligned} \dot x &= 1; \quad x(0) = 0;\\ \dot y &= z; \quad y(0) = y_0;\\ \dot z &= 0, \quad z(0) = h(y_0). \end{aligned}$$

liefern:

$$x(t) = t, \quad z(t) \equiv h(y_0), \quad y(t) = h(y_0)t + y_0$$

und u als Lösung von

$$u\left(t, h(y_0)t + y_0\right) = h(y_0).$$

Damit hat u den konstanten Wert $h(y_0)$ auf der Geraden durch $(0, y_0)$ mit Steigung $h(y_0)$.

Wir wissen, dass die Abbildung $(t, y_0) \mapsto (x, y)$ *lokal* ein Diffeomorphismus ist. Dies liefert die implizite Gleichung $(x = t, y = h(y_0)t + y_0)$:

$$u(x, y) = h(y_0) = h\left(y - h(y_0)x\right) = h(y - u(x, y)x)\,.$$

bzw. kurz

$$u(x, y) = h(y - ux).$$

Global bekommen wir aber ein Problem, da sich für unterschiedliche Steigungen die Geraden schneiden. Konkret: Die Geraden $\{(t, y_0 + h(y_0)t) : t \in \mathbb{R}\}$ und $\{(s, y_1 + h(y_1)s) : s \in \mathbb{R}\}$ schneiden sich für

$$s = t = -\frac{y_0 - y_1}{h(y_0) - h(y_1)}.$$

Gilt also $h(y_0) \neq h(y_1)$ und existiert die Lösung, so müsste sie in diesem Punkt die unterschiedlichen Werte $h(y_0)$ und $h(y_1)$ annehmen.

Nehmen wir an, dass $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), h \neq 0$. Dann tritt dieses Szenario ein und u hört irgendwo entlang einer Geraden durch $(0, y_0)$ auf zu existieren.

Wie? Wegen $u(x, y) = h(y - ux)$ ist

$$u_y(x, y) = h'(y - ux)(1 - u_y x) = h'(y_0)(1 - u_y(x, y)x).$$

Dies liefert

$$u_y(x, y) = \frac{h'(y_0)}{1 + h'(y_0)x}.$$

Ist z.B. $h'(y_0) < 0$, so wird u_y für $x = -1/h'(y_0)$ unendlich. Wählen wir für y_0 den Punkt $y_{\min}$, in dem h' sein Minimum annimmt, so folgt, dass es keine $\mathcal{C}^1$-Lösung für $x > -1/h'(y_{\min})$ gibt. Dieses sog. *blow-up*-Verhalten ist typisch für nichtlineare partielle Differentialgleichungen.

2.15. Schwache Lösungen. Wir betrachten wieder das obige Beispiel. Es gibt verallgemeinerte Lösungen von 2.14(1), die für größere Zeiten existieren, jedoch nicht $\mathcal{C}^1$ sind.

Dazu formuliert man 2.14(1) um in *Divergenzform*:

$$\frac{\partial}{\partial x} R(u(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y} S(u(x, y)) = 0, \tag{1}$$

wobei $R(u), S(u)$ beliebige $\mathcal{C}^1$-Funktionen sind mit $S'(u) = uR'(u)$ und $R'(u) \neq 0$ für alle u.

Beachte: (1) liefert $R'(u)u_x + S'(u)u_y = R'(u)(u_x + uu_y) = 0$.

Aus (1) leitet man folgendes Erhaltungsgesetz ab: Für alle $a, b, x \in \mathbb{R}$ ist wegen (1) und Differentiation unter dem Integral

$$\frac{d}{dx} \int_a^b R(u(x, y))\, dy + S(u(x, b)) - S(u(x, a)) = 0. \tag{2}$$

Umgekehrt folgt für jede $\mathcal{C}^1$-Funktion $u = u(x, y)$, die die Eigenschaft (2) für alle x, a, b besitzt, dass (1) gilt und somit $u_x + uu_y = 0$ ist – dazu einfach nach b ableiten.

Gleichung (2) hat jedoch den Vorteil, dass sie für größere Klassen von u definiert ist und also auch weitere „schwache Lösungen" besitzt.

Betrachten wir beispielsweise den Fall, dass Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ ist, das durch eine differenzierbare Kurve $y = \xi(x)$ in zwei Gebiete Ω_+ und Ω_- zerlegt wird. Auf Ω_+ und Ω_- existiere jeweils eine klassische Lösung u von (1). Auf der Kurve $y = \xi(x)$ habe u einen Sprung. Wir setzen $u^{\pm}(x) = u(x, \xi(x)^{\pm})$.

Falls $a < \xi(x) < b$ für alle x, folgt

$$\begin{aligned}
(2) \iff 0 &= S(u(x,b)) - S(u(x,a)) + \frac{d}{dx}\left(\int_a^{\xi} R(u(x,y))\,dy + \int_{\xi}^{b} R(u(x,y))\,dy\right) \\
&= S(u(x,b)) - S(u(x,a)) + \xi'(x)R(u^-(x)) - \xi'(x)R(u^+(x)) \\
&\quad - \left(\int_a^{\xi} + \int_{\xi}^{b}\right)\frac{\partial}{\partial y}S(u(x,y))\,dy \quad \text{(weil auf den Stücken } u \in C^1, \text{ also (1) gilt} \\
&= \xi'(x)\left(R(u^-(x)) - R(u^+(x))\right) - S(u^-(x)) + S(u^+(x))
\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass $R(u^-) \neq R(u^+)$ ist, ist letzteres äquivalent dazu, dass für die Ortskurve des Sprunges gilt:

$$\xi'(x) = \frac{S(u^-(x)) - S(u^+(x))}{R(u^-(x)) - R(u^+(x))} \qquad \text{„Schock-Relation“}$$

Sind also R, S vorgegeben, so lässt sich zumindest lokal ξ so bestimmen, dass man eine Lösung erhält, vorausgesetzt für ein t ist $R(u^-(x)) - R(u^+(x)) \neq 0$.

Beachte: Diese Lösung hängt dann von der Wahl von R und S ab.