2. Integration

Grundlagen.

2.1. Definition.

(a) Ein Maß ist eine nichtnegative, abzählbar additive Mengenfunktion.

(b) Ein Maßraum ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X und einem auf $\mathcal{A}$ definierten Maß μ. Er heißt endlich, falls $\mu(X) < \infty$.

Unser wesentliches Beispiel für einen Maßraum ist $X = \mathbb{R}^n$ mit der σ-Algebra $\mathcal{A}$ der Lebesgue-messbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß. Es langt, diesen Fall im Auge zu behalten. Es gibt jedoch noch viele weitere Beispiele, etwa die σ-Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^n$ (mit dem Lebesgue-Maß) oder $X = \mathbb{Z}$ mit der Potenzmenge $\mathcal{A} = \mathcal{P}$ und dem Zählmaß.

2.2. Definition. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ heißt messbar, falls für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X : f(x) > a\}$ messbar ist.

Messbarkeit hängt nicht von dem Maß, sondern nur von der σ-Algebra ab. So kann man etwa von Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu sprechen, wo für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x : f(x) > a\}$ eine Borel-Menge ist.

2.3. Bemerkung. (a) Ebensogut hätte man fordern können

(i) $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ messbar für alle a,

(ii) $\{x \in X : f(x) < a\}$ messbar für alle a oder

(iii) $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ messbar für alle a

(b) Hat man zwei Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, so definiert man Messbarkeit einer Funktion $f : X \to Y$ i. Allg. dadurch, dass man fordert, dass das Urbild jedes Elements von $\mathcal{B}$ ein Element von $\mathcal{A}$ ist. 'Urbilder messbarer Mengen sind messbar'. Die obige Definition stimmt für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ damit überein, wenn man auf $\mathbb{R}$ die σ-Algebra der Borelmengen wählt.

(c) Für Funktionen $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ stimmt das ebenfalls, wenn man die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ um die offenen Umgebungen von $+\infty$ und $-\infty$ ergänzt. Dies sind diejenigen Teilmengen von $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, deren Schnitt mit $\mathbb{R}$ offen ist und die ein Intervall der Form $]a, +\infty]$ bzw. $[-\infty, a[$ enthalten.

Beweis. (a) Schreibe

$$\{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_n \left\{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\} \tag{1}$$

$$\{x : f(x) < a\} = X \setminus \{x : f(x) \geq a\} \tag{2}$$

$$\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_n \left\{x : f(x) < a + \frac{1}{n}\right\} \tag{3}$$

$$\{x : f(x) > a\} = X \setminus \{x : f(x) \leq a\} \tag{4}$$

Dann folgt aus der Messbarkeit der Mengen in Definition 2.2 die von (1), daraus die von (2), daraus die von (3) daraus die von (4) und daraus wieder die von denjenigen in 2.2.

(b) Ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ das Urbild von $]a, \infty[$ messbar, so auch das jedes offenen Intervalls. Da jede offene Menge abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, ist auch das Urbild jeder offenen Menge messbar. Somit bilden die Teilmengen von $\mathbb{R}$, deren Urbild messbar ist, eine σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält. Insbesondere ist das Urbild jeder Borelmenge messbar.

Ist umgekehrt das Urbild jeder Borelmenge messbar, so auch das von $]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

(c) Analog. ◁

2.4. Lemma. *Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Borel- (und somit auch Lebesgue-)messbar.*

Beweis. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ ist das Urbild der offenen Menge $]a, \infty[$ unter f, also offen und damit messbar. $\triangleleft$

2.5. Satz.

(a) *Ist f messbar, so auch $|f|$ (die Umkehrung gilt nicht).*

(b) *Sind f_k messbar, so auch $g_1 = \sup f_k$, $h_1 = \limsup f_k$, $g_2 = \inf f_k, h_2 = \liminf f_k$.*

Insbesondere: Sind f, g messbar, so auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$, noch spezieller auch die Funktionen

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{und} \quad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

(c) *Der Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge messbarer Funktionen ist messbar.*

(d) *Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar, und ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch $h(x) = F(f(x), g(x))$ definierte Funktion messbar.*

Insbesondere: $f + g$ und $f \cdot g$ sind messbar.

Beweis. (a) $\{x : |f(x)| < a\} = \{x : f(x) < a\} \cap \{x : f(x) > -a\}$.

(b) $\{x : \sup f_k(x) > a\} = \bigcup_k \{x : f_k(x) > a\}$. Daher ist das Supremum messbarer Funktionen messbar. Analog ist das Infimum messbar.

Ferner ist $h_1 = \inf g_m$, wobei $g_m = \sup\{f_k : k \geq m\}$ ist. Damit ist der Limes superior messbar, analog der Limes inferior.

(c) folgt aus (b), denn für konvergente Folgen ist der Limes gleich dem Limes superior.

(d) Die Menge $G_a = \{(u, v) : F(u, v) > a\}$ ist offen. Wir können sie also in der Form $G_a = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ darstellen, wobei die I_m offene Intervalle in $\mathbb{R}^2$ sind. Schreibe $I_m = \{(u, v) : a_m < u < b_m, c_m < v < d_m\}$. Wegen der Messbarkeit von f und g sind die Mengen

$$\begin{aligned} \{x : a_m < f(x) < b_m\} &= \{x : a_m < f(x)\} \cap \{x : f(x) < b_m\} \\ \{x : c_m < g(x) < d_m\} &= \{x : c_m < g(x)\} \cap \{x : g(x) < d_m\} \end{aligned}$$

messbar und damit auch ihr Durchschnitt; dieser ist jedoch gerade $\{x : (f(x), g(x)) \in I_m\}$. Es folgt, dass $\{x : h(x) > a\} = \{x : (f(x), g(x)) \in G_a\} = \bigcup \{x : (f(x), g(x)) \in I_m\}$ messbar ist. $\triangleleft$

2.6. Achtung. Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit von $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der Messbarkeit von f nicht die Messbarkeit von $f \circ F$!

2.7. Definition.

(a) Es sei $E \subseteq X$. Die durch

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

definierte Funktion heißt charakteristische Funktion von E.

(b) Eine einfache Funktion ist eine Funktion der Form

$$s = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j}$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$ und $E_j \subseteq X$ paarweise disjunkt.

Klar: Sind alle E_j messbar, so ist s messbar. Sind die c_j außerdem paarweise verschieden, so sind mit s auch alle E_j messbar, denn dann ist $E_k = \{x : c_k - \varepsilon < s(x) < c_k + \varepsilon\}$, falls $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass kein anderes c_j in $]c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon[$ liegt.

2.8. Satz.

(a) *Zu jeder Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gibt es eine Folge s_j einfacher Funktionen mit $s_j(x) \to f(x)$ für alle x.*

(b) *Ist f zusätzlich messbar, so kann man die s_j messbar wählen.*

(c) *Ist f messbar und ≥ 0, so kann man eine monoton wachsende Folge messbarer nichtnegativer s_j finden.*

Beweis. Ist $f \geq 0$ so definiert man für $k, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k \cdot 2^k$:

$$E_{kj} = \left\{ x : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k} \right\} \text{ und } F_k = \{x : f(x) \geq k\}.$$

Ist f messbar, so auch E_{kj} und F_k. Nun setzen wir

$$s_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_{kj}} + k\chi_{F_k}$$

Die Folge ist monoton wachsend, messbar, falls f messbar ist, und konvergiert punktweise gegen f.

Für beliebiges f schreibt man $f = f^+ - f^-$ und wendet die Konstruktion auf $f^\pm$ an. ◁

2.9. Bemerkung. Ist f beschränkt, so konvergiert die obige Folge (s_k) sogar gleichmäßig gegen f.

2.10. Definition.

(a) Es sei $s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}$ nichtnegativ und alle E_j seien messbar. Dann setzen wir

$$\int s\, d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(E_j) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

(b) Ist f messbar und nichtnegativ, so setzt man

$$\int f\, d\mu = \sup \int s\, d\mu,$$

wobei s einfach und messbar ist mit $0 \leq s \leq f$.

(c) Ist f messbar, so setzt man

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

vorausgesetzt, es sind nicht beide Terme rechts unendlich. Die Funktion f heißt integrierbar (im Sinne von Lebesgue), falls beide Terme rechts endlich sind. Wir schreiben dann $f \in L^1(X)$. Will man betonen, über welche Variablen integriert wird so schreibt man z.B. $\int f(x,y)\, d\mu(y)$. Ist μ das Lebesgue-Maß m auf $\mathbb{R}^n$, so schreibt man einfach dx statt dm bzw. $dm(x)$.

(d) Ist E messbar, so definieren wir für messbares f:

$$\int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu.$$

Wir schreiben $f \in L^1(E)$, falls $f\chi_E \in L^1(X)$.

2.11. Lemma. *Es sei $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbar, $E \subseteq X$ messbar.*

(a) *Ist f auch beschränkt auf E, und ist $\mu(E) < \infty$, so ist $f \in L^1(E)$.*

(b) *Sind $f, g \in L^1(E)$ und ist $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in E$, so ist*

$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$

(c) *Ist $a \le f(x) \le b$ für alle $x \in E$ und ist $\mu(E) < \infty$, so ist*

$$a\mu(E) \le \int_E f\, d\mu \le b\mu(E).$$

(d) *Sind $f, g \in L^1(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $\alpha f + \beta g \in L^1(E)$ und*

$$\int_E \alpha f + \beta g\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu.$$

(e) *Ist f messbar und $\mu(E) = 0$, so ist*

$$\int_E f\, d\mu = 0.$$

(f) *Ist $f \in L^1(E)$ und $A \subseteq E$ messbar, so ist $f \in L^1(A)$.*

2.12. Satz. *Es sei $f \ge 0$ messbar. Wir definieren die Mengenfunktion $\varphi_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch $\varphi_f(A) = \int_A f\, d\mu$. Dann ist φ_f nichtnegativ und abzählbar additiv, also ein Maß. Dies liefert eine wichtige Beispielklasse von Maßen.*

2.13. Folgerung. Es sei f messbar, und es existiere $\int f\, d\mu$. Ist A messbar und N eine Nullmenge, so gilt

$$\int_A f\, d\mu = \int_{A\cup N} f\, d\mu.$$

Beweis. Schreibe $A \cup N = A \cup N'$ (disjunkt), wobei $N' = N \setminus A$ ebenfalls Nullmenge ist. Nach Satz 2.12 und 2.11(e) ist

$$\int_{A\cup N} f^\pm\, d\mu = \int_A f^\pm\, d\mu + \int_{N'} f^\pm\, d\mu = \int_A f^\pm\, d\mu + 0.$$

$\triangleleft$

2.14. Definition. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf der Menge der Funktionen auf X durch

$$f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{x : f(x) \ne g(x)\}) = 0;$$

gesprochen: "f ist fast überall gleich g" oder "$f = g$ f.ü.". Man sieht leicht, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Man sagt, eine Eigenschaft gelte fast überall auf X (bezüglich eines festen Maßes), falls die Menge, auf der die Eigenschaft verletzt ist, das Maß Null hat.

Für $E \subseteq X$ messbar schreibt man auch $f = g$ f.ü. auf E, falls $\mu(\{x : f(x) \ne g(x)\} \cap E) = 0$.

2.15. Lemma. *Gilt $f = g$ fast überall, so sieht man leicht, dass*

(1) $$f \text{ messbar} \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ messbar}$$

(2) $$\int f\, d\mu \text{ existiert} \quad \Leftrightarrow \quad \int g\, d\mu \text{ existiert}$$

(3) $$f \in L^1 \quad \Leftrightarrow \quad g \in L^1;$$

Existiert eines der beiden Integrale, so ist für jede messbare Teilmenge E von X

(4) $$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

2.16. Bemerkung. Funktionswerte auf Nullmengen spielen also bei der Integration keine Rolle. Es ist daher üblich, $L^1(X)$ nicht als Menge von Funktionen zu sehen, sondern als Menge von Äquivalenzklassen von Funktionen. Anders ausgedrückt: Man unterscheidet *nicht* zwischen zwei Funktionen, wenn sie außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen.

Beispielsweise identifiziert man die Nullfunktion auf $\mathbb{R}^n$ und $\chi_{\mathbb{Q}^n}$, weil $\mathbb{Q}^n$ eine Nullmenge ist.

2.17. Lemma.

(a) Ist $f \in L^1(X)$, so haben die Mengen

$$\{x : f(x) = +\infty\} \quad \text{und} \quad \{x : f(x) = -\infty\}$$

beide das Maß Null. Es ist also $|f(x)| < +\infty$ f.ü..

(b) Ist $f \geq 0$ messbar und $\int f \, d\mu = 0$, so ist $f = 0$ fast überall.

Beweis. (a) folgt aus 2.11(b).

(b) Wir schreiben

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_j \left\{x : \frac{1}{j+1} \leq f(x) < \frac{1}{j}\right\} \cup \{x : f(x) \geq 1\};$$

dies ist eine abzählbare disjunkte Vereinigung messbarer Mengen. Ist also f nicht fast überall Null, so hat eine dieser Mengen positives Maß, und die Behauptung folgt aus 2.11(b). $\lhd$

2.18. Lemma.

(a) *Ist $f \in L^1(X)$, so ist $|f| \in L^1(X)$ und $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.*

(b) *Ist f messbar, $g \in L^1(X)$ und $|f| \leq g$, so ist $f \in L^1(X)$.*

Beweis. Schreibe $A = \{x : f(x) \geq 0\}$ und $B = \{x : f(x) < 0\}$. Dann ist $X = A \cup B$ (disjunkt), also nach Satz 2.12

$$\int |f| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_B |f| \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu + \int_B f^- \, d\mu,$$

so dass $|f| \in L^1(X)$. Wegen $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt die Abschätzung.

(b) $f^+ \leq g, f^- \leq g$.

Konvergenzsätze.

2.19. Erinnerung. Eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen (a_k) ist konvergent, falls sie beschränkt ist, ansonsten divergiert sie bestimmt gegen $+\infty$. Wir schreiben $\lim a_k$ für den 'Grenzwert' in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

2.20. Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz. *Es sei (f_j) eine Folge messbarer Funktionen mit $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in X$. Sei $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiert durch $f(x) = \lim f_j(x)$. Dann gilt*

$$\lim \int f_j \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \lim f_j \, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Beweis. Schreibe $\alpha = \lim \int f_j \, d\mu$.

Die Funktion f ist als supremum messbarer Funktionen messbar, also existiert $\int f \, d\mu$. Wegen $\int f_k \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ folgt, dass $\alpha \leq \int f \, d\mu$.

Wähle $0 < c < 1$ beliebig. Ist s einfach und messbar mit $0 \leq s \leq f$ so setzen wir

$$E_k = \{x : f_k(x) \geq cs(x)\}.$$

Die Monotonie der Folge (f_k) zeigt, dass $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$. Weil $s(x)$ endlich ist, und $\lim f_k(x) = f(x)$ ist, gilt

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_k.$$

Für festes k ist also

$$\int f_k \, d\mu \geq \int_{E_k} f_k \, d\mu \geq c \int_{E_k} s \, d\mu.$$

Aus der abzählbaren Additivität des Maßes $B \mapsto \int_B s d\mu$ (s. **??**) folgt dann

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \geq c \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} s \, d\mu = c \int s \, d\mu.$$

Wir bilden nun das supremum über alle einfach messbaren s mit $0 \leq s \leq f$ und erhalten

$$\alpha \geq c \int f \, d\mu.$$

Da $c < 1$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\triangleleft$

2.21. Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. Es sei (f_j) eine Folge messbarer Funktionen. Der Grenzwert

$$f(x) = \lim f_j(x)$$

existiere fast überall. Ferner gebe es eine Funktion $g \in L^1(X)$ mit $|f_j(x)| \leq g(x)$ fast überall. Dann ist $f \in L^1(X)$ und

$$\lim \int f_j \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \lim f_j \, d\mu.$$

[Für den Beweis benötigen wir Fatous Lemma:

Lemma. Es sei (f_j) eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und f definiert durch

$$f(x) = \liminf f_j(x).$$

Dann gilt

$$\int \liminf f_j(x) \, d\mu = \int f(x) \, d\mu \leq \liminf \int f_j(x) \, d\mu.$$

Zum Beweis von Fatous Lemma definieren wir eine monoton wachsende Folge $g_k : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch

$$g_k(x) = \inf\{f_j(x) : j \geq k\}.$$

Die g_k sind alle messbar; es gilt

(1) $$g_k(x) \leq f_k(x) \text{ und}$$

(2) $$g_k(x) \to f(x) \text{ für } k \to \infty.$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz in Verbindung mit (2) zeigt, dass

(3) $$\int g_k \, d\mu \to \int f \, d\mu(x).$$

Andererseits ist wegen (1) $\int g_k \, d\mu \leq \int f_k \, d\mu$, also $\liminf \int f_j d\mu \geq \liminf \int g_j d\mu = \int f \, d\mu$.]

Beweis 2.21. Indem wir f und g auf einer Nullmenge ändern, können wir annehmen, dass die Grenzwerteigenschaft und die Abschätzung überall gelten.

Weil $|f| \leq g$ und $g \in L^1(X)$ ist auch $f \in L^1(X)$ nach 2.18(b). Weiterhin ist $f_k + g \geq 0$ und Fatous Lemma zeigt, dass

$$\int (f+g)\, d\mu \leq \liminf \int (f_k + g)\, d\mu.$$

Es folgt wegen der Additivität, dass

$$\int f\, d\mu \leq \liminf \int f_k\, d\mu.$$

Analog folgt wegen $g - f_k \geq 0$ auch

$$\begin{aligned} \int (-f)\, d\mu &\leq \liminf \int (-f_k)\, d\mu \text{ bzw.} \\ \int f\, d\mu &\geq \limsup \int f_k\, d\mu. \end{aligned}$$

Weil $\liminf \leq \limsup$ ist, liefert dies die Existenz des Grenzwerts für $\int f_k\, d\mu$ und damit die Behauptung. $\lhd$

Parameterabhängige Integrale.

2.22. Satz (Stetigkeit parameterabhängiger Integrale). Es sei T ein metrischer Raum (z. B. $T \subseteq \mathbb{R}^k$), $t_0 \in T$ und $f : T \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

(i) Für jedes feste $t \in T$ ist $f(t, \cdot)$ messbar.

(ii) $\exists g \in L^1(X) : |f(t,x)| \leq g(x)$ fast überall.

(iii) $\lim_{t \to t_0} f(t,x) = f(t_0, x)$ für fast alle x.

Dann ist die Abbildung

$$t \mapsto \int f(t,x)\, d\mu(x) \tag{1}$$

stetig in t_0.

Beweis. Wegen Bedingung (ii) ist f für jedes t nach x integrierbar, somit die rechte Seite in Gleichung (1) definiert.

Seien $t_k \in T$ mit $t_k \to t_0$. Definiere $f_k(x) := f(t_k, x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f_k(x)| &\leq g(x) \qquad \text{fast überall} \\ f_k(x) &\to f(t_0, x) \qquad \text{fast überall} \end{aligned}$$

Mit dominierter Konvergenz: $\int f(t_k, x)\, d\mu = \int f_k(x)\, d\mu \to \int f(t_0, x)\, d\mu$. $\lhd$

2.23. Satz (Differenzieren unter dem Integral). Es sei T offene Menge in $\mathbb{R}^k$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, und $f : T \times X \to \mathbb{R}$ habe folgende Eigenschaften

(i) Für jedes $t \in T$ ist $f(t, \cdot)$ integrierbar

(ii) Für jedes $x \in X$ ist $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)$ stetig auf T (insbesondere existiere die Ableitung).

(iii) Es gibt ein $h \in L^1(X)$ mit $|\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)| \leq h(x)$ für alle t und x.

Dann gilt

(a) Für jedes t ist $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x) : X \to \mathbb{R}$ messbar.

(b) $\int f(t,x)\,d\mu(x)$ existiert für alle t und ist auf T partiell nach t_j differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\int f(t,x)\,d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\,d\mu(x).$$

Beweis. (a) Die partielle Ableitung ist als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar: Für jedes x ist

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+he_j,x)-f(t,x)}{h},$$

und die Funktionen auf der rechten Seite (parametrisiert durch h) sind messbar.

(b) Es sei o.B.d.A. $k=1$ und $F(t)=\int f(t,x)\,d\mu(x)$. Dann ist

$$(1)\qquad \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \int \frac{f(t,x)-f(t_0,x)}{t-t_0}\,d\mu(x) = \int\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0+s(t-t_0),x)\,ds\,d\mu(x).$$

Nun ist für festes x und jede Folge $t_k\to t_0$ mit dem Satz von der dominierten Konvergenz (angewendet auf die Folge $g_k(s)=\frac{\partial f}{\partial t}(t_0+s(t_k-t_0),x)\to\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)$; (ii) liefert Dominante, da stetige Funktionen auf $[0,1]$ beschränkt sind)

$$(2)\qquad \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0+s(t_k-t_0),x)\,ds = \int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,ds = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x).$$

Es folgt, wiederum mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, diesmal angewendet auf die Folge

$$h_k(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(t_0+s(t_k-t_0),x)\,ds \overset{(2)}{\to} \int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,ds = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)$$

(mit (iii) für Dominieren):

$$F'(t_0)\overset{(1)}{=}\lim_{k\to\infty}\int h_k(x)\,d\mu \overset{\text{dom Konv}}{=} \int\lim_{k\to\infty}\int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(t_0+s(t_k-t_0),x)\,ds\,d\mu(x) \overset{(2)}{=} \int\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\,d\mu(x).$$

◁

2.24. Satz: Vergleich mit dem Riemann-Integral.

(a) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar (also insbesondere beschränkt), so ist $f\in L^1([a,b])$ und

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dm = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Linke Seite im Sinne von Lebesgue, rechte Seite im Sinn von Riemann.)

Man schreibt daher auch für Lebesgue-Integrale $\int_a^b$ statt $\int_{[a,b]}$.

(b) Ist f auf $[a,b]$ beschränkt, so ist f genau dann Riemann integrierbar, wenn f fast überall stetig ist (d.h. das Maß aller Punkte, in denen f unstetig ist, ist Null).

(c) Ist I ein Intervall in $\mathbb{R}$ (eventuell halbunendlich oder $=\mathbb{R}$) und f nichtnegativ und uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist $f\in L^1(I)$, und das Lebesgue-Integral stimmt mit dem uneigentlichen Riemann-Integral überein.

(Wichtig: $f\geq 0$!)

2.25. Warnung.

(a) Die Aussagen 'f ist fast überall stetig' und 'f ist fast überall gleich einer stetigen Funktion' sind nicht äquivalent: Betrachte $\chi_{\mathbb{Q}}$.

(b) Die Nichtnegativität von f in 2.24(c) ist wesentlich: Betrachte etwa $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^n/n$ auf $[n,n+1[$.

Integration komplexwertiger Funktionen.

2.26. Definition. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt messbar, falls ihr Realteil und ihr Imaginärteil messbare Funktionen sind. Sie heißt integrierbar (schreibe $f \in L^1(X)$), falls Real- und Imaginärteil integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int f\,d\mu = \int \mathrm{Re}\, f\,d\mu + i \int \mathrm{Im}\, f\,d\mu.$$

2.27. Lemma. *Sind $f_1, f_2 : X \to \mathbb{C}$ messbar, so auch $f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2, |f_1|$.*

Beweis. $\mathrm{Re}\,(f_1 + f_2) = \mathrm{Re}\, f_1 + \mathrm{Re}\, f_2$, $\mathrm{Im}\,(f_1 + f_2) = \mathrm{Im}\, f_1 + \mathrm{Im}\, f_2$.
$\mathrm{Re}\,(f_1 \cdot f_2) = (\mathrm{Re}\, f_1)(\mathrm{Re}\, f_2) - (\mathrm{Im}\, f_1)(\mathrm{Im}\, f_2)$, $\mathrm{Im}\,(f_1 f_2) = (\mathrm{Re}\, f_1)(\mathrm{Im}\, f_2) + (\mathrm{Im}\, f_1)(\mathrm{Re}\, f_2)$.
$|f_1| = \big((\mathrm{Re}\, f_1)^2 + (\mathrm{Im}\, f_1)^2\big)^{1/2}$. Alle diese Funktionen sind messbar nach 2.5. $\lhd$

2.28. Lemma. *Ist $f : X \to \mathbb{C}$ messbar, so gilt: f integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrierbar.*

Beweis. Dies folgt mit 2.18(b) aus den Ungleichungen

$$\mathrm{Re}\, f \le |f|,\ \ \mathrm{Im}\, f \le |f| \ \ \text{bzw.}\ \ |f| \le |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|.$$

$\lhd$

2.29. Bemerkung. Die Sätze der Integrationstheorie gelten auch für komplexwertige Funktionen. (d.h. 2.8(a),(d),(e),(f), 2.13, 2.15, 2.18, 2.21, 2.24). Die Beweise lassen sich alle direkt verallgemeinern; lediglich bei 2.18(a) muss man sich etwas überlegen: Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass $\int cf\,d\mu = c \cdot \int f\,d\mu$ reell und nichtnegativ ist. Schreibe $cf = u + iv$ Dann ist $u \le |f|$, und es gilt:

$$|\int f\,d\mu| = \int cf\,d\mu = \int u\,d\mu \le \int |f|\,d\mu;$$

dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen, weil das Integral reell ist.

2.30. Beispiel. Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion f ist definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Behauptung. $\hat{f}$ ist stetig.
Beweis Für $\xi_k \to \xi$ in $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\hat{f}(\xi_k) = \int e^{-ix\xi_k} f(x)\,dx.$$

Um zu zeigen, dass $\hat{f}(\xi_k) \to \hat{f}(\xi)$ wenden wir den Satz von der dominierten Konvergenz an: Weil $|e^{-ix\xi_k}| = 1$ ist, ist $e^{-ix\xi_k} f(x)$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

(i) $\quad e^{-ix\xi_k} f(x) \to e^{-ix\xi} f(x)$ für jedes x, und
(ii) $\quad |e^{-ix\xi_k} f(x)| = |f(x)|$ für alle k.

Damit folgt

$$\lim \hat{f}(\xi_k) = \lim \int e^{-ix\xi_k} f(x)\,dx \overset{\text{dom Kvgz}}{=} \int e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \hat{f}(\xi).$$