5. Fourierreihen

Skalarprodukte und Hilberträume. H sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:
Für beliebige $x, y, z \in H, \alpha \in \mathbb{K}$

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($= \langle y, x \rangle$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
(ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
(iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
(iv) $\langle x, x \rangle > 0$, falls $x \neq 0$.

Es folgt sofort $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

Orthogonalität/Orthonormalität. Wir nennen x orthogonal zu y und schreiben $x \perp y$, falls $\langle x, y \rangle = 0$.

Eine Menge $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ von Vektoren in H heißt orthogonal, falls $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle = 0$ für $\alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta$. Sie heißt orthonormal, falls zusätzlich $\langle v_\alpha, v_\alpha \rangle = 1$ für alle $\alpha \in A$.

Sind $M, N \subseteq H$, so vereinbart man:

(i) M heißt orthogonal zu N, falls $\langle m, n \rangle = 0$ für alle $m \in M, n \in N$.
(ii) $M^\perp = \{x \in H : \langle x, m \rangle = 0$ für alle $m \in M\}$.
$M^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Unterraum von H.

Norm aus Skalarprodukt.

(i) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ zeigt die Stetigkeit des Skalarprodukts.
(ii) Durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist eine Norm auf H definiert. Die Dreieicksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

(iii) Es gilt die Parallelogrammgleichung $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Hilbertraum. H heißt Hilbertraum, falls H bezüglich der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist.

5.1. Satz. *$L^2(X)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int f \overline{g} \, d\mu$.*

Beweis. Man überzeugt sich zunächst, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Interessant ist hier nur die Definitheit. Für $f \in L^2$ ist $\langle f, f \rangle = \int |f|^2 d\mu$ reell und nicht-negativ. Ist $\langle f, f \rangle = 0$, so ist $f = 0$ f.ü. und somit $f = 0$ als Element von L^2 Zur Vollständigkeit: Man rechnet Mit dieser Definition gilt $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$; daher folgt die Aussage aus Satz 4.13. $\triangleleft$

5.2. Satz. *Es sei M abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums H. Dann ist $H = M \oplus M^\perp$. Ferner gilt dann: Ist $x = m + n$ mit $m \in M$ und $n \in M^\perp$, so ist m das eindeutig bestimmte Element von M für das $\|x - m\|$ minimal wird.*

Beweis. Es sei $x \notin M$. Wir setzen $d = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$. Dann existiert eine Folge (m_j) in M mit $\|x - m_j\| \to d$.

1. Schritt. Wir zeigen, dass (m_j) eine Cauchy-Folge ist: Nach der Parallelogrammgleichung (oder durch Nachrechnen) ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|m_j - m_k\|^2 = \|(m_j - x) - (m_k - x)\|^2 \\ &= 2\underbrace{\|m_j - x\|^2}_{\to d^2} + 2\underbrace{\|m_k - x\|^2}_{\to d^2} - \|(m_j - x) + (m_k - x)\|^2. \end{aligned}$$

Nun ist $\|(m_j - x) + (m_k - x)\|^2 = 4\|\frac{1}{2}(m_j + m_k) - x\|^2 \geq 4d^2$, da $\frac{1}{2}(m_j + m_k) \in M$. Es folgt

$$0 \leq \limsup_{j,k\to\infty} \|m_j - m_k\|^2 \leq 0.$$

2. Schritt. Da M abgeschlossen ist und H vollständig: $\exists\, m \in M : m_j \to m, \|x - m\| = d$. Da $x \notin M$, ist $d > 0$.

3. Schritt. Zeige: $\langle x - m, m' \rangle = 0 \;\forall\; m' \in M$: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(t) &= \|x - m + tm'\|^2 = \langle x - m + tm', x - m + tm' \rangle \\ &= \|x - m\|^2 + t\langle m', x - m \rangle + t\langle x - m, m' \rangle + t^2\|m'\|^2. \end{aligned}$$

Dann ist $f(t) \geq d^2$, f ist stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(t) &= \langle m', x - m \rangle + \langle x - m, m' \rangle + 2t\|m'\|^2 \\ &= 2\mathrm{Re}\, \langle m', x - m \rangle + 2t\|m'\|^2. \end{aligned}$$

In 0 hat f lokales Minimum, also ist $f'(0) = 0$. Es folgt, dass $\mathrm{Re}\, \langle m', x - m \rangle = 0$. Analog: $\mathrm{Im}\, \langle m', x - m \rangle = 0$ (mit $g(t) = \|x - m + itm'\|^2$).

4. Schritt. Schreibe $x = m + (x - m)$. Dann ist $m \in M, x - m \in M^\perp$. Folglich $H = M + M^\perp$. Die Summe ist direkt: Ist $x \in M \cap M^\perp$, so ist $\langle x, x \rangle = 0$, also $x = 0$. Also: $H = M \oplus M^\perp$.

5. Schritt. Annahme: $\exists\, m_1, m_2 : \|x - m_1\| = \|x - m_2\| = \min$. Dann ist nach Schritt 3: $x - m_j \in M^\perp$, also $m_1 - m_2 = (x - m_2) - (x - m_1) \in M \cap M^\perp = \{0\}$. $\lhd$

Fourierreihen: Abstrakte Theorie. Im Folgenden sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Norm $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Ferner sei $B = \{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Teilmenge von H.

5.3. Definition. Wir definieren zu $x \in H$ die Funktion $\hat{x} : A \to \mathbb{C}$ durch

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, v_\alpha \rangle$$

und nennen $\hat{x}(\alpha)$ den α-ten Fourierkoeffizienten bzgl. $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$.

Der folgende Satz zeigt, dass Fourierkoeffizienten beste Approximationen liefern:

5.4. Satz. *Es sei $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Menge, F eine endliche Teilmenge von A und U_F der von $\{v_\alpha : \alpha \in F\}$ aufgespannte Unterraum von H.*

(a) *Sind für $\alpha \in F$ Werte $\varphi_\alpha \in \mathbb{C}$ vorgegeben, so existiert genau ein y in U_F mit $\hat{y}(\alpha) = \varphi_\alpha$, nämlich*

$$y = \sum_{\alpha\in F} \varphi_\alpha v_\alpha.$$

In diesem Fall ist

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha\in F} |\varphi_\alpha|^2.$$

(b) *Ist $x \in H$ und*

$$s_F(x) = \sum_{\alpha\in F} \hat{x}(\alpha) v_\alpha,$$

so ist

$$\|x - s_F(x)\| \leq \|x - u\| \quad \text{für alle} \quad u \in U_F,$$

d.h. $s_F(x)$ ist der Vektor aus U_F, der x am nächsten liegt, vgl. 5.2. Ferner gilt:

$$\sum_{\alpha\in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \textit{Besselsche Ungleichung (einfache Version).}$$

Beweis. (a) folgt sofort aus der Orthonormalitätsrelation.
(b) Es ist $\hat{s}_F(\alpha) = \hat{x}(\alpha)$ für alle α und daher $x - s_F(x) \perp v_\alpha$ für alle $\alpha \in F$. Somit ist $(x - s_F(x)) \perp s_F(x) - u$ für alle $u \in U_F$, und

$$\|x-u\|^2 = \|(x - s_F(x)) + (s_F(x) - u)\|^2 = \|x - s_F(x)\|^2 + \|s_F(x) - u\|^2.$$

Dies liefert die Optimalität. Speziell für $u = 0$ folgt $\|s_F(x)\|^2 \le \|x\|^2$, was nach (a) die Besselsche Ungleichung liefert. ◁

5.5. Definition. Es sei $f : A \to [0, \infty[$ eine beliebige Funktion. Wir setzen

$$\sum_{\alpha\in A} f(\alpha) = \sup\{f(\alpha_1) + \dots f(\alpha_k) : \{\alpha_1, \dots \alpha_k\} \text{ endl. Teilmenge von } A\}.$$

5.6. Der Raum $\ell^2(A)$. Es sei

$$\ell^2(A) = \left\{\varphi : A \to \mathbb{C} : \sum_{\alpha\in A} |\varphi(\alpha)|^2 < \infty\right\}.$$

Wir können auf A als $\sigma-$Algebra die Potenzmenge wählen und als Maß das Zählmaß. Dann ist $\sum_{\alpha\in A} f(\alpha)$ das Lebesgue-Integral von f (vgl. 2.10(b)), und $\ell^2(A) = L^2(A)$. Insbesondere ist $\ell^2(A)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

(1)
$$\langle\varphi, \psi\rangle = \sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha)\overline{\psi(\alpha)}$$

und der Norm $\|\varphi\| = \left(\sum |\varphi(\alpha)|^2\right)^{1/2}$.
Was die Summe angeht: Ist $\varphi \in \ell^2(A)$, so ist $\{\alpha : \varphi(\alpha) \neq 0\}$ höchstens abzählbar, denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\{\alpha : \ |\varphi(\alpha)| > \frac{1}{k}\}$ endlich. Es handelt sich daher um Reihen im bekannten Sinn.
Weiterhin sieht man sofort aus Definition 5.5, dass der Unterraum

$$E = \{\hat{x} \in \ell^2(A) : \hat{x}(\alpha) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \alpha\}$$

eine dichte Teilmenge von $\ell^2(A)$ ist.
Dabei nennen wir eine Teilmenge E eines normierten (oder metrischen Raums) X *dicht* in X, falls zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein e_ε in E existiert mit $\|x - e_\varepsilon\| < \varepsilon$ bzw. $d(x, e_\varepsilon) < \varepsilon$.

5.7. Lemma. *X und Y seien metrische Räume, X sei vollständig und $f : X \to Y$ sei stetig. Ferner enthalte X eine dichte Teilmenge X_0, auf der f eine Isometrie ist; das Bild $f(X_0)$ sei dicht in Y.*
Dann ist f eine Isometrie.
Beachte: Man nennt f eine *Isometrie*, falls f bijektiv ist und für alle x_1, x_2 gilt

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Beweis. Direkt. ◁

5.8. Satz. *Es sei $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Menge im Hilbertraum H. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ den Raum der endlichen Linearkombinationen von Elementen v_α. Dann gilt für jedes $x \in H$:*

$$\sum_{\alpha\in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \le \|x\|^2 \qquad \textit{(Besselsche Ungleichung).}$$

Die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ ist ein stetiger Epimorphismus von H auf $\ell^2(A)$. Dessen Einschränkung auf den Abschluss $\overline{\mathcal{P}}$ von $\mathcal{P}$ ist eine Isometrie von $\overline{\mathcal{P}}$ auf $\ell^2(A)$.

Was heißt das? Wir können zu $x \in H$ (oder $\hat{x} \in \ell^2(A)$) das Element $s(x) = \sum_\alpha \hat{x}(\alpha)v_\alpha$ wie folgt definieren: Nur für abzählbar viele α ist $\hat{x}(\alpha) \neq 0$, so dass eine Reihe $\sum_{j=1}^\infty \hat{x}(\alpha_j)e_{\alpha_j}$ vorliegt.

Wegen der Orthonormalität der v_α und der Besselschen Ungleichung definiert die Partialsummenfolge eine Cauchy-Folge, die in der Norm (aber im Allgemeinen nicht absolut) konvergiert. Die Abbildung $x \mapsto s(x)$ ist die Projektion von H auf $\overline{\mathcal{P}}$; ihr Kern ist der Raum $\overline{\mathcal{P}}^\perp$.

Die Tatsache, dass $x \mapsto \hat{x}$ ein Epimorphismus von H auf $\ell^2(A)$ ist (mit anderen Worten, dass zu jeder $\ell^2(A)$-Folge φ ein $x \in H$ existiert mit $\hat{x} = \varphi$), heißt *Satz von Riesz-Fischer.*

Beweis. Da nach 5.4 die Besselsche Ungleichung für jede endliche Teilmenge von A gilt, bleibt sie nach Definition der Reihe auch für A gültig. Nun definieren wir

$$\varphi : H \to \ell^2(A); \quad \varphi(x) = \hat{x}.$$

Man beachte, dass wegen der Besselschen Ungleichung tatsächlich $\hat{x}$ in $\ell^2(A)$ liegt!

Klar: φ ist linear. Ferner ist

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \overset{\text{def}}{=} \|\hat{x}_1 - \hat{x}_2\| \overset{\text{Bessel}}{\leq} \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle} \;\; x_1, x_2 \in H.$$

Daher ist φ stetig. Die Bilder der Elemente in $\mathcal{P}$ sind genau die Elemente des Raums E aus 5.6. Nach 5.4(a) ist

$$\varphi : \mathcal{P} \to E \quad \text{Isometrie.}$$

Unser Satz folgt daher aus Lemma 5.7 mit $X = \overline{\mathcal{P}}$, $X_0 = \mathcal{P}$, $Y = \ell^2(A)$, wenn wir beachten, dass $\overline{\mathcal{P}}$ als abgeschlossene Teilmenge des (vollständigen) Hilbertraums ebenfalls vollständig ist. ◁

5.9. Satz. *Es sei $B = \{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Menge in dem Hilbertraum H. Folgendes ist äquivalent:*

(i) *B ist eine maximale orthonormale Menge.*
Man nennt B dann eine Orthonormalbasis (ONB) (Achtung: Im Allgemeinen ist eine ONB keine Basis!).

(ii) *Die lineare Hülle $\mathcal{P}$ von B ist dicht in H.*

(iii) *Für alle $x \in H$ ist $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$, d.h. die Besselsche Ungleichung ist eine Gleichung.*

(iv) *Für alle $x, y \in H$ ist $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}$ (Parsevalsche Gleichung)*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ist $\overline{\mathcal{P}} \neq H$, so enthält $\overline{\mathcal{P}}^\perp$ mindestens ein Element $v \neq 0$. Durch Hinzufügen von $v/\|v\|$ ließe sich B vergrößern.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Folgt sofort aus 5.8.

(iii)$\Rightarrow$ (iv). In jedem Hilbertraum gilt die Polarisationsgleichung:

$$\begin{aligned} 4\langle x, y\rangle &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ bzw.} \\ 4\langle x, y\rangle &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wenn also die Normen in zwei Hilberträumen übereinstimmen (wie in diesem Fall die Normen in H und in $\ell^2(A)$), so auch die Skalarprodukte.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Ist $0 \neq v \perp B$, so gilt für $x = y = v$:

$$0 \neq \|v\|^2 = \langle x, y\rangle = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)} = \sum 0 = 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

◁

Zur Verdeutlichung noch einmal die zentrale Aussage aus 5.8 und 5.9:

5.10. Satz. *Ist $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine ONB von H, so ist die Abbildung $\varphi : x \mapsto \hat{x}$ ein isometrischer Isomorphismus von H auf $\ell^2(A)$. Man schreibt $x = \sum_\alpha \hat{x}(\alpha) v_\alpha$ im Sinn von 5.8. Es gilt*

$$\langle x, y\rangle_H = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{\ell^2(A)}.$$

Man kann mit dem Lemma von Zorn zeigen:

5.11. Satz. *Jede orthonormale Menge in einem Hilbertraum kann zu einer ONB ergänzt werden. Insbesondere hat jeder Hilbertraum eine ONB.*

5.12. Folgerung. *Jeder Hilbertraum ist isomorph zu $\ell^2(A)$ für eine geeignete Menge A.*

5.13. Satz. (Riesz) *H Hilbertraum. Zu jeder stetigen Linearform $u \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ existiert genau ein $y_u \in H$ mit*

$$u(x) = \langle x, y_u \rangle, \quad x \in H.$$

Beweis. Existenz. Ist $u = 0$, so wähle $y_u = 0$.

Sei also $u \neq 0$. Dann ist $N = \operatorname{Kern} u < H$ und abgeschlossen. Nach 5.2 ist $H = N \oplus N^\perp$. Wähle $y \in N^\perp$ mit $u(y) = 1$. Dann gilt für beliebiges $x \in H$

$$x = (x - u(x)y) + u(x)y \in N \oplus N^\perp.$$

Somit ist $\dim N^\perp = 1$.

Setze $y_u = \frac{y}{\langle y,y \rangle}$. Dann gilt

$$\langle x, y_u \rangle = \langle x, \frac{y}{\langle y, y \rangle} \rangle = \langle x - u(x)y + u(x)y, \frac{y}{\langle y, y \rangle)} \rangle = u(x)(y, \frac{y}{\langle y, y \rangle}) = u(x).$$

Damit haben wir y_u gefunden.

Eindeutigkeit. Sei $z \in H$ ein beliebiges Element mit

$$\langle x, y_u \rangle = u(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in H.$$

Dann ist $\langle x, y_u - z \rangle = 0$ für alle $x \in H$, somit $y_u = z$. $\triangleleft$

Konkrete Fourierreihen.

5.14. Definition. Es sei $\mathcal{F}_{2\pi}$ die Menge aller $2\pi-$periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(t + 2\pi) = f(t) \text{ für alle } t\}.$$

Ferner sei

$$L^2_{2\pi} = \left\{ f \in \mathcal{F}_{2\pi} : f \text{ messbar}, \|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\};$$

genauer deren Äquivalenzklassen modulo Nullfunktionen. Ebenso kann man $L^p_{2\pi}$ definieren. Wir setzen ferner

$$C^k_{2\pi} = \{f \in \mathcal{F}_{2\pi} : f \text{ ist } k - \text{mal stetig differenzierbar}\}.$$

Ein trigonometrisches Polynom ist eine Funktion der Form

$$p(t) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijt} \text{ mit geeignetem } N \in \mathbb{N}_0, c_j \in \mathbb{C}.$$

Klar: (1) Jedes trigonometrische Polynom hat eine Darstellung

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{N} \left(a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt) \right), \quad \text{mit } a_j, b_j \in \mathbb{C}.$$

(2) Jedes trigonometrische Polynom gehört zu $C^\infty_{2\pi}$.

5.15. Lemma. (a) *$L^2_{2\pi}$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

(b) *$C_{2\pi}$ ist dicht in $L^2_{2\pi}$.*

Beweis. Dies ist offensichtlich ein Skalarprodukt. Da es bis auf den (unerheblichen) Faktor $1/2\pi$ mit dem Skalarprodukt von $L^2([-\pi,\pi])$ übereinstimmt und die Funktionen von $L^2([-\pi,\pi])$ zu Funktionen in $L^2_{2\pi}$ fortgesetzt werden können, ist der Raum vollständig.

(b) Es sei $\varepsilon > 0$. Mit Satz 4.16 finden wir leicht eine Funktion $g \in C([-\pi,\pi])$ mit $\|f-g\| < \varepsilon$. Wir können g unter Erhaltung der Ungleichung so ändern, dass $g(-\pi) = g(\pi)$. Damit lässt sich g zu einer Funktion in $C_{2\pi}$ fortsetzen. ◁

5.16. Lemma. *Die Menge der durch $e_j(t) = e^{ijt}$, $j \in \mathbb{Z}$, definierten Funktionen ist orthonormal. Ihre lineare Hülle sind die trigonometrischen Funktionen.*

Beweis. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}\overline{e^{ikt}}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}\,dt$. Das Resultat ist 0 für $j \neq k$ und 2π für $j = k$. ◁

5.17. Hauptsatz. *Die Menge $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB von $L^2_{2\pi}$. Bezeichnen wir (wie in 5.3) mit $\hat{f}_j = \hat{f}(j) = \langle f, e_j\rangle$ den $j-$ten Fourierkoeffizienten, so gilt*

$$f \mapsto \hat{f} \quad \textit{ist eine Isometrie} \quad L^2_{2\pi} \to \ell^2(\mathbb{Z}) \quad \textit{und} \quad \langle f, g\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j \overline{\hat{g}_j}.$$

Jede Funktion $f \in L^2_{2\pi}$ ist insbesondere (eindeutig) durch ihre Fourierreihe darstellbar:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j e^{ijt} \quad \text{im } L^2-\text{Sinn},$$

vgl. 5.8. Im Allgemeinen hat man keine punktweise Konvergenz!)

Beweis. Wegen 5.16 muss man nur zeigen, dass $LH(e_j : j \in \mathbb{Z})$ dicht in $L^2_{2\pi}$ und somit $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB ist. Der Rest folgt dann aus Satz 5.10. Dazu konstruiert man eine Folge trigonometrischer Polynome (q_k) mit folgenden Eigenschaften (eine sog. approximative Identität):

(i) $q_k(t) \geq 0$ für alle k, t

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_k(t)\,dt = 1$ für alle k

(iii) Für jedes $\delta > 0$ sei

$$s_k(\delta) = \sup\{q_k(t) : \delta \leq |t| \leq \pi\}.$$

Dann gilt $s_k(\delta) \to 0$ für $k \to \infty$.

Hat man eine solche Folge, kann man die Dichtheit von $\langle e_j : j \in \mathbb{Z}\rangle$ zeigen: Ist $f \in L^2_{2\pi}$ und $\varepsilon > 0$ vorgelegt, so wählt man zunächst $g \in C^0_{2\pi}$ mit $\|f-g\| < \varepsilon/2$. Es langt also ein trigonometrisches Polynom p mit $\|g-p\| < \varepsilon/2$ zu finden. Dazu definieren wir p_k durch

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)q_k(s)\,ds \\ &\overset{u=t-s}{=} \int_{t-\pi}^{t+\pi} g(u)q_k(t-u)\,du \\ &\overset{\text{Perodizität}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)q_k(t-u)\,du \end{aligned}$$

Wir schreiben $q_k(t) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijt}$. Dann ist

$$q_k(t-u) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{-iju}e^{ijt}$$

und daher p_k ein trigonometrisches Polynom. Wir zeigen, dass p_k gleichmäßig gegen g konvergiert. Wir wählen dazu zuerst ein $\delta > 0$ so, dass

$$(1) \qquad |g(s) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{falls } |s-t| < \delta;$$

dies ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von g möglich. Dann ist wegen (ii)

$$\begin{aligned} p_k(t) - g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(t-s) - g(t))\, q_k(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0\le|s|\le\delta} (g(t-s) - g(t))\, q_k(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|s|\le\pi} (g(t-s) - g(t))\, q_k(s)\, ds \end{aligned}$$

und somit

$$|p_k(t) - g(t)| \overset{(1),(i),(ii)}{\le} \frac{\varepsilon}{4}\cdot 1 + 2\,\|g\|_{\sup} s_k(\delta).$$

Wegen Eigenschaft (iii) ist die rechte Seite $< \varepsilon/2$ für hinreichend großes k. Damit sind wir fertig, denn

$$\|p_k - g\|_{L^2_{2\pi}} \le \|p_k - g\|_{\sup} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es bleibt, eine solche Folge (q_k) zu finden. Eine Möglichkeit ist

$$q_k(t) = c_k\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k,$$

wobei c_k so gewählt ist, dass (ii) gilt.

Dann gilt offensichtlich (i); (ii) gilt nach Definition. Nun zu (iii): Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_k}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \ge \frac{c_k}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t\, dt \\ &= \frac{c_k}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+u}{2}\right)^k du = \frac{2c_k}{(k+1)\pi}\left(\frac{1+u}{2}\right)^{k+1}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2c_k}{(k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Somit ist $c_k \le \frac{(k+1)\pi}{2}$. Nun fällt q_k auf $[0,\pi]$; also ist

$$q_k(t) \le q_k(\delta) \le \frac{(k+1)\pi}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \to 0,$$

und der Beweis ist vollständig. ◁

Der Beweis enthält die folgende bemerkenswerte Aussage:

5.18. Weierstraßscher Approximationssatz. Zu jedem $g \in C_{2\pi}$ gibt es eine Folge von trigonometrischen Polynomen, die gleichmäßig gegen g konvergiert.

5.19. Bemerkung. Wir wissen, dass die Fourierreihe i.Allg. nicht punktweise konvergiert. Wann dies der Fall ist, zeigt u. a. der folgende Satz (s. Heuser, Analysis II, Satz 136.4).

5.20. Satz. *Es seien $f \in L^2_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Existieren die Grenzwerte*

$$f(t^{\pm}) = \lim_{h\to 0^+} f(t \pm h)$$

und sind für $0 < h < \delta$

$$\frac{f(t+h) - f(t^+)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{f(t-h) - f(t^-)}{h}$$

beschränkt, so konvergiert die Fourierreihe von f in t gegen den Mittelwert $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$.