3. Integration auf Produkträumen

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Wir wollen daraus eine σ-Algebra und ein Maß auf $X \times Y$ konstruieren. Zunächst zur σ-Algebra, der wir schon in 3.1(c) begegnen. Literatur: Rudin, Real and Complex Analysis

Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

3.1. Definition.

(a) Ein messbares Rechteck in $X \times Y$ ist eine Menge der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$.

(b) Mit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ bezeichnen wir die kleinste σ-Algebra, die alle messbaren Rechtecke enthält. (Achtung: Dies ist nicht das übliche kartesische Produkt.)

(c) Es sei $E \subseteq X \times Y$ und $x \in X$, $y \in Y$. Wir nennen

$$E_x = \{y : (x,y) \in E\} \text{ den } x-\text{Schnitt von } E$$
$$E^y = \{x : (x,y) \in E\} \text{ den } y-\text{Schnitt von } E.$$

(d) Für eine Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sei

$$f_x : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ durch } f_x(y) = f(x,y);$$
$$f^y : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ durch } f^y(x) = f(x,y).$$

3.2. Lemma.

(a) *Ist $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, so ist $E_x \in \mathcal{B}$ und $E^y \in \mathcal{A}$.*

(b) *Es sei $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbar (bzgl. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$). Dann gilt*

  (i) *Für jedes $x \in X$ ist f_x auf Y messbar bzgl. $\mathcal{B}$.*

  (ii) *Für jedes $y \in Y$ ist f^y auf X messbar bzgl. $\mathcal{A}$.*

Beweis. (a) Es sei Ω die Menge aller $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, für die gilt, dass $E_x \in \mathcal{B}$. Offensichtlich enthält Ω alle messbaren Rechtecke; Ω ist auch eine σ-Algebra, wie man leicht sieht. Da $\Omega \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist und $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ per Definition die kleinste σ-Algebra ist, die alle messbaren Rechtecke enthält, folgt, dass $\Omega = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. (Dazu: $(U \setminus V)_x = U_x \setminus V_x$; $(\bigcup U_k)_x = \bigcup (U_k)_x$.). Für E^y analog.

(b) Es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist nach Definition der Messbarkeit

$$Q = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) > c\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Nach (a) ist dann für jedes $x \in X, y \in Y$:

$$\{y \in Y : f_x(y) > c\} = Q_x \in \mathcal{B} \text{ und } \{x \in X : f^y(x) > c\} = Q_y \in \mathcal{A}.$$

$\triangleleft$

Das Produktmaß.

3.3. Definition. Der Maßaum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt σ-endlich, falls es disjunkte Mengen $X_j, j \in \mathbb{N}$, in $\mathcal{A}$ gibt mit $\mu(X_j) < \infty$ und $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$.
Dies ist z.B. für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt.

Annahme. Im Folgenden nehmen wir zusätzlich an, dass X und Y σ-endlich sind.

3.4. Satz. *Es sei $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Wir definieren $\varphi : X \to [0,\infty]$ und $\psi : Y \to [0,\infty]$ durch*

$$\varphi(x) = \nu(Q_x), \quad \psi(y) = \mu(Q^y).$$

Dann ist φ $\mathcal{A}$-messbar, ψ ist $\mathcal{B}$-messbar, und

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu. \tag{1}$$

Wegen $\varphi(x) = \int_Y \chi_Q(x,y)\, d\nu(y)$ und $\psi(y) = \int_X \chi_Q(x,y)\, d\mu(x)$ kann (1) auch in der Form

$$\int_X \left(\int_Y \chi_Q(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_Q(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

geschrieben werden.

[*Beweis.* Es sei $\Omega \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die Familie aller Mengen Q für die der Satz gilt. Wir werden zeigen, dass Ω die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Ω enthält alle messbaren Rechtecke.

(ii) Ω enthält aufsteigende Ketten (d.h. sind $Q_j \in \Omega$, $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots$, so ist $Q := \bigcup Q_j \in \Omega$).

(iii) Sind $Q_j, j \in \mathbb{N}$, in Ω und disjunkt, so ist $Q := \bigcup Q_j \in \Omega$.

(iv) Ist $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$, und sind $Q_j \in \Omega$ mit $A \times B \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots$, so ist $Q := \bigcap Q_j \in \Omega$.

Zu (i). Ist $Q = A \times B$, so ist $Q_x = B$, falls $x \in A$ und $= \emptyset$, falls nicht. Daher ist $\nu(Q_x) = \nu(B)\chi_A(x)$ und analog $\mu(Q^y) = \mu(A)\chi_B(y)$. Damit sind ϕ und ψ messbar und beide Seiten von (1) haben den Wert $\mu(A)\nu(B)$.

Zu (ii). Analog zu φ und ψ definieren wir φ_j und ψ_j zu Q_j. Sie sind messbar nach Annahme und nichtnegativ. Aus der Additivität von μ bzw. ν folgt, dass $\varphi_j(x) \nearrow \varphi(x)$ und $\psi_j(y) \nearrow \psi(y)$. Der Satz über monotone Konvergenz liefert

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim \int_X \varphi_j \, d\mu = \lim \int_Y \psi_j \, d\nu = \int_Y \psi \, d\nu.$$

Zu (iii). Definiere φ_j und ψ_j wie oben. Dann ist $\varphi = \sum_j \varphi_j$ und $\psi = \sum \psi_j$. Aus Satz **??** folgt, dass

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_j \int_X \varphi_j \, d\mu = \sum_j \int_Y \psi_j \, d\nu = \int_Y \psi \, d\nu.$$

Zu (iv). Wir definieren φ_j und ψ_j wie oben und zeigen, dass

$$\varphi_j(x) \to \varphi(x) \quad \text{und} \quad \psi_j(y) \to \psi(y) : \tag{2}$$

Es ist $\chi_{Q_{1x}}(y) \geq \chi_{Q_{2x}}(y) \geq \ldots$ mit $\lim \chi_{Q_{jx}}(y) = \chi_{Q_x}(y)$ für alle y. Somit ist die Folge punktweise konvergent und dominiert durch $\chi_{Q_{1x}} \in L^1(Y)$. Es folgt mit dominierter Konvergenz, dass

$$\lim \varphi_j(x) = \lim \int_Y \chi_{Q_{jx}} \, d\nu = \int_Y \chi_{Q_x} \, d\nu = \varphi(x).$$

Analog für ψ. Nun wenden wir den Satz von der dominierten Konvergenz ein zweites Mal an: Wir haben punktweise Konvergenz nach (2), und es ist $\varphi_j \leq \nu(B)\chi_A \in L^1(X)$, $\psi_j \leq \mu(A)\chi_B \in L^1(Y)$. Der Satz von der dominierten Konvergenz liefert also

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim_j \int_X \varphi_j \, d\mu = \lim_j \int_Y \psi_j \, d\nu = \int_Y \psi \, d\nu.$$

Es sei nun $X = \bigcup X_j$ (disjunkt) mit $\mu(X_j) < \infty$ und $Y = \bigcup Y_j$ (disjunkt) mit $\nu(Y_j) < \infty$. Für $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ setze $Q_{jk} = Q \cap (X_j \times Y_k)$ und definiere

$$\mathcal{K} = \{Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : Q_{jk} \in \Omega \ \text{ für alle } j,k\}.$$

Nach (ii) und (iv) ist $\mathcal{K}$ eine sogenannte monotone Klasse; es enthält die messbaren Rechtecke nach (i) und disjunkte Vereinigungen davon. Man kann damit zeigen (das ist noch mehr Arbeit), dass $\mathcal{K}$ sogar eine σ-Algebra ist. Da $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ minimal bzgl. dieser Eigenschaften ist, folgt, dass $\mathcal{K} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Es ist also für jedes $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und alle j, k die Menge Q_{jk} in Ω. Andererseits bilden die Q_{jk} eine disjunkte Zerlegung von Q. Wegen (iii) ist also $Q \in \Omega$. Dies war die Behauptung. $\lhd$.]

3.5. Definition. Für $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ definiere

$$(\mu \times \nu)(Q) := \int_X \nu(Q_x)\, d\mu \overset{3.4}{=} \int_Y \mu(Q^y)\, d\nu.$$

Wir nennen $\mu \times \nu$ das Produktmaß auf $X \times Y$. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt durch das folgende Lemma.

3.6. Lemma. *$\mu \times \nu$ ist ein Maß auf $X \times Y$ mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, und $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ ist ein $\sigma-$endlicher Maßraum.*

Beweis. $\mu \times \nu$ ist offensichtlich eine nichtnegative Mengenfunktion auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
Abzählbare Additivität: Sind $Q_1, Q_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen, $Q = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und setzt man

$$\varphi(x) = \nu(Q_x), \quad \varphi_j(x) = \nu(Q_{jx}),$$

so ist wegen der abzählbaren Additivität von ν

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x).$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \varphi_j\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(Q_j).$$

Zur $\sigma-$Endlichkeit: Sind X_j und Y_k wie oben, so ist $X \times Y = \bigcup_{jk} (X_j \times Y_k)$ (disjunkt), und

$$(\mu \times \nu)(X_j \times Y_k) = \mu(X_j)\nu(Y_k).$$

$\lhd$

3.7. Satz von Fubini. *Es sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ messbar bzgl. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

(a) *Ist $f \geq 0$ (reellwertig) und*

(1) $$\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y\, d\mu, \quad x \in X, y \in Y,$$

so ist φ messbar bzgl. $\mathcal{A}$, ψ messbar bzgl. $\mathcal{B}$ und

(2) $$\int_X \varphi\, d\mu = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi\, d\nu.$$

Man schreibt dies auch:

(3) $$\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

und nennt die beiden Integrale rechts die iterierten Integrale für f.

(b) (auch **Satz von Tonnelli**) *Gilt*

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f_x|\, d\nu < \infty \quad \text{und} \quad \int_X \varphi^*\, d\mu < \infty,$$

so ist $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

(c) *Ist $f \in L^1(\mu \times \nu)$, so ist $f_x \in L^1(\nu)$ für fast alle $x \in X$ und $f^y \in L^1(\mu)$ für fast alle $y \in Y$. Die durch (1) f.ü. definierten Funktionen φ und ψ liegen in $L^1(\mu)$ bzw. $L^1(\nu)$, und (2) bzw. (3) gelten.*

Hauptanwendung: Kombiniert man (b) und (c), so sieht man: Ist f messbar und eines der iterierten Integrale für $|f|$ endlich, so ist $f \in L^1$, und die Identitäten (2) bzw. (3) gelten. Beachte die Annahme, dass X und Y hier σ-endlich sind.

Beweis. (a) Nach Lemma 3.2 sind φ und ψ sinnvoll definiert. Ist $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und $f = \chi_Q$, so folgt die Identität (2) unmittelbar aus Definition 3.5 und Satz 3.4. Damit gilt (a) für alle nichtnegativen einfachen messbaren Funktionen. (*)

Ist nun f beliebig, so existiert nach Satz 2.8 eine monoton wachsende Folge messbarer einfacher Funktionen s_k mit $s_k(x,y) \to f(x,y)$. Setze $\varphi_k(x) = \int_Y (s_k)_x \, d\nu$. Wegen $s_1 \le s_2 \le \ldots$ ist auch $(s_1)_x(y) \le (s_2)_x(y) \le \ldots$ mit $(s_k)_x(y) \to f_x(y)$ für alle y. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \lim \int_Y (s_k)_x \, d\nu = \lim \varphi_k(x).$$

Ferner ist $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \ldots$. Eine weitere Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz zeigt, dass

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim \int_X \varphi_k \, d\mu. \tag{4}$$

Andererseits gilt wegen (*):

$$\int_X \varphi_k \, d\mu \overset{(*)}{=} \int_{X\times Y} s_k(x,y) \, d(\mu \times \nu) \overset{\text{mon.Kvgz}}{\longrightarrow} \int_{X\times Y} f(x,y) \, d(\mu\times\nu). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt nun die erste Identität von (2). Zweite analog.

(b) folgt sofort, wenn man (a) auf $|f|$ anwendet.

(c) Es genügt, reellwertige Funktionen zu betrachten. In diesem Fall definieren wir zu $f^\pm$ die Funktionen $\varphi^\pm$ wie in (1). Nun ist $f \in L^1$, also nach Definition $f^+ \in L^1$. Da (a) für f^+ gilt, liegt φ^+ in $L^1(X)$, ebenso φ^-. Insbesondere gilt nach Lemma 2.17: $\varphi^\pm(x) < +\infty$ f.ü.. Damit ist $(f^\pm)_x \in L^1(Y)$ für fast alle x. Wegen $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$ folgt, dass $f_x \in L^1(Y)$ für fast alle x. Damit gilt auch

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y (f^+)_x \, d\nu - \int_Y (f^-)_x \, d\nu = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \quad \text{f.ü.},$$

somit $\varphi \in L^1$.

Nun ist nach (a)

$$\int_X \varphi^\pm \, d\mu \quad = \quad \int_{X\times Y} f^\pm \, d(\mu \times \nu),$$

und daher

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu).$$

Die Aussagen für ψ folgen analog. ◁

Vollständigkeit.

3.8. Bemerkung. Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist vollständig, d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge ist wieder eine Nullmenge. Dies ist bei dem hier konstruierten Produktmaß i. Allg. nicht der Fall. Ist z.B. A eine Nullmenge in $\mathcal{A}$ und B eine nichtmessbare Menge (d.h. $B \notin \mathcal{B}$), so ist $A \times B \subseteq A \times Y$ und $(\mu \times \nu)(A \times Y) = 0$. Die Menge $A \times B$ gehört jedoch nicht zu $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, denn sonst wäre $B = (A \times B)_x \in \mathcal{B}$ nach Lemma 3.2.

Man kann jedoch jedes Maß vervollständigen:

3.9. Satz. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{A}^*$ die Menge aller $A \subseteq X$, für die es Mengen $U, V \in \mathcal{A}$ gibt mit $U \subseteq A \subseteq V$ und $\mu(V \setminus U) = 0$. Wir setzen dann $\mu^*(A) = \mu(U)$. Damit ist auch $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ ein Maßraum.*

Beweis. (1) μ ist sinnvoll definiert. Ist nämlich auch $U_1 \subseteq A \subseteq V_1$ und $\mu(V_1 \setminus U_1) = 0$, so ist

$$U \setminus U_1 \subseteq A \setminus U_1 \subseteq V_1 \setminus U_1 \quad \text{und so} \quad \mu(U \setminus U_1) = 0.$$

Analog ist $\mu(U_1 \setminus U) = 0$ und somit $\mu(U) = \mu(U_1)$.

(2) $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra: (i) Da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ ist, ist $X \in \mathcal{A}^*$.

(ii) Sind $A_j \in \mathcal{A}^*$, so existieren $U_j, V_j \in \mathcal{A}$ mit $U_j \subseteq A_j \subseteq V_j$ und $\mu(V_j \setminus U_j) = 0$. Es folgt $\cup U_j \subseteq \cup A_j \subseteq \cup V_j$ und $\mu(\cup V_j \setminus \cup U_j) \leq \sum \mu(V_j \setminus U_j) = 0$. Somit ist $\cup A_j \in \mathcal{A}^*$.

(iii) Ist $U_j \subseteq A_j \subseteq V_j$, $j = 1, 2$, mit $\mu(V_j \setminus U_j) = 0$, so ist $U_1 \setminus V_2 \subseteq A_1 \setminus A_2 \subseteq V_1 \setminus U_2$ und $\mu(V_1 \setminus U_2) \setminus (U_1 \setminus V_2)) = \mu((V_1 \setminus U_1) \cup (V_2 \setminus U_2)) = 0$ und somit $A_1 \setminus A_2$ in $\mathcal{A}^*$. ◁

3.10. Bemerkung. Man kann entsprechend die Definition der Messbarkeit erweitern: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, so nennt man eine Funktion messbar auf X, falls

(i) f wenigstens auf einer Menge E mit $\mu(X \setminus E) = 0$ definiert ist und

(ii) f als Funktion auf E messbar ist, d.h. $\{x : f(x) > c\} \cap E \in \mathcal{A}$ für alle c.

Ob f außerhalb von E definiert ist (und wenn ja, wie) spielt bei der Integration keine Rolle.

3.11. Lemma. *Es seien μ_1 und μ_2 Maße auf der σ-Algebra $\mathbb{B}$ der Borelmengen in $\mathbb{R}^n$ und es gelte $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ für jedes endliche Intervall I. Dann ist $\mu_1 = \mu_2$ auf den Borelmengen.*

3.12. Satz. *Es sei m_j das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^j$, $j = 1, 2, \ldots$; $\mathcal{M}_j$ bezeichne die Lebesgue-messbaren Mengen.*

Ist $n = r + s$ mit $r, s \geq 1$, so ist m_n die Vervollständigung des Produktmaßes $m_r \times m_s$ i.S.v. Satz 3.9. Für die σ-Algebra $\mathbb{B}_n$ der Borelmengen in $\mathbb{R}^n$ und die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$ gilt

$$\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subseteq \mathcal{M}_n.$$

Beweis. Jedes $n-$dimensionale Intervall ist in $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. Da $\mathbb{B}_n$ die kleinste $\sigma-$Algebra ist, die alle Intervalle enthält, ist $\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. Nun sei $E \subseteq \mathbb{R}^r$ offen. Dann ist $E \times \mathbb{R}^s \in \mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{M}_n$. Folglich ist $E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_n$ für alle $E \in \mathbb{B}_r$, denn die Menge $\{E \subseteq \mathbb{R}^r : E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_n\}$ ist eine $\sigma-$Algebra.

Da jedes $E \in \mathcal{M}_r$ die Vereinigung von einer Borelmenge und einer Nullmenge ist, s. 1.19, ist auch $E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_n$ für alle $E \in \mathcal{M}_r$, denn (Nullmenge in $\mathbb{R}^r$) $\times \mathbb{R}^s =$ Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Analog ist $\mathbb{R}^r \times F \in \mathcal{M}_n$ für alle $F \in \mathcal{M}_s$. Es folgt, dass $E \times F = (E \times \mathbb{R}^s) \cap (\mathbb{R}^r \times F) \in \mathcal{M}_n$. Somit ist

$$\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subseteq \mathcal{M}_n$$

(dies gilt nicht nur für das kartesische Produkt, sondern auch für die $\sigma-$Algebra $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$!).

Auf jedem Intervall in $\mathbb{R}^n$ stimmt m_n mit $m_r \times m_s$ überein. Nach Lemma 3.11 stimmen m_n und $m_r \times m_s$ daher auf $\mathbb{B}_n$ überein. Damit ist

$$\mathcal{M}_n = \text{ Vervollständigung von } \mathbb{B}_n \text{ bzgl. } m_n = \text{Vervollständigung von } \mathbb{B}_n \text{ bzgl. } m_r \times m_s.$$

◁

3.13. Satz. *Sind $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume, und ist $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*$ die Vervollständigung von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ bzgl. $\mu \times \nu$, so bleiben die Aussagen des Satzes von Fubini gültig, sofern man folgendes beachtet:*

Die Messbarkeit von f_x lässt sich nur für fast alle x zeigen, so dass φ nur f.ü. definiert ist; analog für f^y und ψ.

3.14. Bemerkung. Wir können mit dem Satz von Fubini die mehrdimensionale Lebesgue-Integration auf die eindimensionale zurückzuführen. Ein einfaches Beispiel:
Ist $I = \{x : a_j < x < b_j\}$ ein Intervall (eventuell $a_j = -\infty, b_j = +\infty$) und $f \in L^1(I)$, so ist

$$\int_I f\,dx = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n,$$

wobei man die Integrale von innen nach außen abarbeitet. Auf die Reihenfolge kommt es nicht an.

Wir wollen Satz 3.13 hier nicht beweisen. Der Schlüssel zu diesem Resultat ist das folgende Lemma:

3.15. Lemma. *Ist h eine $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*-$messbare Funktion mit $h(x, y) = 0$ $(\mu \times \nu)-$fast überall. Dann gilt für fast alle x, dass $h_x(y) = 0$ für fast alle y. Insbesondere ist h_x für fast alle x eine $\mathcal{B}$-messbare Funktion. Analoges gilt für h^y.*

Beweis. Die Menge P aller Punkte in $X \times Y$, für die $h(x, y) \neq 0$ ist, ist $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*-$messbar mit Maß Null. Folglich existert eine Menge $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit $P \subseteq Q$ und $(\mu \times \nu)(Q) = 0$. Nach Satz 3.4 ist

$$\int_X \nu(Q_x)\,d\mu(x) = 0,$$

somit $\nu(Q_x) = 0$ für fast alle x (Lemma 2.17(b)), etwa für $x \notin N$. Da $P_x \subseteq Q_x$ und da $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum ist, ist $\nu(P_x) = 0$ für $x \notin N$. Nun ist

$$y \in P_x \Leftrightarrow (x, y) \in P \Leftrightarrow h(x, y) \neq 0 \Leftrightarrow h_x(y) \neq 0,$$

daher $h_x = 0$ f.ü.. Da für $x \notin N$ jede Teilmenge der Nullmenge P_x wegen der Vollständigkeit des Maßes ebenfalls Nullmenge und damit messbar ist, schließen wir, dass h_x $\mathcal{B}$-messbar ist. $\triangleleft$