8. Differentialformen

Der Cotangentialraum. Im folgenden sei M eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^N$.

8.1. Definition. Es sei $f : M \to \mathbb{C}^m$ eine Funktion. Wir schreiben $f \in C^l(M)$, $l = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, falls für jede Karte $\varphi : T \to M$ die Komposition $f \circ \varphi : T \to \mathbb{C}^m$ eine C^l-Abbildung ist.

8.2. Definition. Mit T_p^*M bezeichnen wir den Dualraum zum Tangentialraum T_pM an M in p, d.h. den Raum aller linearen Abbildungen von T_pM nach $\mathbb{R}$. Man nennt T_p^*M den Cotangentialraum an M in p und seine Elemente die Cotangentialvektoren in p.

Ein Vektorfeld auf M ist eine Abbildung V, die jedem $p \in M$ ein Element $V(p) \in T_pM$ zuordnet. Eine $1-$Form auf M ist eine Abbildung ω, die jedem $p \in M$ ein Element $\omega(p) \in T_p^*M$ zuordnet.

8.3. Beispiel. Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in M$. Wir definieren das Differential oder die äußere Ableitung df_p von f in p durch

$$df_p : T_pM \to \mathbb{R}, \quad df_p(v) = \frac{d}{d\tau}\left(f \circ \gamma(\tau)\right)|_{\tau=0}. \tag{1}$$

Dabei ist $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

Man rechnet nach: df_pv ist linear und unabhängig von der Wahl der Kurve γ, die v darstellt. Damit definiert df eine 1-Form.

Beachte: Ist M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so vereinfacht sich dies zu

$$df_p(v) = f'(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)|_{\tau=0} = \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle \quad \text{Richtungsableitung von } f \text{ in Richtung } v;$$

die Linearform df ist also durch Paarung mit dem Vektor grad$f$ gegeben.

8.4. Basen. Ist $\varphi : T \to M$ eine lokale Parametrisierung nahe p mit $\varphi(\underline{t}) = p$, so wissen wir aus 7.2, dass die Vektoren $\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(\underline{t})$, $j = 1, \ldots, n$, eine Basis von T_pM bilden. Man schreibt sie meist in der Form $\frac{\partial}{\partial t_j}$ (ohne Angabe von φ oder dem Argument $\underline{t}$). Dann hat also in $\varphi(T)$ jedes Vektorfeld V eine Darstellung

$$V(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p)\frac{\partial}{\partial t_j} \quad \text{mit geeigneten } a_j(p) \in \mathbb{R}.$$

Man nennt V stetig bzw. l-mal stetig differenzierbar, falls die Funktionen a_j alle stetig bzw. l-mal stetig differenzierbar sind.

Ebenso haben wir die Funktionen $\pi_j : M \to \mathbb{R}$, $\pi_j : q \mapsto \varphi^{-1}(q)_j$, $j = 1, \ldots, n$, die q auf die $j-$te Komponente von $\varphi^{-1}(q)$ abbilden.

Für ihr Differential $d\pi_{j,p}$ in $p = \varphi(\underline{t})$ gilt:

$$d\pi_{j,p}\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\varphi^{-1}(\varphi(\underline{t} + \tau e_k))\right)_j|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}\left(\underline{t} + \tau e_k\right)_j|_{\tau=0} = \delta_{jk}. \tag{1}$$

Sie bilden also gerade die duale Basis zu den $\frac{\partial}{\partial t_j}$. Man schreibt üblicherweise dt^j statt $d\pi_j$.

In $\varphi(T)$ hat also jede 1-Form ω eine Darstellung

$$\omega(p) = \sum_{j=1}^n b_j(p)dt^j \quad \text{mit geeigneten } b_j(p) \in \mathbb{R}.$$

Man nennt ω stetig/l-mal stetig differenzierbar, falls die b_j dies sind (nur sinnvoll für $l \le \alpha$, die Glattheit der Mannigfaltigkeit). Oft betrachtet man auch b_j als von t abhängig (in lokalen Koordinaten).

8.5. Beispiel. Nach 8.4 können wir lokal schreiben $df = \sum_{j=1}^n b_j \, dt^j$. Wie sehen die b_j aus? Es ist für $p = \varphi(\underline{t})$ nach 8.4(1)

$$b_k(p) = \sum_{j=1}^n b_j(p) dt^j \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right) = df_p \left(\frac{\partial}{\partial t_k} \right) = \frac{d}{d\tau} (f \circ \varphi(\underline{t} + \tau e_k)|_{\tau=0} = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t_k}(\underline{t}).$$

Beachte: $f \circ \varphi$ ist gerade die in den t-Koordinaten ausgedrückte Funktion f.

8.6. Kartenwechsel. Was passiert, wenn wir andere Koordinaten wählen? Es sei also $\psi : S \to M$ eine andere Parametrisierung mit (oBdA) $\psi(S) = \varphi(T)$ und $p \in M$, $p = \varphi(\underline{t}) = \psi(\underline{s})$. Mit

$$\chi = \varphi^{-1} \psi$$

bezeichnen wir die Kartenwechselabbildung. Somit ist $\varphi \circ \chi = \psi$. Es sei nun V ein Vektorfeld, das wir auf zweierlei Weise schreiben können

$$\begin{aligned} V(p) &= \sum_{l=1}^n a_l(p) \frac{\partial}{\partial t_l} = \sum_{l=1}^n a_l(p) \frac{\partial \varphi}{\partial t_l}(\underline{t}) \text{ bzgl. } \varphi \text{ bzw.} \\ V(p) &= \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_j(p) \frac{\partial}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_j(p) \frac{\partial \psi}{\partial s_j}(\underline{s}) \text{ bzgl. } \psi. \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel folgt aus $\psi = \varphi \chi$, dass

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial s_j}(\underline{s}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial t_l}(\chi(\underline{s})) \frac{\partial \chi_l}{\partial s_j}(\underline{s}).$$

Somit ist

$$\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_j(p) \frac{\partial \psi}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \widetilde{a}_j \frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \frac{\partial \chi_l}{\partial s_j} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \chi_l}{\partial s_j} \widetilde{a}_j \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t_l}.$$

Mit anderen Worten: $a_l = \sum (\partial \chi_l / \partial s_j) \widetilde{a}_j$ bzw:

$$a(p) = \chi'(\psi^{-1}(p)) \widetilde{a}(p).$$

Ist andererseits ω eine 1-Form mit den Darstellungen

$$\begin{aligned} \omega(p) &= \sum_{l=1}^n b_l(p) dt^l \text{ bzgl. } \varphi \text{ bzw.} \\ \omega(p) &= \sum_{j=1}^n \widetilde{b}_j(p) ds^j \text{ bzgl. } \psi \end{aligned}$$

so ist

$$b_l = \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right) \quad \text{und} \quad \widetilde{b}_j = \omega \left(\frac{\partial \psi}{\partial s_j} \right).$$

Aus (1) folgt

$$\widetilde{b}_j = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \chi_l}{\partial s_j} \, \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \chi_l}{\partial s_j} \, b_l.$$

Mit anderen Worten:

$$\widetilde{b}(p) = \chi'(\psi^{-1}(p))^T \, b \quad \text{bzw.} \quad b = (\chi'(\psi^{-1}(p))^T)^{-1} \, \widetilde{b}.$$

Insbesodnere sehen wir, dass Tangentialvektoren und Cotangentialvektoren sich auf unterschiedliche Weise transformieren. und daher unterschieden werden müssen.

Differentialformen.

8.7. Äußeres Produkt/Dachprodukt. Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ Einsformen. Dann wird ihr äußeres (Dach-)Produkt für jedes $p \in M$ definiert durch

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k : (T_pM)^k \to \mathbb{R},$$

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \ldots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \ldots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine alternierende Multilinearform. Man sieht relativ leicht:

Sind $\psi_1, \ldots, \psi_k$ weitere Einsformen mit

$$\psi_i = \sum a_{ij}\, \varphi_j, \quad i = 1, \ldots, k, \text{ für geeignete } a_{ij} \in \mathbb{R},$$

so ist

(1) $$\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k = \det(a_{ij})\, \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k.$$

8.8. Definition. Eine Differentialform der Ordnung k (oder kurz k-Form), $k = 1, 2, \ldots$, ist eine Abbildung, die jedem $p \in M$ eine alternierende Multilinearform $\omega(p) : (T_pM)^k \to \mathbb{R}$ zuordnet, die sich lokal schreiben lässt

(1) $$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} f_{i_1 \ldots i_k} dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{i_k}$$

mit Funktionen $f_{i_1 \ldots i_k} : M \to \mathbb{R}$ (bzw. $T \to \mathbb{R}$ in lokalen Koordinaten, falls $\varphi : T \to M$ eine lokale Parametrisierung ist). Man nennt die Form stetig/$l-$mal differenzierbar, falls die $f_{i_1 \ldots i_k}$ dies sind.

Schreibweise: Meist kürzt man die obige Schreibweise ab zu $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dt^I$, wobei die Notation bedeuten soll, dass I über alle $k-$Tupel $i_1 \ldots i_k$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ läuft, $f_I = f_{i_1 \ldots i_k}$, und $dt^I = dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{i_k}$.

Beachte: Da das Dachprodukt alternierend multilinear ist, ist $dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{i_k} = 0$, wenn $i_l = i_m$ für ein $l \ne m$. Es gibt daher für $k > n$ außer der Null keine k-Formen. Daher ist in (1) die Summation entsprechend eingeschränkt.

Der Vollständigkeit halber nennt man Funktionen auch Nullformen.

Wir schreiben: $\omega \in \Omega^k M$.

8.9. Äußeres Produkt von k- und l-Formen. Das äußere Produkt aus 8.7 lässt sich zu einem äußeren Produkt von k- und l-Formen fortsetzen, indem man für Einsformen $\eta_1, \ldots, \eta_k, \psi_1, \ldots, \psi_l$ definiert

$$(\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k) \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_l) = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_l$$

und die Definition linear fortsetzt. Wir können $k = 0$ oder $l = 0$ einschließen, indem wir für $a \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ setzen $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a\omega$.

Die resultierende Abbildung $\Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \to \Omega^{k+l}(M)$, $(\omega, \sigma) \to \omega \wedge \sigma$ ist linear in jedem Faktor. Ferner gilt:

(i) $\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl}\, \sigma \wedge \omega$;

(ii) $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$ (Assoziativität) für $\omega_j \in \Omega^{k_j}(M)$.

Eigenschaft (i) folgt aus der Tatsache, dass die Permutation

$$(1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l) \mapsto (k+1, \ldots, k+l, 1, \ldots, k)$$

das signum $(-1)^{kl}$ hat.

8.10. Äußere Ableitung. Es sei ω eine stetig differenzierbare k-Form mit der lokalen Darstellung $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dt^I$. Ihre äußere Ableitung $d\omega$ ist eine $k+1$-Form, definiert durch

$$d\omega = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dt^I,$$

mit dem Differential df_I von $f_I : \varphi(T) \to \mathbb{R}$.
Beachte:

(i) Man kann zeigen, dass dies von der Wahl der Darstellung unabhängig ist. Mehr dazu 8.12.

(ii) Ist $\tilde{f}_I = f_I \circ \varphi : T \to \mathbb{R}$ (in lokalen Koordinaten), so ist nach 8.5

$$d\omega = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_I}{\partial t_j} \, dt^j \wedge dt^I$$

8.11. Satz. *Es seien ω, η $k-$Formen und σ eine $l-$Form, alle stetig differenzierbar. Dann gilt:*

(a) $d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda \, d\omega + \mu \, d\eta$

(b) $d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma.$

(c) *Ist ω sogar zweimal stetig differenzierbar, so ist $d^2\omega = d(d\omega) = 0$. (Dies ist die wesentliche Eigenschaft von d.)*

Beweis. (a) ist klar.
(b) Wir schreiben in lokalen Koordinaten: $\omega = \sum \tilde{f}_I \, dt^I$ und $\sigma = \sum \tilde{g}_J \, dt^J$. Dann ist

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{I,J} \tilde{f}_I \tilde{g}_J \, dt^I \wedge dt^J,$$

also nach Definition der äußeren Ableitung und der Produktregel

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= \sum_{I,J,m} \frac{\partial(\tilde{f}_I \tilde{g}_J)}{\partial t_m} \, dt^m \wedge dt^I \wedge dt^J = \sum_{I,J,m} \left(\frac{\partial \tilde{f}_I}{\partial t_m} \, \tilde{g}_J + \tilde{f}_I \, \frac{\partial \tilde{g}_J}{\partial t_m} \right) \, dt^m \wedge dt^I \wedge dt^J \\ &= \sum_{I,J,m} \frac{\partial \tilde{f}_I}{\partial t_m} \, \tilde{g}_J \, dt^m \wedge dt^I \wedge dt^J + \sum_{IJ,m} (-1)^k \tilde{f}_I \, \frac{\partial \tilde{g}_J}{\partial t_m} \, dt^I \wedge dt^m \wedge dt^J \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \, \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

(c) Zunächst sei $k = 0$, d.h. $\omega = f$ ist eine Funktion. Wir schreiben bzgl. der Karte $\varphi : T \to M$: $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(df) = d\left(\sum_m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t_m} \, dt^m \right) &= \sum_{ml} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t_l \partial t_m} \, dt^l \wedge dt^m = \sum_{l<m} + \sum_{l>m} \cdots \\ &= \sum_{m<l} \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t_l \partial t_m} - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t_m \partial t_l} \right) dt^l \wedge dt^m \overset{\text{Schwarz}}{=} 0. \end{aligned}$$

Weil $d(dt^I) \overset{\text{def}}{=} d1 \wedge dt^I = 0$ ist, folgt im allgemeinen Fall für $\omega = \sum f_I \, dt^I$, dass

$$d(d\omega) = \sum d(d\tilde{f}_I \wedge dt^I) = d(d\tilde{f}_I) \wedge dt^I - d\tilde{f}_I \wedge d(dt^I) = 0 - 0 = 0.$$

◁

8.12. Bemerkung. Wir können nun die Unabhängigkeit der äußeren Ableitung von der Kartenwahl beweisen.

Es seien $\varphi : T \to V$ und $\psi : S \to V$ zwei Abbildungen von offenen Mengen $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, die beide eine offene Teilmenge V von M parametrisieren und ω eine k-Form, die sich bzgl φ in der Form $\omega = \sum_{|I|=k} a_I dt^I$ und bzgl. ψ als $\omega = \sum_{|J|=k} \tilde{a}_J ds^J$ schreiben lässt. Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass die bezüglich φ und ψ definierten äußeren Ableitungen auf Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ und auf den Einsformen dt^i, $i = 1, \dots, n$, dieselben Werte liefern. Dann ergibt sich der allgemeine Fall aus der Produktregel in Satz 8.11(b).

(i) Für eine Funktion f ist df in Beispiel 8.3 unabhängig von der Kartenwahl definiert.

(ii) Für die Einsform dt^i ist $d(dt^i) = 0$ bzgl. φ. Weil dt^i aber das Differential einer Funktion ist (nämlich von $p \mapsto \varphi^{-1}(p)_j \in \mathbb{R}$), ist es auch in der Parametrisierung durch ψ das Differentiai dieser Funktion. Nun ist $d^2 = 0$, also ist auch in dieser Parametrisierung $d(dt^i) = 0$.

Geschlossenheit und Exaktheit.

8.13. Definition. Eine stetig differenzierbare k-Form ω heißt geschlossen, falls $d\omega = 0$. Sie heißt exakt, falls es eine $(k-1)$-Form η gibt mit $\omega = d\eta$.

Klar: Jede exakte Form $\omega = d\eta$ ist geschlossen, sofern η zweimal stetig differenzierbar ist.

8.14. Formen und Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$. Es sei U eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$.

(a) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j.$$

Wir haben, wie in 8.3 erwähnt, die zueinander dualen Basen $\{e_1, \dots, e_n\} = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ von $T_p\mathbb{R}^n$ und $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ von $T_p^*\mathbb{R}^n$. Das Differential df können wir unmittelbar mit dem *Zeilen*vektor $(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$, also f', identifizieren. Der Gradient hingegen ist der *Spalten*vektor $\sum (\partial f/\partial x_j) e_j$. Zwischen beiden steckt eine Identifikation von Tangential- und Cotangentialraum, die im Fall von $\mathbb{R}^n$ trivial ist, allgemein jedoch nicht.

(b) Jede $(n-1)$-Form ω auf U lässt sich schreiben

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j (-1)^{j-1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

mit geeigneten Funktionen f_j. Dabei bedeutet das Dach, dass dieser Term weggelassen wird. (Die Wahl des Faktors $(-1)^{j-1}$ scheint willkürlich, wird aber gleich motiviert.)

Dann fallen in der folgenden Formel wegen der alternierenden Multilinearität der Formen die Summanden mit $j \neq k$ weg und es gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\, dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \operatorname{div} f\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Die äußere Ableitung einer $(n-1)$-Form entspricht also der Divergenz des mit ihr identifizierten Vektorfelds, wenn man die n-Form $\operatorname{div} f dx^1 \dots dx^n$ mit $\operatorname{div} f$ identifiziert.

(c) Ist $\omega = \sum a_j(x)dx^j$ eine stetig differenzierbare Einsform, so ist

(1) $$d\omega(x) = \sum_j \sum_m \frac{\partial a_j}{\partial x_m}\, dx^m \wedge dx^j = \sum_{i_1<i_2} \left(\frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{i_2}}\right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.$$

Die Bedingung, dass ω geschlossen ist, ist also äquivalent dazu, dass das Vektorfeld $(a_1, \ldots, a_n)$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

(d) Ist $n = 3$, so sind die Zweiformen die $(n-1)$-Formen. Nach (b) können wir sie schreiben

$$b_1 dx^2 \wedge dx^3 - b_2 dx^1 \wedge dx^3 + b_3 dx^1 \wedge dx^2$$

Für die Ableitung einer 1-Form wie in (1) ist dann

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) = \operatorname{rot} a.$$

Die äußere Ableitung einer 1-Form entspricht also der Rotation des Vektorfelds, mit dem wir die Form identifizieren.

(e) Die Tatsache, dass $d^2 f = 0$ ist, entspricht den Identitäten $\operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$.

8.15. Transport unter Abbildungen. Es seien M und N Mannigfaltigkeiten und $\chi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung (d.h. in allen Karten ist χ differenzierbar).

Ist $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ eine Kurve in M, so erhalten wir mit $\chi \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to N$ eine Kurve in N. Indem wir die Ableitungen in 0 betrachten, erhalten wir eine Abbildung

$$\chi_* : T_{\gamma(0)}M \to T_{\chi\circ\gamma(0)}N.$$

Übergang zur dualen Abbildung und Erweiterung auf k Vektoren sowie Variation von p liefert:

$\chi^* \;:\; T^*_{\chi\circ\gamma(0)}N \to T^*_{\gamma(0)}M; \qquad (\chi^*\sigma)(v) = \sigma(\chi_* v) \quad$ für $\sigma \in T^*\chi \circ \gamma(0)^* N, v \in T *_{\gamma(0)} M$ bzw.

$\chi^* \;:\; \Omega^k(N) \to \Omega^k(M); \quad ((\chi^*\sigma)(p))(v_1, \ldots, v_k) = (\sigma(\chi(p)))(\chi_* v_1, \ldots, \chi_* v_k).$

Wie sieht das in Koordinaten aus? Es sei p in M und $\varphi : T \to M$ eine Karte mit $\varphi(\underline{t}) = p$. Wir betrachten die Basiskurven $\gamma_j(\tau) = \varphi(\underline{t} + \tau e_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Ihre Ableitung ist $\gamma_j'(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(\underline{t})$. Nun sei $\psi : S \to N$ eine Karte nahe $\chi(p)$ mit $\psi(s_0) = \chi(p)$. Für die Komposition ist

(1) $$\chi_*\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) = (\chi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \psi^{-1} \circ \chi \circ \gamma)'(0) = \psi'(s_0)(\psi^{-1}\chi\gamma)'(0)$$
$$= \quad \psi'(s_0)(\psi^{-1}\chi\varphi)'(\underline{t})e_j = \sum_m A_{mj} \frac{\partial}{\partial s_m},$$

wobei $A = (A_{mj}) = \left(\dfrac{\partial(\psi^{-1}\chi\varphi)_m}{\partial t_j}(\underline{t})\right)$ die Ableitungsmatrix von $\psi^{-1}\chi\varphi$ ist; beachte, dass $\frac{\partial}{\partial s_m}$ für $\frac{\partial\psi}{\partial s_m}(s_0)$ steht. Ist also $v = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial t_j}$ in T_pM, so ist

$$\chi_* v = \sum_{j,m} A_{mj}\, b_j \frac{\partial}{\partial s_m} = \sum c_m \frac{\partial}{\partial s_m} \text{ mit } c = Ab.$$

Auf Einsformen ist $\chi^*(\sigma)(v) = \sigma(\chi_* v)$, also

$$\chi^* ds^l\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) = ds^l\left(\chi_* \frac{\partial}{\partial t_j}\right) \overset{(1)}{=} ds^l\left(\sum A_{mj} \frac{\partial}{\partial s_m}\right) = A_{lj}$$

und somit

$$\chi^*\left(\sum c_l ds^l\right) = \sum d_j dt^j \quad \text{mit } d = A^T c. \tag{2}$$

Die Abbildung χ_* ist also gegeben durch Multiplikation mit der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels, χ^* durch Multiplikation mit ihrer Adjungierten.

8.16. Lemma. *Es seien M, N Mannigfaltigkeiten, $\chi : M \to N$ differenzierbar und es seien $\omega, \omega_1, \omega_2$ Differentialformen der Ordnung k und σ eine Differentialform der Ordnung l auf N, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\chi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda\chi^*(\omega_1) + \mu\chi^*(\omega_2)$;

(b) $\chi^*(\omega \wedge \sigma) = \chi^*(\omega) \wedge \chi^*(\sigma)$;

(c) *Ist ω einmal und χ sogar zweimal stetig differenzierbar, so ist $d(\chi^*(\omega)) = \chi^*(d\omega)$.*

(d) *Ist weiterhin $\tilde{\chi} : L \to M$ differenzierbar, so ist $(\chi \circ \tilde{\chi})^*(\omega) = \tilde{\chi}^*(\chi^*(\omega))$.*

Beweis. (a), (d) sind trivial.
(b) folgt aus der Definition des Dachprodukts 8.9.
(c) Zunächst sei $\omega = f$ eine Funktion ($k = 0$). Dann ist mit lokalen Karten $\varphi : T \to M$, $\psi : S \to N$

$$d(\chi^* f) = d(f \circ \chi) = \sum_j \frac{\partial(f \circ \chi \circ \varphi)}{\partial t_j} dt^j = \sum_m \sum_j \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial s^m} \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \chi \circ \varphi)_m)}{\partial t_j} dt^j \overset{8.15(2)}{=} \chi^*(df).$$

Nun betrachten wir den Fall $\omega = ds^m$ Dann ist nach dem ersten Teil

$$d(\chi^* ds^m) = d(d(s^m \circ \chi)) = 0 = \chi^*(d(ds^m)). \tag{1}$$

Nun folgt die Behauptung aus (b) und (1): Für $\omega = \sum f_I ds^{i_1} \wedge \dots s^{i_k}$ ist

$$\begin{aligned} d(\chi^*\omega) &= d\left(\sum \chi^*(f_I)\chi^*(ds^{i_1}) \wedge \dots \chi^*(s^{i_k})\right) \\ &= \sum d(\chi^*(f_I)) \wedge \chi^*(ds^{i_1}) \wedge \dots \chi^*(s^{i_k})) + 0 \\ &= \sum \chi^*(df_I)) \wedge \chi^*(ds^{i_1}) \wedge \dots \chi^*(s^{i_k}) \\ &= \chi^* d\omega \end{aligned}$$

8.17. Hilfssatz. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen mit $[0,1] \times U \subseteq V$. Die Abbildungen $\chi_0, \chi_1 : U \to V$ seien definiert durch

$$\chi_0(t) = (0, t), \quad \chi_1(t) = (1, t).$$

Ist σ eine geschlossene stetig differenzierbare k-Form auf V mit $k \geq 1$, so gibt es eine stetig differenzierbare $(k-1)$−Form η auf U mit

$$\chi_1^*\sigma - \chi_0^*\sigma = d\eta.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $(s, t_1, \dots, t_n)$ und schreiben dann

$$\sigma = \sum_{|I|=k} f_I \, dt^I + \sum_{|J|=k-1} g_J \, ds \wedge dt^J.$$

Wir können als Kartenabbildungen $\varphi, \psi =$ id wählen; die Transformationsmatrix A aus 8.15(2) ist dann

$$\chi_0'(t) = \chi_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $(\chi_0')^T = (\chi_1')^T = (0, E_n)$ und daher $\chi_j^*(dt^i) = dt^i$ und $\chi_j^*(ds) = 0$. Somit

$$\chi_1^*\sigma = \sum f_I(1,t)dt^I; \quad \chi_0^*\sigma = \sum f_I(0,t)dt^I$$

und

$$d\sigma = \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial s} ds \wedge dt^I + \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial t_i} dt^i \wedge dt^I - \sum_J \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial t_j} ds \wedge dt^j \wedge dt^J.$$

Da σ geschlossen ist, folgt

$$\sum_I \frac{\partial f_I}{\partial s} dt^I = \sum_J \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial t_j} dt^j \wedge dt^J$$

Wir integrieren die Koeffizienten auf beiden Seiten von $s = 0$ bis $s = 1$: Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial s}(s,t)\, ds &= f_I(1,t) - f_I(0,t); \\ \int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial t_j}(s,t)\, ds &= \frac{\partial}{\partial t_j} \int_0^1 g_J(s,t)\, ds. \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \chi_1^*\sigma - \chi_0^*\sigma &= \sum_I (f_I(1,t)) - f_I(0,t) dt^I = \sum_I \int_0^1 \left(\frac{\partial f_I}{\partial s}(s,t)\, ds \right) dt^I \\ &= \sum_J \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\frac{\partial g_J}{\partial t_j}(s,t)\, ds \right) dt^j \wedge dt^J = \sum_J \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t_j} \left(\int_0^1 g_J(s,t)\, ds \right) dt^j \wedge dt^J. \\ &= d\eta \quad \text{für} \quad \eta = \sum_{|J|=k-1} \left(\int_0^1 g_J(s,t)\, ds \right) dt^J. \end{aligned}$$

◁

Wir erhalten nun eine Verallgemeinerung des Satzes, dass auf einem sternförmigen Gebiet jedes Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt, ein Potential hat.

8.18. Satz. (Lemma von Poincaré) *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist jede auf U geschlossene k-Form ω exakt ($k \geq 1$).*

Beweis. Wir können annehmen, dass U bezüglich des Nullpunkts sternförmig ist. Wir betrachten dann die Abbildung $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\chi(s,t) = st$, und setzen $V = \chi^{-1}(U)$. Nun definieren wir χ_0 und χ_1 wie im Hilfssatz. Die k-Form $\sigma = \chi^*\omega$ auf V ist geschlossen. Wir wenden den Hilfssatz an und erhalten eine $(k-1)$-Form η auf U mit $\chi_1^*\sigma - \chi_0^*\sigma = d\eta$.

Da $\chi \circ \chi_1 = \mathrm{id}_U$ und $\chi \circ \chi_0 = 0$, folgt

$$\chi_1^*\sigma = \chi_1^*\chi^*\omega = (\chi \circ \chi_1)^*\omega = \mathrm{id}^*\omega = \omega; \quad \chi_0^*\sigma = (\chi \circ \chi_0)^*\omega = 0.$$

Es folgt, dass $\omega = d\eta$.

8.19. Bezug zu §15. Eine geschlossene 1-Form auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist exakt. Für die Exaktheit geschlossener k-Formen, $k \geq 2$ langt einfacher Zusammenhang i. Allg. nicht mehr.