9. Der Satz von Stokes

Integration von Formen.

9.1. Definition. Es sei $\omega = f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ eine n-Form auf der offenen Menge U in $\mathbb{R}^n$. Wir definieren – sofern das Integral rechts existiert:

$$\int_U \omega = \int_U f(x)\,dx.$$

9.2. Definition. Es seien U, V offen und zusammenhängend in $\mathbb{R}^n$ und $\chi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Wir nennen χ orientierungstreu, falls $\det \chi'(x) > 0$ für alle x, und orientierungsumkehrend, falls $\det \chi'(x) < 0$ für alle x.

Beachte: Da $\det \chi'$ nirgends Null ist und U zusammenhängend ist, tritt stets einer dieser Fälle auf.

9.3. Lemma. *Es seien U, V, χ wie oben und $\omega = f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ eine $n-$Form auf V. Dann gilt:*

(a) $\chi^*\omega(y) = (f \circ \chi)(y)\,\det \chi'(y)\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$.

(b)
$$\int_{\chi(U)} \omega = \pm \int_U \chi^*\omega \quad + / - \text{ falls } \chi \text{ orientierungstreu/-umkehrend.}$$

Beweis. (a) Es ist nach 8.16

$$\chi^*\omega = (f \circ \chi) \wedge \chi^* dx^1 \wedge \ldots \wedge \chi^* dx^n$$

und nach 8.15(2): $\chi^* dx^l = \sum_j A_{jl} dy^j$ mit $(A_{jl}) = (\chi'(y))^T$. Dann liefert 8.7 die Behauptung.

(b) Folgt sofort aus dem Transformationssatz (beachte: Betrag der Determinante!)

$$\int_{\chi(U)} f(x)\,dx = \int_U (f \circ \chi)(y) |\det \chi'(y)|\,dy.$$

◁

Orientierbarkeit.

9.4. Definition. Als einen Atlas für eine Mannigfaltigkeit M bezeichnet man eine Menge $\{\varphi_j : j \in J\}$ von lokalen Parametrisierungen $\varphi_j : T_j \to V_j$ mit $T_j \subseteq \mathbb{R}^n$, $V_j \subseteq M$ (oder auch die Menge der entsprechenden Umkehrabbildungen $\kappa_j = \varphi_j^{-1} : V_j \to T_j$), für die offenen Mengen V_j eine Überdeckung von M bilden.

Wir nennen eine Mannigfaltigkeit M orientierbar, falls es einen Atlas mit Parametrisierungen/Karten gibt, für den alle Kartenwechsel orientierungstreu sind. In diesem Fall nennen wir M mit diesem Atlas orientiert.

9.5. Bemerkung. Man sieht leicht: Ist M über einen gegebenen Atlas orientiert, so existiert ein weiterer Atlas mit mit der entgegengesetzten Orientierung (ersetze etwa $\varphi_j(t_1, \ldots, t_n)$ durch $\varphi_j(-t_1, \ldots, t_n)$ für alle j). Dann sind alle Kartenwechsel für Karten aus demselben Atlas orientierungserhaltend, diejenigen für Karten aus unterschiedlichen Atlanten orientierungsumkehrend.

Jede weitere Karte (zu einer zusammenhängenden Menge) kann dann zu einem der beiden Atlanten hinzugefügt werden. Es gibt also nicht mehr als zwei verschiedene Orientierungen.

9.6. Beispiel. Jede Mannigfaltigkeit, die durch eine einzige Karte beschrieben werden kann, ist orientierbar, denn man braucht gar keine Kartenwechsel. Insbesondere ist also jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

9.7. Beispiel. Die Einheitskreislinie $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist orientierbar: Wir betrachten die zwei Karten $\varphi_1 :]0, 2\pi[\to S^1 \setminus \{1\}$ und $\varphi_2 :]-\pi, \pi[\to S^1 \setminus \{-1\}$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Dann ist die Kartenwechselabbildung die Abbildung

$$\chi :]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[\to]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$$

gegeben durch $\chi(t) = t$ für $0 < t < \pi$ und $\chi(t) = t - 2\pi$ für $\pi < t < 2\pi$. Beide Male ist die Ableitung positiv. Wie erhält man die umgekehrte Orientierung?

9.8. Integration von Formen auf orientierten Mannigfaltigkeiten. Es sei M eine kompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und ω eine n-Form (Formen höherer Ordnung sind automatisch $= 0$, solche niedrigerer Ordnung kann man nicht integrieren – manchmal definiert man deren Integral einfach als Null).

Ist ω im Bild einer Karte $\varphi : T \to M$ getragen, so definiert man

$$\int_M \omega = \int_T \varphi^* \omega.$$

Das ist sinnvoll, denn die rechte Seite ist nach 9.3 von der Wahl der Karte unabhängig.

Eine allgemeine Form zerlegt man zunächst mit Hilfe einer C^∞-Zerlegung der Eins, die dem Atlas untergeordnet ist, in Formen, die in jeweils einer Karte getragen sind, und benutzt dann obige Formel.

Achtung. Geht man zur entgegengesetzten Orientierung über, so kehrt sich das Vorzeichen um.

9.9. Orientierung der Tangentialräume. Eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ heißt positiv orientiert, falls die Determinante der aus den v_j gebildeten $n \times n$-Matrix positiv ist.

Nun sei M mit einem festen Atlas orientiert und $\varphi : T \to M$ eine damit verträgliche Karte. Ferner sei $t_0 \in T$ und $p = \varphi(t_0)$. Nach 7.2 ist $\varphi'(t_0)$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach T_pM. Wir nennen eine geordnete Basis von T_pM positiv orientiert, falls ihr Urbild unter $\varphi'(t_0)$ in $\mathbb{R}^n$ positiv orientiert ist.

Insbesondere ist also $(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n})$ positiv orientiert.

Wählen wir eine andere, mit dem Atlas verträgliche Karte, so erhalten wir denselben Orientierungsbegriff, da die Kartenwechselabbildung positive Determinante haben.

9.10. Orientierung von Hyperflächen. Es sei M Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$. Ein Einheitsnormalenfeld ist eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\|\nu(p)\| = 1$ für alle p;

(ii) $\nu(p) \perp T_pM$.

Ist M orientiert, so nennt man ein Einheitsnormalenfeld positiv orientiert, falls für jede positiv orientierte geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von T_pM die Menge

$$(\nu(p), v_1, \ldots, v_n) \quad \text{positiv orientierte Basis von } \mathbb{R}^{n+1} \tag{1}$$

ist.

9.11. Satz. *Es sei M Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$.*

(a) *Zu jeder Orientierung gibt es genau ein positiv orientiertes Einheitsnormalenfeld.*

(b) *M besitze ein Einheitsnormalenfeld. Dann gibt es genau eine Orientierung von M, bezüglich derer ν positiv orientiert ist. Insbesondere ist M orientierbar.*

Beweis. (a) Klar ist, dass es höchstens ein positiv orientiertes Einheitsnormalenfeld gibt, da codim $M = 1$ ist, und höchstens in einer Richtung 9.10(1) erfüllt ist.

Existenz. Da M orientiert ist, existiert an jedem Punkt $p \in M$ ein eindeutiger Einheitsnormalenvektor $\nu(p)$ mit 9.10(1). Frage: Ist $p \mapsto \nu(p)$ stetig?

Da M eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, existiert zu jedem $p \in M$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in V$ und

$$M \cap V = \{x \in V : f(x) = 0\}.$$

Dann ist

$$\tilde{\nu}(x) = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|}, \quad x \in M \cap V,$$

ein stetiges Feld von Einheitsnormalenvektoren. In p ist $(\tilde{\nu}(p), v_1, \ldots, v_n)$ entweder positiv oder negativ orientiert. Da die Determinante eine stetige Funktion ist und $\tilde{\nu}$ stetig ist, gilt dies auch in einer Umgebung von p. Damit gilt also in einer Umgebung von p entweder $\nu(x) = \tilde{\nu}(x)$ oder $\nu(x) = -\tilde{\nu}(x)$. In jedem Fall ist die Abbildung ν stetig.

(b) Klar ist die Eindeutigkeit. Zur Existenz: Es sei $\nu : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges Einheitsnormalenfeld. Wir parametrisieren M mit Abbildungen $\varphi : T \to M$, wobei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend ist. Die stetige Funktion $D(t) = \det\left(\nu(\varphi(t)), \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_n}\right)$ hat also konstantes Vorzeichen auf T. Indem man evtl. die Transformation $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (-t_1, t_2, \ldots, t_n)$ vorschaltet, kann man annehmen, dass $D > 0$ auf T. Gehen wir in allen Karten so vor, so ist für je zwei Karten die Determinante der Kartenwechsel-Ableitung positiv: Es seien $\psi : S \to M$ eine weitere Parametrisierung und $\chi = \varphi^{-1}\psi$ die Kartenwechselabbildung. Wir schreiben $v_j = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}$ und $\tilde{v}_j = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial s_j}$. Dann ist für $x \in (\operatorname{Bild}\varphi) \cap (\operatorname{Bild}\psi)$ nach 8.6:

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\chi_i}{\partial_{s_j}}(\psi^{-1}(x))_{ij}\tilde{v}_i.$$

Nun ist nach Konstruktion

$$\begin{aligned} 0 &< \det\left(\nu(x), \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\right) \\ &= \det(\chi'(\psi^{-1}(x)))\,\det\left(\nu(x), v_1, \ldots, v_n\right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Determinante ebenfalls positiv ist. Daher ist auch $\det(\chi'(\psi^{-1}(x))) > 0$. $\lhd$

9.12. Beispiel. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist der Rand eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ und es gibt eine stetige äußere Normale. Folglich ist ∂A orientierbar.

9.13. Beispiel. Die Zweisphäre als Rand der dreidimensionalen Einheitskugel hat eine Orientierung über die äußere Normale, und die äußere Normale in x ist der Vektor x. Die Standardparametrisierung ist gegeben durch

$$\Phi(\varphi, \theta) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta), \quad 0 < \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Wie verhält sie sich zur Orientierung? Wir betrachten die Determinante (mit $\nu(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi, \theta)$)

$$\det\left(\Phi(\varphi,\theta), \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi,\theta), \tfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\varphi,\theta)\right) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta.$$

Sie ist positiv orientiert, also mit der Orientierung verträglich.

Der Satz von Stokes.

9.14. Umformulierung der rechten Seite der Gauß-Formel. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $i = 1, \ldots, n$ die bilden die $(n-1)-$Formen

$$\omega_i = (-1)^{i-1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n;$$

(vgl. 8.14(b)) an jedem Punkt p eine Basis für T_p^*U.

Nun sei M eine Hyperfläche in U mit einem Einheitsnormalenfeld ν und der dadurch induzierten Orientierung. Ist $K \subseteq M$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}^n$ stetig, so gilt für $\omega = \sum f_i \omega_i$

$$\int_K \omega = \int_K \langle f(x), \nu(x)\rangle\, dS(x).$$

Beweis. Indem wir ggf. mit einer Zerlegung der Eins arbeiten, können wir annehmen, dass der Träger von ω in einer Menge liegt, in der M der Graph einer Funktion von $n-1$ Variablen ist: $M = \{(x', x_n) : x' \in T, x_n = g(x')\}$ mit $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Wir haben dann die Kartenabbildung

$$\varphi : T \to M, \quad \varphi(t) = (t, g(t)).$$

Ein Normaleneinheitsvektor in $(t, g(t))$ ist bekanntlich

$$\nu = \frac{(-\operatorname{grad} g(t), 1)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(t)\|^2}}.$$

Ist er mit der durch φ induzierten Orientierung positiv oder negativ orientiert? Man rechnet nach:

$$\begin{aligned}
\det\left(\nu, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(t)\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial t_1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{\partial g}{\partial t_{n-1}} & & & 1 \\ 1 & \frac{\partial g}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(t)\|^2}.
\end{aligned}$$

Wir wählen also für ungerades n den Vektor ν, für gerades n dagegen $-\nu$. Weil der Träger von ω in $\varphi(T)$ enthalten ist, gilt nach Definition

$$\int_K \omega = \int_T \varphi^*\omega.$$

Wir berechnen $\varphi^*\omega$: Wegen $x = (t, g(t)) = \varphi(t)$ und der Regel $\varphi^*(\sigma \wedge \eta) = \varphi^*\sigma \wedge \varphi^*\eta)$ ist

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \varphi^*(\omega_i) &= (-1)^{i-1} dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge dt^{n-1} \wedge dg(t) \\
&= (-1)^n \frac{\partial g}{\partial t_i} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-1}, \quad i = 1, \ldots, n-1,
\end{aligned}$$

und

$$(2) \qquad \varphi^*(\omega_n) = (-1)^{n-1} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-1}.$$

Folglich ist

$$\varphi^*\omega = (-1)^{n-1}\left(-\sum_{i=1}^{n-1}(f_i \circ \varphi)\frac{\partial g}{\partial t_i} + f_n \circ \varphi\right) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-1}.$$

Somit erhalten wir

$$\int_K \omega = \int_T \varphi^*\omega = (-1)^{n-1} \int_T F(t) dt$$

wobei

$$F(t) = -\sum_{i=1}^{n-1} f_i(\varphi(t))\ \frac{\partial g(t)}{\partial t_i} + f_n(\varphi(t)).$$

Andererseits gilt nach Definition des Integrals $\int \langle f, \nu\rangle dS$ und Beispiel 6.14.

$$\int_K \langle f, \nu\rangle dS = \int_T \langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t))\rangle \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(t)\|^2}\ dt.$$

Nach Definition von ν ist dies gleich $(-1)^{n-1} \int_T F(t)\, dt = \int_K \omega$ wie behauptet. ◁

9.15. Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^n$. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ($n \geq 2$) und ω eine stetig differenzierbare $(n-1)-$Form auf U. Dann gilt für jedes Kompaktum A in U mit glattem Rand

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Dabei trägt A die durch das äußere Normalenfeld induzierte Orientierung.

Bemerkung. Für $n = 1$ liefert dieser Satz den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Beweis. Wir schreiben $\omega = \sum f_i\omega_i$ mit den ω_i aus 9.14 und bezeichnen mit ν das äußere Normalenfeld. Nach 9.14 gilt

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial A} \langle f(x), \nu(x)\rangle dS(x)$$

mit $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Nun ist

$$d\omega = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx^i \wedge \omega_i = \operatorname{div}(f) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Die Behauptung folgt daher sofort aus dem Satz von Gauß. ◁

9.16. Kompakta mit glattem Rand auf Mannigfaltigkeiten. Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und A eine Teilmenge von M. Ein Punkt $p \in M$ heißt Randpunkt von A relativ zu M, wenn in jeder Umgebung von p sowohl ein Punkt aus A als auch ein Punkt aus $M \setminus A$ liegen.

Mit ∂A bezeichnen wir die Menge aller Randpunkte von A in M.

Achtung: Besser wäre es, $\partial_M A$ zu schreiben.

Ist M eine $n-$dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und A eine kompakte Teilmenge von M, so sagt man, A habe glatten Rand, falls zu jedem Randpunkt p eine Karte $\varphi : T \to M$ (mit $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) für M existiert mit der Eigenschaft, dass

(i) $\varphi\left(\{x_n \geq 0\} \cap T\right) = A \cap \varphi(T)$ und

(ii) $\varphi\left(\{x_n = 0\} \cap T\right) = \partial A \cap \varphi(T)$.

Betrachtet man Mannigfaltigkeiten mit Rand, so wählt man in der Regel Atlanten stillschweigend so, dass alle Karten, deren Bild den Rand schneidet, die obigen Bedingungen (i) und (ii) erfüllen.

9.17. Satz. *Unter den obigen Annahmen ist ∂A selbst eine $(n-1)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.*

Beweis. Aus 9.16(ii) folgt, dass die Einschränkung der Abbildung φ auf $T' = \{x_n = 0\} \cap T$ ein Homöomorphismus auf $\partial A \cap \varphi(T)$ ist. Ferner sind nach Annahme $\partial\varphi/\partial_{x_1}, \ldots, \partial\varphi/\partial_{x_n}$ linear unabhängig, also gilt dies auch für $\partial\varphi/\partial_{x_1}, \ldots, \partial\varphi/\partial_{x_{n-1}}$. Daher hat die Ableitungsmatrix $(\varphi_{|T'})'$ den Rang $n-1$. ◁

9.18. Induzierte Orientierung des Randes. Ist (mit obigen Bezeichnungen) M zusätzlich orientiert, und erfüllt der Atlas die Bedingungen (i) und (ii) aus 9.16, so erhält der Rand von A damit eine Orientierung.

Beweis. Es seien $\varphi : T \to M$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to M$ zwei Kartenabbildungen mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus 9.16, und es gelte $\varphi(T) \cap \varphi(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Wir können oBdA annehmen, dass beide Bilder gleich sind. Die Kartenwechsel-Abbildung $\chi = \tilde{\varphi}^{-1}\varphi$ bildet $\{t_n = 0\} \cap T$ auf $\{t_n = 0\} \cap \tilde{T}$ ab. Mit φ_0 und $\tilde{\varphi}_0$ bezeichnen wir die Einschränkungen auf $\{t_n = 0\}$. Wir betrachten nun die Kartenwechselabbildung $(\tilde{\varphi}_0)^{-1}\varphi_0 = \tilde{\varphi}^{-1}\varphi|_{t_n=0}$. Die Ableitungsmatrix von $\tilde{\varphi}^{-1}\varphi$ hat in $\{t_n = 0\}$ die Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\chi_1}{\partial t_1} & \cdots & & \frac{\partial\chi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial\chi_{n-1}}{\partial t_1} & \cdots & & \frac{\partial\chi_{n-1}}{\partial t_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial\chi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Nun ist die rechte untere Ecke positiv, und die Determinante der vollen Matrix ebenso (Orientierung von A). Also ist auch die Determinante der oberen $(n-1) \times (n-1)$-Matrix positiv. Diese Matrix ist gerade die Ableitungsmatrix von $\tilde{\varphi}_0^{-1}\varphi_0$.

9.19. Der Satz von Stokes. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und M eine orientierte $n-$dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$. Ferner sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form in U. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge A mit glattem Rand ∂A in M:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Beweis. Mit Hilfe einer Zerlegung der Eins langt es, den Fall zu betrachten, dass ω im Bild einer einzigen Karte $\varphi : T \to M$ getragen ist.

Der Rücktransport $\varphi^*\omega$ von ω unter φ ist also eine kompakt getragene $(n-1)$-Form auf T, die wir (durch Null) zu einer $(n-1)-$Form $\widetilde{\omega}$ auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen können. Nach Definition ist dann (mit der Bezeichnung $H_n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$)

$$\int_A d\omega = \int_{H_n \cap T} \varphi^*(d\omega) \overset{8.16(c)}{=} \int_{H_n \cap T} d(\varphi^*\omega) = \int_{H_n} d\widetilde{\omega}.$$

Für die rechte Seite benutzen wir die durch φ induzierte Randkarte

$$\varphi_0 : T' = \{t' = (t_1, \ldots, t_{n-1}) : (t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) \in T\} \to \partial A; \quad t' \mapsto \varphi(t', 0).$$

Wir können schreiben $\varphi_0 = \varphi \circ \beta$ mit $\beta : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $\beta(t') = (t', 0)$ Nach Definition ist

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{T'} \varphi_0^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \beta^*\widetilde{\omega} = \int_{\partial H_n} \widetilde{\omega}.$$

Es langt also zu zeigen, dass für jede $(n-1)-$Form $\widetilde{\omega}$ mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{H_n} d\widetilde{\omega} = \int_{\partial H_n} \widetilde{\omega}.$$

Dies kann man entweder direkt zeigen, oder man argumentiert so: Man findet leicht ein Kompaktum $\widetilde{A}$ mit glattem Rand, das den Träger von $\widetilde{\omega}$ enthält und für das

$$\partial A \cap \operatorname{supp} \varphi = \partial H_n \cap \operatorname{supp} \varphi.$$

(Man wähle etwa $H_n \cap B(0, R)$ für großes R, wobei man die Schnittfläche von $S(0, R) \cap \partial H_n$ glättet.) Dann folgt die Aussage aus dem Satz von Stokes für $\mathbb{R}^n$, s. 9.15. $\triangleleft$

9.20. Folgerung. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ und ω eine stetig differenzierbare $(n-1)-$Form auf U. Dann gilt für jede kompakte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M (ohne Rand) von U*

$$\int_M d\omega = 0.$$

9.21. Beispiel. Es sei $\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x\|^n}\omega_i$ mit den $(n-1)-$Formen aus 9.14. Wegen $\operatorname{div} \frac{x}{\|x\|^n} = 0$ ist $d\sigma = 0$, d.h. σ ist geschlossen. Ist σ exakt? Dann wäre das Integral von σ über die Einheitskugel S^{n-1} Null nach 9.20.

Es ist jedoch nach der Umrechnung aus 9.14 (weil der äußere Normaleneinheitsvektor an S^{n-1} in x gerade x ist):

$$\int_{S^{n-1}} \sigma = \int_{S^{n-1}} \langle \frac{x}{\|x\|^n}, x\rangle dS(x) = \int_{S^{n-1}} 1 dS(x) = \mathrm{vol} S^{n-1} \neq 0.$$

Daher kann σ nicht exakt sein.

Für $n \geq 3$ ist S^{n-1} einfach zusammenhängend. Das obige Beispiel zeigt also, dass einfacher Zusammenhang keine hinreichenden Bedingung dafür liefert, dass jede geschlossene Form exakt ist.