Tangentialraum und Normale. Im Folgenden sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und $a \in M$.

7.1. Tangentialvektoren. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ heißt Tangentialvektor an M in a, falls es eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ gibt ($\varepsilon > 0$ geeignet) mit der Eigenschaft, dass $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren in a wird als der Tangentialraum in a bezeichnet. Wir schreiben T_aM.

7.2. Satz.

(a) *T_aM ist n-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^N$.*

(b) *Ist $\varphi : T \to V \subseteq M$ (T offen in $\mathbb{R}^n$) eine lokale Parametrisierung in einer Umgebung von a, und ist $\underline{t} \in T$ mit $\varphi(\underline{t}) = a$, so bilden die Vektoren*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\underline{t}), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\underline{t})$$

eine Basis von T_aM.

(c) *Ist U eine offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^N$ und sind $f_1, \ldots, f_{N-n} : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit*

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \ldots = f_{N-n}(x) = 0\} \text{ und rang} \left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right)_{i=1,\ldots,N-n; j=1,\ldots,n} = N - n,$$

so gilt

$$T_aM = \{v \in \mathbb{R}^N : v \perp \mathrm{grad} f_j(a), j = 1, \ldots, N-n\}.$$

Beweis. Es sei T_1 der Vektorraum aus (b) und T_2 der aus (c). Wir zeigen, dass $T_1 \subseteq T_aM \subseteq T_2$. Wegen $\dim T_1 = \dim T_2 = n$ folgt dann Gleichheit.

"$T_1 \subseteq T_aM$": Es sei $v = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\underline{t}) + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\underline{t})$ eine Linearkombination der Vektoren $\partial_{t_j}\varphi(\underline{t})$. Definiere $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ durch

$$\gamma(\tau) = \varphi(\underline{t}_1 + \lambda_1 \tau, \ldots, \underline{t}_n + \lambda_n \tau).$$

Dann ist $\gamma(\tau) \in M$ für hinreichend kleine ε, und $\gamma(0) = \varphi(\underline{t}) = a$. Ferner ist für $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$$\gamma'(0) = \varphi'(\underline{t})\lambda = v.$$

"$T_aM \subseteq T_2$": Nun sei $v \in T_aM$ und $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Da γ in M verläuft, gilt $f_j(\gamma(\tau)) = 0$. Differenzieren liefert

$$0 = f_j'(\gamma(0))\gamma'(0) = f_j'(a)v = \langle \mathrm{grad} f_j(a), v \rangle,$$

somit $v \in T_2$. $\triangleleft$

7.3. Normalenvektoren. Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^N$ heißt Normalenvektor an M in a, falls

$$w \perp T_aM.$$

Aus 7.2 sehen wir sofort: Die Normalenvektoren bilden einen $(N-n)$-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^N$, der mit N_aM bezeichnet wird und der von den Vektoren

$$\mathrm{grad} f_1(a), \ldots, \mathrm{grad} f_{N-n}(a)$$

aufgespannt wird.

Kompakta mit glattem Rand in $\mathbb{R}^n$.

7.4. Definition. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir sagen, A habe glatten Rand, falls es zu jedem Randpunkt a von A eine offene Umgebung U und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \le 0\}$

(ii) $\operatorname{grad}\psi(x) \ne 0$ für alle $x \in U$.

7.5. Satz. *Mit den Bezeichnungen von 7.4 ist*

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Man nennt ψ daher eine randdefinierende Funktion.

Insbesondere folgt, dass ∂A eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. "$\subseteq$" Ist $x \in U$ mit $\psi(x) < 0$, so ist auch $\psi(y) < 0$ für alle y in einer Umgebung von x. Wegen (i) liegt diese Umgebung in A, somit ist x kein Randpunkt.

"$\supseteq$" Ist $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$, und ist $v = \operatorname{grad}\psi(x) \ne 0$, so betrachte

$$\tau \mapsto \psi(x+\tau v) = \psi(x) + \langle \operatorname{grad}\psi(x), \tau v\rangle + o(\|\tau v\|) = 0 + \tau\|v\|^2 + o(\|\tau v\|).$$

Diese Funktion wechselt in 0 das Vorzeichen. Damit enthält jede Umgebung von x Punkte y mit $\psi(y) > 0$; diese liegen nicht in A. Daher ist x Randpunkt. $\triangleleft$

7.6. Satz. *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $a \in \partial A$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\nu \perp T_a\partial A$

(ii) $\|\nu\| = 1$.

(iii) $\exists \varepsilon > 0$: *$a + \tau\nu \notin A$ für $0 < \tau < \varepsilon$.*

Man nennt $\nu = \nu(a)$ den äußeren Normalenvektor an M in a.

Beweis. Existenz: Ist ψ eine randdefinierende Funktion nahe a, so hat

$$\nu(a) = \frac{\operatorname{grad}\psi(a)}{\|\operatorname{grad}\psi(a)\|}$$

die gewünschten Eigenschaften (vgl. Beweis 7.5).

Eindeutigkeit. Es ist $\dim N_a(\partial A) = n - \dim\partial A = 1$. Also ist $v = \lambda \operatorname{grad}\psi(a)$ für ein $\lambda \ne 0$. Wegen (ii) ist $\lambda = \pm\|\operatorname{grad}\psi(a)\|^{-1}$. Aus (iii) folgt, dass $\lambda > 0$. $\triangleleft$

7.7. Folgerung. *Die äußeren Normalenvektoren an eine kompakte Menge A mit glattem Rand bilden ein stetiges Vektorfeld $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

7.8. Beispiel. Es sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le r\}$ die Vollkugel vom Radius r. Als randdefinierende Funktion kann man $\psi(x) = \|x\|^2 - r^2$ wählen. Hier ist $\partial A = \{x : \|x\| = r\}$; der Normalenvektor an $a \in \partial A$ ist $\nu(a) = \frac{a}{r}$.

Der Satz von Gauß.

7.9. Gaußscher Integralsatz. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei kompakt mit glattem Rand und $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ die äußere Normale. Ferner sei $U \supseteq A$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\,dx = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle\, dS(x). \tag{1}$$

7.10. Erweiterung. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Man nennt einen Randpunkt a von A regulär, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so dass $\partial A \cap U$ eine glatte $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Ansonsten heißt a singulär. Der Satz von Gauß gilt auch noch, wenn die Menge der singulären Randpunkte den $(n-1)$-dimensionalen Minkowski-Inhalt Null hat, die Funktion F auf A stetig ist und $\operatorname{div} F$ auf dem Inneren von A stetig ist. (ohne Beweis)

Für den Beweis einige Vorbereitungen:

7.11. Graphdarstellung. Ist A kompakt mit glattem Rand und $a \in \partial A$, so kann A nahe a als Menge unterhalb des Graphen einer Funktion von $n-1$ Variablen (oBdA der ersten $n-1$) dargestellt werden:

Es sei $\psi : U \to \mathbb{R}$ eine randdefinierende Funktion auf einer Umgebung U von a. Dann ist $\operatorname{grad} \psi(x) \neq 0$ auf U. OBdA sei $\partial_{x_n}\psi(x) > 0$. Nach dem Satz von der impliziten Funktion finden wir $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $I =]\alpha, \beta[$ mit $U' \times I \subseteq U$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to I$, so dass für $(x', x_n) \in U' \times I$ gilt:

$$\psi(x', x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = g(x').$$

Dann ist

$$A \cap (U' \times I) = \{(x', x_n) \in U' \times I : \psi(x', x_n) \le 0\} = \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\}.$$

Mit $\tilde{\psi}(x) = x_n - g(x')$ haben wir dann eine weitere randdefinierende Funktion. Das zugehörige äußere Normalenfeld ist also

$$\nu = \frac{\operatorname{grad} \tilde{\psi}(x)}{\|\operatorname{grad} \tilde{\psi}(x)\|} = \frac{(-\operatorname{grad} g, 1)}{\sqrt{1 + \|\mathrm{grad\,g}\|^2}}.$$

7.12. Definition. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ eine Funktion. Der Träger von f ist die Menge

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \quad (\text{Abschluss in } \mathbb{R}^n).$$

7.13. Lemma. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hat die stetig differenzierbare Funktion g kompakten Träger in U, so ist*

$$\int_U \partial_{x_j} g(x)\, dx = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Beweis. OBdA $j = n$. Wir setzen durch Null fort und fassen g als stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ auf. Dann ist

$$\int_U \partial_{x_n} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_n} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x_n} g(x)\, dx_n\, dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0\, dx' = 0.$$

7.14. Lemma. (Zentraler Spezialfall des Satzes von Gauß) *Es sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I =]\alpha, \beta[$ ein Intervall und $g : U' \to I$ stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$\begin{aligned} A &= \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\} \\ M &= \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\}. \end{aligned}$$

Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $f : U' \times I \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $U' \times I$ und alle $j = 1, \dots, n$

$$\int_A \partial_{x_j} f(x) dx = \int_M f(x)\, \nu_j(x) dS(x),$$

wobei ν_j die j-te Komponente des Normalenvektors ν ist.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.
Fall 1: $1 \le j \le n-1$. Wir beobachten zunächst, dass nach der Kettenregel

$$(1) \qquad \partial_{x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x)\, dx_n = \int_\alpha^{g(x')} \partial_{x_j} f(x)\, dx_n + f(x', g(x'))\ \partial_{x_j} g(x').$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int_A \partial_{x_j} f(x)\, dx &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \left(\int_\alpha^{g(x')} \partial_{x_j} f(x)\, dx_n \right) dx' \\
&\overset{(1)}{=} \int_{U'} \partial_{x_j} \left(\int_\alpha^{g(x')} f(x)\, dx_n \right) dx' - \int_{U'} f(x', g(x'))\, \partial_{x_j} g(x')\, dx' \\
&\overset{7.13}{=} 0 + \int_M f(x) \nu_j(x) dS(x),
\end{aligned}$$

da nach 7.11 und 6.14

$$\nu_j(x) = -\frac{\partial_{x_j} g(x')}{\sqrt{1 + \|g'(x')\|^2}} \quad \text{und} \quad dS(x) = \sqrt{1 + \|g'(x')\|^2}\, dx'.$$

Fall 2: $j = n$. Hier ist

$$\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|g'(x')\|^2}} \quad \text{und, wie bisher,} \quad dS(x) = \sqrt{1 + \|g'(x')\|^2}\, dx'.$$

Somit ist

$$\int_A \partial_{x_n} f(x)\, dx = \int_{U'} \left(f(x', g(x')) - \underbrace{f(x', \alpha)}_{=0} \right) dx' = \int_M f(x)\, \nu_n(x)\, dS(x).$$

7.15. C^∞-Zerlegung der Eins. Es sei K kompakt und $\{U_j : j = 1, \dots, N\}$ eine Überdeckung durch offene Mengen. Wir setzen

$$U_j^\varepsilon = \{x \in U_j : \operatorname{dist}(x, \partial U_j) > \varepsilon\}.$$

Da $x \mapsto \operatorname{dist}(x, \partial U_j)$ stetig und jedes x in mindestens einem U_j enthalten ist, nimmt die Funktion

$$x \mapsto \min\{\operatorname{dist}(x, \partial U_j) : U_j \text{ enthält } x\}$$

auf K ein positives Minimum $2\varepsilon > 0$ an. Damit bilden die Mengen $\{U_j^\varepsilon : j = 1, \dots, N\}$ ebenfalls eine offene Überdeckung von K.
Es sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ eine $\{U_j^\varepsilon\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins nach 6.6. Wir wählen nun eine C^∞-Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die ihren Träger in $B(0, \varepsilon)$ hat und $\int \psi dx = 1$ erfüllt und setzen $\tilde\alpha_j = \psi * \alpha_j$. Dann ist $\tilde\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp} \tilde\alpha_j \in U_j$. Setzen wir nun

$$\beta_j = \tilde\alpha_j / \sum \tilde\alpha_k$$

so erhalten wir eine der Überdeckung $\{U_j\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins aus C^∞-Fuktionen. Unter Kartenwechseln bleiben die Einschränkungen $\beta_{j|\partial A}$ noch α-mal differenzierbar auf ∂A.

Beweis des Satzes von Gauß. Wir überdecken A mit endlich vielen offenen Mengen U_j so, dass entweder

(i) $U_j \subseteq A \setminus \partial A$ (U_j schneidet den Rand nicht) oder
(ii) nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten ist $U_j = U' \times I$ mit U' offen in $\mathbb{R}^{n-1}$ und $I =]\alpha, \beta[$ und

$$U_j \cap A = \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x').\}$$

Mit Hilfe einer untergeordneten Zerlegung der Eins können wir annehmen, dass F seinen Träger in einer dieser Mengen hat. Im Fall (i) gilt (1), weil nach Lemma 7.13 die linke Seite Null ist und die rechte ohnehin Null ist ($F = 0$ auf ∂A).

Im Fall (ii) folgt die Aussage durch Summation über $j = 1, \dots, n$ aus Lemma 7.14. $\triangleleft$

7.16. Beispiel. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n$ das Vektorfeld $F(x) = x$ mit $\operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^n 1 = n$ für alle x. Für jede kompakte Menge A mit glattem Rand ist dann nach Gauß

$$\operatorname{vol} A = \frac{1}{n} \int_A \operatorname{div} F(x)\, dx = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle x, \nu \rangle dS(x).$$

7.17. Greensche Formel in der Ebene. Es sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare, überschneidungsfreie geschlossene Kurve, die den Rand der kompakten Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ im positiven Sinn durchläuft, d.h. es sei $\partial G = \varphi([a, b])$, $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t und für $x = \varphi(t)$ sei die äußere Normale

$$\nu(x) = \frac{(\varphi_2'(t), -\varphi_1'(t))}{\|\varphi'(t)\|}.$$

Das Oberflächenmaß auf φ ist $dS = \|\varphi'(t)\|\, dt$. Also folgt nach 7.16

$$\operatorname{vol} G = \frac{1}{2} \int_{\partial G} \langle x, \nu \rangle\, dS(x) = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)\, dt.$$

Dies ist aber gerade ein Kurvenintegral. Mit der üblichen Schreibweise (x, y) für die Variablen in $\mathbb{R}^2$ und für Kurvenintegrale ($\int_\gamma \langle f, dx \rangle = \sum \int_a^b f_j(\gamma(t))\, \gamma_j'(t)\, dt$) erhalten wir also

$$\operatorname{vol} G = \frac{1}{2} \int_\varphi x\, dy - y\, dx.$$

Bemerkung. Es langt hier, dass φ stückweise stetig differenzierbar ist.

7.18. Archimedisches Prinzip. Ein fester Körper A sei eingetaucht in eine Flüssigkeit der konstanten Dichte $c > 0$, deren Oberfläche mit der Ebene $\{x_3 = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$ zusammenfalle. Die Physik sagt uns, dass im Punkt $x \in \partial A$ die Flüssigkeit einen Druck der Stärke $cx_3\nu(x)$ ausübt, wobei ν die äußere Normale ist (man beachte, dass x_3 negativ ist und der Druck nach innen gerichtet ist). Die Gesamtauftriebskraft ist

$$f = \int_{\partial A} cx_3\nu(x)\, dS(x);$$

für jede Komponente f_j von f gilt also

$$f_j = \int_{\partial A} cx_3\nu_j(x)\, dS(x).$$

Dies ist ein Integral der Form $c \int_{\partial A} \langle F_j, \nu \rangle\, dS$, wobei

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist nach Gauß

$$f_j = c \int_{\partial A} \langle F_j(x), \nu(x) \rangle\, dS(x) = c \int_A \operatorname{div} F_j(x)\, dx = c \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j} dx.$$

Damit ist $f_1 = f_2 = 0$, während

$$f_3 = c \int_A 1\, dx = c \operatorname{vol}(A)$$

ist. Der Körper erfährt also eine nach oben gerichtete Auftriebskraft, die gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.

8. Differentialformen

Der Cotangentialraum. Im folgenden sei M eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^N$.

8.1. Definition. Es sei $f : M \to \mathbb{C}^m$ eine Funktion. Wir schreiben $f \in C^l(M)$, $l = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, falls für jede Karte $\varphi : T \to M$ die Komposition $f \circ \varphi : T \to \mathbb{C}^m$ eine C^l-Abbildung ist.

8.2. Definition. Mit T_p^*M bezeichnen wir den Dualraum zum Tangentialraum T_pM an M in p, d.h. den Raum aller linearen Abbildungen von T_pM nach $\mathbb{R}$. Man nennt T_p^*M den Cotangentialraum an M in p und seine Elemente die Cotangentialvektoren in p.

Ein Vektorfeld auf M ist eine Abbildung V, die jedem $p \in M$ ein Element $V(p) \in T_pM$ zuordnet. Eine $1-$Form auf M ist eine Abbildung ω, die jedem $p \in M$ ein Element $\omega(p) \in T_p^*M$ zuordnet.

8.3. Beispiel. Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in M$. Wir definieren das Differential oder die äußere Ableitung df_p von f in p durch

$$df_p : T_pM \to \mathbb{R}, \quad df_p(v) = \frac{d}{d\tau}\left(f \circ \gamma(\tau)\right)|_{\tau=0}. \tag{1}$$

Dabei ist $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

Man rechnet nach: df_pv ist linear und unabhängig von der Wahl der Kurve γ, die v darstellt. Damit definiert df eine 1-Form.

Beachte: Ist M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so vereinfacht sich dies zu

$$df_p(v) = f'(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)|_{\tau=0} = \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle \quad \text{Richtungsableitung von } f \text{ in Richtung } v;$$

die Linearform df ist also durch Paarung mit dem Vektor $\operatorname{grad} f$ gegeben.

8.4. Basen. Ist $\varphi : T \to M$ eine lokale Parametrisierung nahe p mit $\varphi(\underline{t}) = p$, so wissen wir aus 7.2, dass die Vektoren $\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(\underline{t})$, $j = 1, \ldots, n$, eine Basis von T_pM bilden. Man schreibt sie meist in der Form $\frac{\partial}{\partial t_j}$ (ohne Angabe von φ oder dem Argument $\underline{t}$). Dann hat also in $\varphi(T)$ jedes Vektorfeld V eine Darstellung

$$V(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p)\frac{\partial}{\partial t_j} \quad \text{mit geeigneten } a_j(p) \in \mathbb{R}.$$

Man nennt V stetig bzw. l-mal stetig differenzierbar, falls die Funktionen a_j alle stetig bzw. l-mal stetig differenzierbar sind.

Ebenso haben wir die Funktionen $\pi_j : M \to \mathbb{R}$, $\pi_j : q \mapsto \varphi^{-1}(q)_j$, $j = 1, \ldots, n$, die q auf die $j-$te Komponente von $\varphi^{-1}(q)$ abbilden.

Für ihr Differential $d\pi_{j,p}$ in $p = \varphi(\underline{t})$ gilt:

$$d\pi_{j,p}\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\varphi^{-1}(\varphi(\underline{t} + \tau e_k))\right)_j|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}\left(\underline{t} + \tau e_k\right)_j|_{\tau=0} = \delta_{jk}. \tag{1}$$

Sie bilden also gerade die duale Basis zu den $\frac{\partial}{\partial t_j}$. Man schreibt üblicherweise dt^j statt $d\pi_j$.

In $\varphi(T)$ hat also jede 1-Form ω eine Darstellung

$$\omega(p) = \sum_{j=1}^n b_j(p)dt^j \quad \text{mit geeigneten } b_j(p) \in \mathbb{R}.$$

Man nennt ω stetig/l-mal stetig differenzierbar, falls die b_j dies sind (nur sinnvoll für $l \leq \alpha$, die Glattheit der Mannigfaltigkeit). Oft betrachtet man auch b_j als von t abhängig (in lokalen Koordinaten).