1. Grundlagen

Notation. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, und für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^{|\alpha|}$ setzen wir (Schwarz!)

$$\partial_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x), \quad \text{oder} \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

Wie üblich setzen wir $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$ und $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$. Der Faktor $\frac{1}{i}$ ist durch die Fourier-Transformation motiviert, wie später klar wird.

Beispiel. $n = 3, \alpha = (3, 1, 2)$. Damit ist $|\alpha| = 6, \alpha! = 12, x^\alpha = x_1^3 x_2 x_3^2$. Für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir $\alpha \geq \beta$, falls $\alpha_j \geq \beta_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beispiel. Die Leibnizregel: Sind $f, g \in \mathcal{C}^{|\alpha|}$, so ist

$$\partial_x^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} \left(\partial_x^\beta f\right) \left(\partial_x^{\alpha-\beta} g\right)$$

für geeignete $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{N}_0$. Man kann leicht zeigen:

$$c_{\alpha\beta} = \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

1.1. Definition. Eine partielle Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist eine Gleichung

$$F(x, \partial_x^\alpha u(x) : 0 \leq |\alpha| \leq m) = 0.$$

Hierbei ist $F = F(x, y_\alpha : 0 \leq |\alpha| \leq m)$ eine gegebene Funktion in den Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ und $y_\alpha \in \mathbb{C}$; für letztere wird $\partial_x^\alpha u(x)$ eingesetzt. Hängt F für wenigstens ein α mit $|\alpha| = m$ von y_α ab, so heißt m Ordnung der Differentialgleichung.

Allgemeine Fragestellungen im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen:

(a) Existenz von Lösungen: Für partielle Differentialgleichungen gibt es kein so einfaches Kriterium wie z.B. den Satz von Peano. Es gibt sogar sehr "schöne" Dgl, die *keine* Lösung haben.
(b) Eindeutigkeit von Lösungen: Im allgemeinen haben Dgl viele Lösungen. Zusatzbedingungen (z.B. Bedingungen auf dem Rand von Ω) können oft Eindeutigkeit garantieren.
(c) Qualitatives Verhalten: Regularität, Asymptotik, Abhängigkeit von Parametern.

Beispiele.

(1) $\Delta u(x) = f(x)$ Laplace-Gleichung mit dem Laplace-Operator $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2$

Aus naheliegenden Gründen verwendet man oft statt der x-Variablen die Variablengruppe (x, t) (x "Ort", t "Zeit"). Nach ungeschriebenem Gesetz wird Δ in solchen Zusammenstellungen nur auf die Orts-(x-) Variable angewendet.

(2) $\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ Wärmeleitungsgleichung.

(3) $\partial_t^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ Wellengleichung.

Dabei ist $t \in J \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Die drei Gleichungen haben Ordnung zwei und sind *linear*, d.h. F ist von der Form

$$F = \sum c_\alpha(x) y_\alpha - f(x)$$

Die Gleichungen (2) und (3) sind weiterhin *homogen*, d.h. $f = 0$.

Zwei Typen nichtlinearer Gleichungen:

Man nennt die Gleichung *semilinear*, falls

$$F = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x) y_\alpha - f(x, y_\alpha : |\alpha| < m)$$

und *quasilinear*, falls

$$F = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x, y_\alpha : |\alpha| < m) y_\alpha - f(x, y_\alpha : |\alpha| < m).$$

Ein Beispiel für eine nichtlineare Gleichung ist die Korteweg-de Vries-Gleichung in $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$: (nichtlineare Form der Wellengleichung)

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0$$

Man schreibt dann auch

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

1.2. Definition. Eine Funktion u heißt *klassische Lösung* der Dgl $F(x, \partial_x^\alpha u(x) : 0 \leq |\alpha| \leq m) = 0$, falls $u \in \mathcal{C}^m$ und $F(x, \partial^\alpha u(x)) = 0$ für alle x.

Das Gegenstück zur klassischen Lösung ist die schwache oder Distributionslösung. Man sollte deshalb stets angeben, wo man eine Lösung sucht.