16. Die Wärmeleitungsgleichung

16.1. Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta_x u = 0$. Diese Gleichung beschreibt Diffusionsprozesse, bzw. die zeitliche Entwicklung der Dichte u einer Größe wie Wärme, chemische Konzentration etc. in einem Gebiet U. Ist $V \subset U$ eine hinreichend glatt berandete Teilmenge, so ist die Veränderungsrate der Größe in V gegeben durch den Netto-Fluss durch den Rand von V:

$$\partial_t \int_V u dx = -\int_{\partial V} \langle F, \nu \rangle dS,$$

wobei F die Flussdichte ist. Nach dem Satz von Gauß erhalten wir, da V beliebig war,

$$u_t = -\operatorname{div} F.$$

Die Physik besagt, dass in vielen Fällen $F = -a\nabla u$ für eine Konstante $a > 0$ gilt, so dass

$$\partial_t u = \operatorname{div} a\nabla u = a\Delta u.$$

Für $a = 1$ erhalten wir die obige Gleichung.

16.2. Das Cauchy-Problem auf $\mathbb{R}^n$. Zu einer gegebenen Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ suchen wir die Lösung u der Aufgabe

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty); \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x). \tag{2}$$

Man spricht von einem Cauchy-Problem: Man gibt eine Gleichung im Gebiet und einen 'Anfangswert' bei $t = 0$ vor.

Exkurs: Fouriertransformation und schnellfallende Funktionen.

16.3. Erinnerung: Faltung. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Faltung $f * g$ von f und g durch

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x - y)\, dy = \int f(x - y)g(y)\, dy.$$

Es gilt:

(a) $f * g \in L^1$, und $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

(b) $f * g = g * f$.

(c) Ist $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

(d) Ist $\operatorname{supp} f \subseteq V$ und $\operatorname{supp} g \subseteq W$, so ist $\operatorname{supp} f * g \subseteq \{x + y : x \in V, y \in W\}$.

(e) Verallgemeinerung von (a): Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$, $1 \le p \le \infty$ (Youngsche Ungleichung).

Beweis. (a) Fubini, (b) klar, (c): Differenzieren unter dem Integral (d) klar, (e) weglassen. $\triangleleft$

16.4. Fouriertransformation. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ bzw. $\hat{f}$ als Funktion auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx, \quad \xi \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

Abkürzung: $đx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, dx$.

16.5. Wichtige Regeln. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Für $g(x) = f(x + a), h(x) = e^{ixa} f(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\hat{g}(\xi) = e^{ia\xi} \hat{f}(\xi), \hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi - a).$$

(b) Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Transformation, so ist nach dem Transformationssatz

$$\int e^{-ix\xi} f(Tx)\, dx = \int e^{-i(T^{-1})u\xi} f(u) |\det T^{-1}|\, du,$$

und somit

$$(f \circ T)^\wedge(\xi) = |\det T|^{-1} \hat{f}\left((T^{-1})^*\xi\right)$$

Insbesondere:

- Ist $g(x) = f(\lambda x), 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\hat{g}(\xi) = |\lambda|^{-n}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$
- Ist T orthogonal (d.h. $T^* = T^{-1}$), so ist $(f \circ T)^\wedge = \hat{f} \circ T$

(c) Es gilt $|(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$ für alle ξ, sogar stärker (Satz von Riemann-Lebesgue) $(\mathcal{F}f)(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

(d) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{g}$:

$$\int e^{-ix\xi} \int f(x-y)g(y)\, dy dx = \int\int e^{-i(x-y)\xi} f(x-y) e^{-iy\xi} g(y)\, dy dx$$

16.6. Lemma. *Setze* $\psi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{2}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist*

$$\widehat{\psi}(x) = \psi(x).$$

Beweis. Wegen

$$\int e^{-ix\xi}\psi(x)\, dx = \Pi_{j=1}^n \int e^{-ix_j\xi_j}\psi(x_j)\, dx_j$$

genügt es, die Aussage für $n = 1$ zu zeigen.

In diesem Fall erfüllt ψ die gewöhnliche Differentialgleichung $\psi'(x) = -x\psi(x)$.

Für die Fouriertransformierte gilt dies ebenfalls, denn

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\widehat{\psi}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int \partial_\xi(e^{-ix\xi})\psi(x)\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int (-ix)e^{-ix\xi}\psi(x)\, dx \\ &\overset{\text{Dgl}}{=} (2\pi)^{-1/2} \int ie^{-ix\xi}\psi'(x)\, dx = -\xi\widehat{\psi}(\xi).\end{aligned}$$

Ferner gilt $\psi(0) = (2\pi)^{-1/2}$ und ebenso (über Polarkoordinaten im zweidimensionalen Fall)

$$\widehat{\psi}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-i0} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = (2\pi)^{-1/2}.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf stimmen die beiden Funktionen überein. ◁

16.7. Der Schwartz-Raum. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Vektorraum aller $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, für die gilt:

(1) $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\, \exists C_{\alpha\beta}\, \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^\alpha D_x^\beta f(x)| \leq C_{\alpha\beta};$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt auch der Raum der *schnell fallenden Funktionen*, da aus (1) folgt (und dazu äquivalent ist), dass

(2) $$\forall \beta \in \mathbb{N}_0^n\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists C_{\beta N} \geq 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n : |D_x^\beta f(x)| \leq C_{\beta N}(1 + |x|)^{-N}.$$

Eigenschaften:

(a) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow x^\alpha D^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

(b) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(c) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p \leq \infty$.

(d) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein vollständiger metrischer Raum. Die Metrik wird durch die abzählbare Folge von Halbnormen (= beste Konstanten) aus (1) oder (2) definiert.

(e) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|x^\alpha D_x^\beta (f_n - f)\|_\infty = 0 \qquad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Beweis.

(a) Leibniz-Regel

(b) Leibniz-Regel

(c) Genau dann ist $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-L}\,dx < \infty$, wenn $L > n$. Zu $1 \le p < \infty$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $pN > n$. Nach (2) gibt es ein $C \ge 0$, so dass $|f(x)| \le C(1+|x|)^{-N}$. Also ist

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx \le C^p \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-Np}\,dx < \infty.$$

(d) Funktionalanalysis. Zu einem Punkte trennenden System von abzählbar vielen Halbnormen $\|\cdot\|_j$ definiert man eine Metrik d durch

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} \frac{\|f-g\|_j}{1+\|f-g\|_j}.$$

(e) Eine Folge konvergiert in der obigen Metrik, falls sie in jeder Halbnorm konvergiert. ◁

16.8. Lemma. *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ gilt*

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \qquad\qquad (x^\beta f)^\wedge(\xi) = (-1)^{|\beta|} D^\beta \hat{f}(\xi)$$

Insbesondere folgt, dass die Fouriertransformation $\mathcal{S}$ stetig auf $\mathcal{S}$ abbildet.

Beweis. Direkte Rechnung zeigt die beiden Identitäten.
Es folgt, dass $\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = (-1)^{|\beta|}(D_x^\alpha(x^\beta f))^\wedge(\xi)$. Nach 16.7(a), (c) ist $D_x^\alpha(x^\beta f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also die rechte Seite beschränkt nach 16.5(c). Die Stetigkeit folgt mit 16.7(d). ◁

16.9. Satz. *Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx$$

Beweis. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\int \left\{ \int e^{-iyx} f(y)\,dy \right\} g(x)\,dx = \iint f(y) e^{-iyx} g(x)\,dxdy = \int f(y) \left\{ \int e^{-ixy} g(x)\,dx \right\}\,dy.$$

◁

16.10. Inversionsformel. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $\mathcal{F}^4 = \mathrm{Id}$. Also ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektiv und $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$, also

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\,đ\xi.$$

16.11. Folgerung. *Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\int \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\,dx = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Insbesondere $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Beweis. Setze $h = \bar{\hat{g}}$. Dann ist

$$h(y) = \overline{\int e^{-ixy} g(x)\, đx} = \int e^{ixy} \overline{g(x)}\, đx = \hat{\bar{g}}(-y).$$

Folglich ist $\hat{h} = (\hat{\bar{g}}(-\cdot))^\wedge \overset{16.10}{=} \bar{g}$, und die Behauptung folgt aus 16.9. ◁

16.12. Satz von Plancherel. Die Fourier-Transformation lässt sich zu einem Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Es gilt

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere ist $\mathcal{F}$ eine Isometrie, d.h. $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ wähle $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $f_k \longrightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nach 16.11 ist $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$, also konvergent, da $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig. Setze $\hat{f} := \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$. ◁

Zurück zur Wärmeleitungsgleichung.

16.13. Lösung für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir wenden die Fouriertransformation in $\mathbb{R}^n$ an: Weil $\widehat{(\partial_{x_j} u)} = i\xi_j \widehat{u}(\xi)$ ist und $\Delta = \sum \partial^2_{x_j}$, folgt aus 16.2(1,2):

$$\partial_t \widehat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t) = 0 \qquad \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi).$$

Dies ist eine Anfangswertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung; die Lösung ist

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}.$$

Es folgt wegen $(f * g)^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\widehat{g}$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f(x) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) \\ &= f * K_t. \end{aligned}$$

wobei $K_t(x) = K(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Dabei erhält man die letzte Identität durch Zurückführen auf Lemma 16.6:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^2 t}\right) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} e^{-|\xi|^2 t}\, d\xi \\ &= (4\pi^2)^{-n} \prod_{j=1}^n \int e^{ix_j\xi_j} e^{-|\xi_j|^2 t}\, d\xi_j \\ &\overset{\eta_j/\sqrt{2t}=\xi_j}{=} (4\pi^2)^{-n} (2t)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \int e^{ix_j\eta_j/\sqrt{2t}} e^{-\eta_j^2/2}\, d\eta_j \\ &\overset{16.6}{=} (4\pi t)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \mathcal{F}^{-1}(e^{-\eta_j^2/2})(x_j/\sqrt{2t}) \\ &= (4\pi t)^{-n/2} \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/(4t)} = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

16.14. Der Wärmeleitungskern. Die durch

$$K_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

definierte Funktion $K = K(t,x) = K_t(x)$ heißt *Gauß-Kern* oder *Wärmeleitungskern.* Es gilt:

(a) $K_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} K_1(t^{-\frac{1}{2}} x)$.

(b) $\int K_t(x)\,dx = 1$ für alle $t > 0$.

(c) $(\partial_t - \Delta_x) K(t,x) = 0$ für alle $t > 0$.

Beweis.

(a) folgt sofort aus der Definition.

(b) Folgt aus der Tatsache, dass $\int_{\mathbb{R}} \exp(-|s|^2)\,ds = \sqrt{\pi}$.

(c) Gilt nach Konstruktion. $\triangleleft$

Eine interessante Frage ist, in welchem Sinn die Lösung u für $t \to 0^+$ den Randwert f annimmt. Der folgende Satz zeigt verschiedene Möglichkeiten.

16.15. Satz. *Es sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$. Dann löst die Funktion*

$$u(x,t) = (K_t * f)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int \exp(-|x-y|^2/4t) f(y)\,dy$$

die Gleichung $\partial_t u - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

(a) *Ist f stetig und beschränkt, so ist u stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ durch $u(x,0) = f$.*

(b) *Ist $f \in L^p$ für ein $p < \infty$, so konvergiert die Funktion*

$$u_t(x) = u(x,t)$$

gegen f für $t \longrightarrow 0^+$ in L^p.

(c) *Ist f stetig und $f(x) \le C \exp(|x|^2/4T)$, so existiert die Faltung $f * K_t$ ebenfalls für $0 < t < T$ und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung. Für $t \to 0$ gilt*

$$f * K_t \to f$$

auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (a), (b) Da $K_t \in L^1$ ist, ist $f * K_t \in L^p$ nach Young. Ferner ist

$$(\partial_t - \Delta)(f * K_t) = f * ((\partial_t - \Delta) K_t) = 0 \tag{1}$$

nach Konstruktion (oder wie direktes Nachrechnen zeigt).

Nach 16.14(a) und dem Transformationssatz ist

$$\begin{aligned} u(t,x) = (f * K_t)(x) &= \int f(y)\, t^{-n/2} K_1\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) dy \\ &= \int f(x - \sqrt{t} z) K_1(z)\,dz \qquad (2) \end{aligned}$$

Insbesondere ist also wegen 16.14(b)

$$(f * K_t)(x) - f(x) = \int \Big(f(x - \sqrt{t} z) - f(x) \Big) K_1(z)\,dz. \tag{3}$$

(a) Ist f stetig und beschränkt, so folgt wegen $\int K_1\,dz = 1$ und $K_1 > 0$ für jedes x:

$$|u(t,x) - f(x)| \le \sup\{|f(x + \sqrt{t} z) - f(x)|\},$$

und die rechte Seite geht gegen Null, falls $t \to 0$ und x über eine kompakte Menge variiert (gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen auf kompakten Mengen). Damit ist f eine stetige Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$.

(b) Für $f \in L_p$ gilt

$$\begin{aligned}\|u(t,x) - f(x)\|_{L^p} &= \left\| \int (f(x - \sqrt{t}z) - f(x)) K_1(z)\, dz \right\|_{L^p} \\ &\overset{Minkowski}{\leq} \int \|f(\cdot - \sqrt{t}z) - f(\cdot)\|_{L^p} K_1(z)\, dz.\end{aligned}$$

Da $\|f(\cdot - \sqrt{t}z) - f(\cdot)\|_{L^p} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow 0$ (Stetigkeit im p-ten Mittel, $p < \infty$) und durch $2\|f\|_{L^p}$ abschätzbar ist, liefert der Satz von der dominierten Konvergenz, dass die rechte Seite für $t \to 0$ gegen 0 konvergiert.

(c) Für $0 < t < T$ ist der Integrand im Faltungsintegral eine L^1-Funktion, daher existiert das Integral. Wir können unter dem Integral differenzieren und sehen, dass $f * K_t$ die Wärmeleitungsgleichung löst. Ferner folgt wie in (3), dass $(f * K_t) - f \to 0$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ für $t \to 0^+$ auf Grund der Wachstumsbedingung an f. ◁

16.16. Lemma. *Unter obigen Annahmen ist die Lösung $u = u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung $\mathcal{C}^\infty$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Da $K_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ ist, überträgt sich dies bei Faltung auf u. ◁

Eindeutigkeit.

16.17. Satz. *Es sei u stetig auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und $\mathcal{C}^2$ auf $\mathbb{R} \times (0,\infty)$.*
Ferner gelte

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 &\quad& \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq Ce^{\varepsilon|x|^2} \\ |\nabla_x u(x,t)| &\leq Ce^{\varepsilon|x|^2} \end{aligned}$$

so ist $u \equiv 0$.

Beweis. Sind f, g $\mathcal{C}^2$-Funktion auf einem Gebiet in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, so gilt

$$g(\partial_t f - \Delta f) + f(\partial_t g + \Delta g) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(f\partial_{x_j} g - g\partial_{x_j} f) + \partial_t(fg) = \operatorname{div} F,$$

wobei $F = (f\partial_{x_1} g - g\partial_{x_1} f, \ldots, f\partial_{x_n} g - g\partial_{x_n} f, fg)$.
Wir fixieren $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 > 0$. Wähle

$$f(x,t) = u(x,t); \quad g(x,t) := K(x - x_0, t_0 - t) := K_{t_0 - t}(x - x_0)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t f - \Delta f &= 0 &\quad& \text{auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_t g + \Delta g &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, t_0) \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Satz von Gauß an auf das Gebiet

$$\Omega = \{(x,t) : |x| < r, a < t < b\}, \quad 0 < a < b < t_0$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \mathrm{div} F = \int_{\partial\Omega} \langle F, d\nu\rangle \\
&= \int_{|x|\le r} u(x,b) K(x-x_0, t_0-b)\,dx \quad \text{(denn hier sieht der Normalenvektor nur \dots} \\
&- \int_{|x|\le r} u(x,a) K(x-x_0, t_0-a)\,dx \quad \text{\dots die } n-\text{Richtung, einmal } +\text{, einmal } -) \\
&+ \sum_{j=1}^n \int_a^b \int_{|x|=r} (u(x,t)\partial_{x_j} K(x-x_0,t_0-t) - \partial_{x_j} u(x,t) K(x-x_0,t_0-t)) \frac{x_j}{r}\, d\sigma(x) dt
\end{aligned}$$

Nun lassen wir $r \longrightarrow \infty$ gehen. Auf Grund unserer Annahmen an u geht das letzte Integral gegen Null. Da zudem K eine gerade Funktion von x ist, sind die ersten beiden Integrale Faltungen. Wir haben

$$0 = (u(\cdot,b) * K_{t_0-b})(x_0) - (u(\cdot,a) * K_{t_0-a})(x_0)$$

Nun gilt für $b \longrightarrow t_0$ dass $u(\cdot,b) \longrightarrow u(\cdot,t_0)$ nach 16.15(c). Also

$$(u(\cdot,b) * K_{t_0-b})(x_0) \xrightarrow{b\to t_0} u(x_0,t_0).$$

Ebenso

$$(u(\cdot,a) * K_{t_0-a})(x_0) \xrightarrow{a\to 0} (\underbrace{u(\cdot,0)}_{0} * K_{t_0})(x_0) = 0.$$

Somit erhalten wir $u(x_0,t_0) = 0$. ◁

16.18. Bemerkung. Ohne Wachstumsbedingung an u erhält man im Allgemeinen keine Eindeutigkeit der Lösung.

Die inhomogene Gleichung. Das Duhamel-Prinzip.

16.19. Das Cauchyproblem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung. Löse

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & \partial_t u - \Delta u &= w(x,t) \\
&(2) \qquad & u(x,0) &= f(x).
\end{aligned}$$

Wir wissen bereits, wie man diese Aufgabe für $w = 0$ löst, etwa durch u_1. Es langt also, die Aufgabe für $f = 0$ zu lösen, etwa durch u_2.
Dann ist $u = u_1 + u_2$ eine Lösung des Problems.

Dazu

16.20. Satz. *Es sei $w \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty[)$ beschränkt. Für $s \ge 0$ sei $v = v(x,t,s)$ die Lösung von*

$$\partial_t v - \Delta v = 0, \quad v(x,0,s) = w(x,s),$$

d.h. $v(x,t,s) = (w(\cdot,s) * K_t)(x)$. Dann löst

$$u_2(x,t) = \int_0^t v(x,t-s,s)\,ds$$

die Aufgabe 16.19(1),(2) mit $f = 0$.

Beweis. Klar: $u_2(x,0) = 0$. Ferner ist für $t > 0$

$$\begin{aligned}
(\partial_t u_2)(x,t) &= v(x,0,t) + \int_0^t \partial_t v(x,t-s,s)\,ds \\
&\overset{\text{Ann.}}{=} w(x,t) + \int_0^t \Delta_x v(x,t-s,s)\,ds \\
&\overset{\text{Def.}}{=} w(x,t) + \Delta_x u_2(x,t).
\end{aligned}$$

$\triangleleft$