

6. INTEGRATION AUF UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

Abstrakte Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$.

6.1. Mannigfaltigkeiten. Eine n -dimensionale C^α -Mannigfaltigkeit ist ein metrischer Raum M mit einer Überdeckung $\{V_j : j \in J\}$ durch offene Mengen und Homöomorphismen $\varphi_j : T_j \rightarrow V_j$ von offenen Teilmengen T_j des $\mathbb{R}^n$ auf die V_j mit der Eigenschaft, dass für alle k und j

$$\varphi_k^{-1} \varphi_j : \varphi_j^{-1}(V) \rightarrow \varphi_k^{-1}(V)$$

eine C^α -Abbildung ist, falls $V = V_j \cap V_k$ nichtleer ist.

- (i) Eine stetige Abbildung heißt Homöomorphismus, falls sie bijektiv ist und auch ihre Inverse stetig ist.
- (ii) Man nennt die φ_j Parameterabbildungen. Oft arbeitet man auch mit den inversen Abbildungen $\kappa_j = \varphi_j^{-1} : V_j \rightarrow T_j$; man nennt diese Koordinatenabbildungen oder lokale Karten.
- (iii) Wichtig ist insbesondere der Fall kompakter Mannigfaltigkeiten. Hier gibt es stets eine *endliche* Überdeckung.
- (iv) Das C^α lässt man oft weg. Dann ist nicht klar, was gemeint ist. Meist heißt es C^∞ . Hier soll es mindestens C^1 heißen.

6.2. Bemerkung. In Definition 6.1 führen wir *abstrakte* Mannigfaltigkeiten ein. Oft ist es interessant, Mannigfaltigkeiten zu betrachten, die Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ sind. Dann fordert man in 6.1 zusätzlich, dass $\varphi \in C^\alpha$ und $\varphi'(t)$ für jedes $t \in T$ injektiv ist. Man nennt dann M eine in $\mathbb{R}^N$ eingebettete Untermannigfaltigkeit. Wir werden im Folgenden mit ihnen arbeiten. Äquivalent zu dieser Forderung ist, dass zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^N$ und eine α -mal stetig differenzierbare Funktion $f = (f_1, \dots, f_{N-n}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ mit folgenden Eigenschaften existieren:

- (i) $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ (d.h. $f_1(x) = \dots = f_{N-n}(x) = 0$) und
- (ii) Für jedes $x \in M$ hat die Ableitung $f'(x) \in \text{Mat}_{(N-n) \times N}$ den (maximalen) Rang $N - n$.
- (a) *Sprechweise:* Wenn der Schnitt von M mit einer hinreichend kleinen offenen Menge eine Eigenschaft hat, so sagen wir, M habe *lokal* diese Eigenschaft. In diesem Sinn können wir formulieren:
Lokal ist M das gemeinsame Nullstellengebilde der $N-n$ C^α -Funktionen $f_1, \dots, f_{N-n}$, deren Gradientenvektoren in allen Punkten linear unabhängig sind.
- (b) Untermannigfaltigkeiten der Dimension $n = N - 1$ nennt man Hyperflächen. Sie sind lokal die Nullstellenmenge einer reellwertigen C^α -Funktion mit nichtverschwindendem Gradienten.
- (c) Tatsächlich kann man zeigen, dass jede abstrakte Mannigfaltigkeit der Dimension n auch als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n}$ dargestellt werden kann.

6.3. Beispiel: Die Einheitskreislinie $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir können S^1 einerseits als Nullstellengebilde schreiben: $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$. Andererseits haben wir zwei (in diesem Fall ganz einfache) Parametrisierungen, die S^1 beschreiben, nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_1 : T_1 =]0, 2\pi[&\rightarrow V_1 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}, & \varphi_1(t) &= (\cos t, \sin t) \quad \text{und} \\ \varphi_2 : T_2 =]-\pi, \pi[&\rightarrow V_2 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}, & \varphi_2(t) &= (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Das Oberflächenmaß.

6.4. Der Maßtensor auf M . Es sei $\varphi : T \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung für M . Wir definieren den Maßtensor $g = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ durch

$$g(t) = \varphi'(t)^T \varphi'(t).$$

In Komponenten:

$$g_{ij}(t) = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_i}(t) \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_j}(t) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle.$$

Die Determinante $\gamma = \det g$ heißt Gramsche Determinante. Mehr dazu später in 6.10.

Wie verhält sich der Maßtensor bei Koordinatenwechsel, d.h. wenn wir statt φ eine andere Parametrisierung $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \rightarrow V$ (oBdA gleiches V) wählen? Nach Definition ist $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \psi$ für eine C^α -Funktion ψ . Dann gilt für den zugehörigen Maßtensor $\tilde{g}$ und dessen Determinante $\tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(s) &= \tilde{\varphi}'(s)^T \tilde{\varphi}'(s) = (\varphi'(\psi(s))\psi'(s))^T (\varphi'(\psi(s))\psi'(s)) \text{ und} \\ \tilde{\gamma}(s) &= \gamma(\psi(s)) \cdot (\det \psi'(s))^2 \end{aligned}$$

6.5. Lemma. Die Gramsche Determinante ist stets positiv.

Beweis. Für jedes t ist $g(t) = \varphi'(t)^T \varphi'(t)$ ist eine quadratische Matrix. Ferner ist $\ker g(t) = \ker \varphi'(t) = \{0\}$ nach Annahme. (Hier verwenden wir, dass für eine lineare Abbildung A stets $\ker A^*A = \ker A$ gilt. Klar ist $\supseteq$. Umgekehrt folgt aus $A^*Ax = 0$, dass $0 = \langle A^*Ax, X \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2$). Damit ist $g(t)$ injektiv, also als quadratische Matrix auch surjektiv. Somit ist die Determinante $\neq 0$. Sie ist sogar positiv, weil $\varphi'^T \varphi'$ wegen $\langle \varphi'^T \varphi' v, v \rangle = \langle \varphi' v, \varphi' v \rangle \geq 0$ keine negativen Eigenwerte hat. $\triangleleft$

6.6. Zerlegung der Eins. Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer endlichen Überdeckung $\{U_j : j = 1, \dots, q\}$ durch offene Mengen und Parametrisierungen $\varphi_j : T_j \rightarrow U_j$ (gibt es z.B., falls M kompakt ist). Dann gibt es Funktionen $\alpha_j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $0 \leq \alpha_j \leq 1$ für jedes j ;
- (ii) $\alpha_j(x) = 0$, falls $x \notin U_j$;
- (iii) $\sum_j \alpha_j = 1$.
- (iv) Die Funktionen $\alpha_j \circ \varphi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar (dabei denken wir uns diese Funktion außerhalb von T_j durch Null fortgesetzt).

(Man kann sogar C^α -Funktionen bekommen.)

Beweis. Wir setzen $\alpha_j = \frac{\chi_{U_j}}{\sum_k \chi_{U_k}}$. Das geht, weil mindestens eine der Funktionen im Nenner = 1 ist. $\triangleleft$

6.7. Integration auf Mannigfaltigkeiten. Mit den obigen Bezeichnungen nennen wir eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M messbar, falls sie in allen Parametrisierungen messbar ist, d.h., falls für $j = 1, \dots, q$ die Funktionen $f \circ \varphi_j : T_j \rightarrow \mathbb{C}$ messbar sind. Wir setzen

$$\int_M f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^q \int_{T_j} (\alpha_j \cdot f)(\varphi_j(t)) \sqrt{\gamma_j(t)} dt.$$

Dabei ist γ_j die Gramsche Determinante für φ_j . Wir nennen S das Oberflächenmaß für M . Wir können dann auch schreiben

$$\int_M f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^q \int_M \alpha_j(x) f(x) dS(x).$$

Es ist noch zu zeigen, dass diese Definition unabhängig ist

- (i) von der Wahl der Parametrisierungen;
- (ii) von der Wahl der Zerlegung der Eins (bei Einhaltung der Eigenschaften (i)-(iv) aus 6.6).

Zu (i): Wir betrachten oBdA den Fall *einer* Parametrisierung mit der Notation aus 6.4. Hier ist für eine Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ nach 6.4 und dem Transformationssatz

$$\int_{\tilde{T}} g(\tilde{\varphi}(s)) \sqrt{\tilde{\gamma}(s)} ds = \int_{\tilde{T}} g(\varphi \circ \psi(s)) \sqrt{\gamma(s) \det \psi'(t)^2} ds = \int_T g(\varphi(t)) \sqrt{\gamma(t)} dt.$$

Zu (ii) Nehmen wir an, wir haben eine weitere Zerlegung der Eins $1 = \sum_{l=1}^p \beta_l$, bezüglich anderer Parametrisierungen $\tilde{\varphi}_l : \tilde{T}_l \rightarrow V_l$, $l = 1, \dots, p$.

Dann ist

$$\sum_{l=1}^p \int_M \alpha_j(x) \beta_l(x) f(x) dS(x) = \int_M \alpha_j(x) f(x) dS(x)$$

und

$$\sum_{j=1}^q \int_M \alpha_j(x) \beta_l(x) f(x) dS(x) = \int_M \beta_l(x) f(x) dS(x),$$

da im ersten Fall alle Funktionen auf $M \setminus V_j$ und im zweiten Fall alle Funktionen auf $M \setminus \tilde{V}_l$ verschwinden. Summation über j bzw. l ergibt:

$$\sum_{j=1}^q \int_M \alpha_j(x) f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^p \int_M \alpha_j(x) \beta_l(x) f(x) dS(x) = \sum_{l=1}^p \int_M \beta_l(x) f(x) dS(x).$$

6.8. n-dimensionale Volumina. Wir nennen eine Teilmenge E von M messbar, falls ihre charakteristische Funktion in obigem Sinn messbar ist. Wir bezeichnen dann

$$\text{vol}_n(E) = \int_M \chi_E(x) dS(x)$$

als das k -dimensionale Volumen von E .

Die Menge aller messbaren Mengen bildet wegen

$$\varphi_j^{-1}(\cup A_k) = \cup \varphi_j^{-1}(A_k), \quad \varphi_j^{-1}(A_1 \setminus A_2) = \varphi_j^{-1}(A_1) \setminus \varphi_j^{-1}(A_2)$$

eine σ -Algebra $\mathcal{A}(M)$, und $(M, \mathcal{A}(M), \text{vol}_n)$ ist ein Maßraum.

Wir können also auch auf Mannigfaltigkeiten die üblichen Integralsätze aus §2-4 anwenden.

6.9. Beispiel. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t . Ist φ zusätzlich ein Homöomorphismus (also insbesondere überschneidungsfrei), so ist $\varphi(T)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ mit der globalen Parametrisierung $\varphi : T \rightarrow \varphi(T)$. Die Gramsche Determinante ist

$$\gamma(t) = \varphi'(t)^T \varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|^2,$$

und somit

$$\text{vol}_1(\varphi(T)) = \int_{\varphi(T)} 1 dS(x) = \int_T \sqrt{\gamma(t)} dt = \int_T \|\varphi'(t)\| dt = \text{Kurvenlänge von } \varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

6.10. Interpretation des Maßtensors. Für jedes $t_0 \in T$ (Koordinatenumgebung) definiert die positiv definite Matrix $g(t_0)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^k$ (genauer auf den Tangentialvektoren in t_0 , mehr dazu später) durch $\langle v, w \rangle_{g(t_0)} = \langle v, g(t_0)w \rangle = \langle \varphi'(t_0)v, \varphi'(t_0)w \rangle$. Es erlaubt uns, in den Koordinatenumgebungen die Längen und Winkel zu messen, die die Bildvektoren unter φ auf der Mannigfaltigkeit bilden:

Es seien $\gamma_1, \gamma_2 :]-1, 1[\rightarrow T$ zwei Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = t_0$ und Tangentialvektoren $\gamma_1'(0) = v, \gamma_2'(0) = w$. Für die Bildkurven $\Gamma_j = \varphi \circ \gamma_j :]-1, 1[\rightarrow M$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle \Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0) \rangle}_{\text{Skp der Bild-TV, unabh. von } \varphi} &= \langle \varphi'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0), \varphi'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0) \rangle \\ &= \langle \varphi'(t_0)v, \varphi'(t_0)w \rangle = \underbrace{\langle v, w \rangle_{g(t_0)}}_{g\text{-Skalarprodukt der TV}} = \sum_{ij} g_{ij}v_iw_j. \end{aligned}$$

Insbesondere verwenden wir zur Bestimmung der Länge der Bildkurve Γ_1 das Maß

$$ds = \|\Gamma_1'(u)\| du = \sqrt{\sum g_{ij}\gamma_{1i}'(u)\gamma_{1j}'(u)} du.$$

Schreibt man $dt^j = \gamma_{1j}'(u)du$ als Veränderung der j -ten t -Komponente, so ist $ds = \sqrt{\sum g_{ij}dt^i dt^j}$. Man nennt ds das Längenelement und schreibt meist

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}dt^i dt^j.$$

Oft gibt man daher den Maßtensor in der Form

$$g = \sum_{ij} g_{ij}dt^i dt^j$$

an; später wird diese Schreibweise klarer.

6.11. Bemerkung. Für später: Die Definition des Maßtensors lässt sich nur für Mannigfaltigkeiten durchführen, die Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ sind. Hier induziert die Metrik auf $\mathbb{R}^N$ das Maß auf M . Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit kann man jedoch einfach eine stetige Funktion $x \mapsto g(x)$ auf M wählen, so dass $g(x)$ für jedes x ein Skalarprodukt auf dem Tangentialraum in x liefert. Man nennt dann g eine Riemannsche Metrik auf M . Durch $dS = \gamma(x)dx = \sqrt{\det g(x)}dx$ wird dann wieder ein Maß auf M definiert.

6.12. Beispiel. Wir betrachten die 2-Sphäre vom Radius r : S_r^2 in $\mathbb{R}^3$. Wir haben die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \Phi &:]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(\varphi, \theta) &= \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Maßtensor bzw. die Gramsche Determinante sind

$$g(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \gamma(\varphi, \theta) = \det g(\varphi, \theta) = r^4 \cos^2 \theta.$$

? Das Bild von Φ ist die 2-Sphäre ohne den Nullmeridian. Da er eine Nullmenge ist, spielt er für die Integration keine Rolle. Für $f : S_r^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ist also

$$\int_{S_r^2} f(x) dS(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\Phi(\varphi, \theta)) r^2 \cos \theta d\theta d\varphi.$$

Insbesondere erhalten wir für die Oberfläche der Kugel vom Radius r :

$$\text{vol}_2(S_r^2) = \int_{S_r^2} 1 \, dS(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi r^2.$$

6.13. Rotationsflächen. Es sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ stetig differenzierbar und strikt positiv. Dann ist die Rotationsfläche des Graphen von f um die z -Achse

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit: Bis auf eine Nullmenge ist sie durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \Phi &: I \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(t, \varphi) &= \begin{pmatrix} f(t) \cos \varphi \\ f(t) \sin \varphi \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

Hier ist

$$\Phi'(t, \varphi) = \begin{pmatrix} f'(t) \cos \varphi & -f(t) \sin \varphi \\ f'(t) \sin \varphi & f(t) \cos \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Rang } 2).$$

und

$$g(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma(t, \varphi) = f(t)^2(1 + f'(t)^2).$$

Das Volumen der Rotationsfläche ist daher – sofern das Integral existiert –

$$\text{vol}_2(M) = \int_0^{2\pi} \int_I f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt \, d\varphi = 2\pi \int_I f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt.$$

6.14. Beispiel. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist der Graph von F , nämlich die Menge

$$M = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} = F(x_1, \dots, x_n)\},$$

eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$: Die zugehörige Parametrisierung ist

$$\begin{aligned} \varphi &: T \rightarrow M \\ \varphi(t) &= \begin{pmatrix} t \\ F(t) \end{pmatrix}; \quad \text{mit } \varphi'(t) = \begin{pmatrix} \text{Id}_n \\ F'(t) \end{pmatrix} \quad \text{von Rang } n. \end{aligned}$$

Dann gilt (weil $\det(I + vw^T) = 1 + v^T w$ für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$)

$$\det g(t) = \det(\varphi'(t)^T \varphi'(t)) = \det(I + F'(t)^T F'(t)) = 1 + \|F'(t)\|^2$$

und – sofern das Integral existiert –

$$\int_M f(x) \, dS(x) = \int_T f(t, F(t)) \sqrt{1 + \|F'(t)\|^2} \, dt.$$

6.15. Die obere Halbsphäre vom Radius r . (Ein Spezialfall von 6.14) Wir schreiben die Halbsphäre $S_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r, x_n > 0\}$ als Graph: Wir wählen $T = \{t \in \mathbb{R}^{n-1} : \|t\| < r\}$ und

$$\begin{aligned} F &: T \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \sqrt{r^2 - \|t\|^2} \quad \text{und} \\ \varphi &: T \rightarrow S_r^+, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ F(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = -\frac{t_j}{\sqrt{r^2 - \|t\|^2}}; \quad \det g(t) = 1 + \sum_j \frac{t_j^2}{r^2 - \|t\|^2} = \frac{r^2}{r^2 - \|t\|^2}.$$

Für jede integrierbare Funktion ist also

$$\begin{aligned} \int_{S_r^+} f(x) dS(x) &= \int_{\|t\| \leq r} f(t, \sqrt{r^2 - \|t\|^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|t\|^2}} dt \\ &\stackrel{rs=t}{=} \int_{\|s\| \leq 1} f(rs, r\sqrt{1 - \|s\|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|s\|^2}} ds. \end{aligned}$$

6.16. Polarkoordinaten. Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar. Dann ist für fast alle $r > 0$ die Einschränkung der Funktion f auf die Sphäre vom Radius r integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\|y\|=r} f(y) dS(y) \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{\|t\|=1} f(rt) dS(t) \right) r^{n-1} dr.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $H^+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ die obere Halbebene. Es langt offensichtlich, den Satz für den Fall zu beweisen, dass $f = f\chi_{H^+}$ ist.

Wir setzen $B = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und definieren die Abbildung

$$\varphi : B \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow H^+; \quad \varphi(s, r) = (s_1, \dots, s_{n-1}, \sqrt{1 - \|s\|^2}).$$

Dies ist offensichtlich eine Bijektion. Ferner ist

$$\varphi'(s, r) = \begin{pmatrix} r & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & r & s_{n-1} \\ -\frac{rs_1}{\sqrt{\cdot}} & \dots & -\frac{rs_{n-1}}{\sqrt{\cdot}} & \sqrt{1 - \|s\|^2} \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der letzten Spalte (und Bewegen der letzten Zeile in die j -te Zeile) liefert

$$\det \varphi'(s, r) = \frac{r^{n-1}s_1^2}{\sqrt{1 - \|s\|^2}} + \dots + \frac{r^{n-1}s_{n-1}^2}{\sqrt{1 - \|s\|^2}} + r^{n-1}\sqrt{1 - \|s\|^2} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|s\|^2}} \neq 0,$$

somit ist φ ein C^∞ -Diffeomorphismus. Nach dem Transformationssatz ist

$$\int_{H^+} f(x) dx = \int_{B \times \mathbb{R}_{>0}} f(rs, r\sqrt{1 - \|s\|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|s\|^2}} ds dr.$$

Nach dem Satz von Fubini existiert für fast alle $r > 0$ das Integral über B , und es gilt:

$$\int_{H^+} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_B f(rs, r\sqrt{1 - \|s\|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|s\|^2}} ds \right) dr.$$

Nun ist das innere Integral nach 6.15 gerade das Integral von f über die obere Halbsphäre vom Radius r . Wir erhalten also die erste Identität unseres Satzes. Für die zweite klammern wir erst r^{n-1} aus und wenden dann 6.15 (mit $r = 1$) auf $g(s) = f(rs)$ an. $\triangleleft$