15. Der Laplace-Operator

Quelle: Folland, Introduction to Partial Differential Equations

Laplace-Gleichung und harmonische Funktionen. Der Laplace-Ooperator $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ tritt in vielen wichtigen Gleichungen auf. Die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ beschreibt Systeme im Gleichgewicht. Dabei spielt u die Rolle einer Dichte (z.B. chemische Konzentration, Temperatur, elektrostatisches Potential, etc) Die Kontinuitätsgleichung besagt dass $\partial_t u - \operatorname{div} j = 0$, wobei j die Flussdichte von u ist. Im Gleichgewicht ist $\partial_t u = 0$ also $\operatorname{div} j = 0$. Nach anderen physikalischen Gesetzen (Ficksches Gesetz, Newtonsches Abkühlungsgesetz, Ohmsches Gestz) ist $j = -c\nabla u$. Es folgt $0 = \operatorname{div} \nabla u = \Delta u$.

15.1. Definition. Eine Funktion $u : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt harmonisch, falls $\Delta u = 0$.

15.2. Beispiele.

(a) Ist u harmonisch, so auch $\operatorname{Re} u$ und $\operatorname{Im} u$.

(b) Im Fall $n = 2$ können wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen: Ist u auf dem Gebiet U holomorph, so ist u auch harmonisch. Ferner sind $\operatorname{Re} u$, $\operatorname{Im} u$ und $\ln |u|$ harmonisch.

In diesem Fall ist sogar auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jede reellwertige harmonische Funktion Realteil einer holomorphen Funktion.[1]

(c) Für $n \geq 3$ können wir eine Funktion von zwei Variablen auch als Funktion von n Variablen auffassen (konstant in den restlichen Variablen) und erhalten so Beispiele für harmonische Funktionen: $\exp(x_1 + ix_3)$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^3$, weil e^z auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.

15.3. Die Greenschen Formeln. U sei beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$. Ferner sei ν der Einheitsnormalenvektor nach außen auf ∂U; dS sei das Oberflächenmaß. Dann gilt

$$\int_{\partial U} v\partial_\nu u \, dS = \int_U v\Delta u + \nabla v \nabla u \, dx \tag{1}$$

$$\int_{\partial U} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) \, dS = \int_U v\Delta u - u\Delta v \, dx \tag{2}$$

Beweis. (1) Wende Gauß-Stokes an auf das Vektorfeld $v\nabla u$. Beachte

$$\langle v\nabla u, \nu\rangle = v\partial_\nu u, \quad \operatorname{div} v\nabla u = \langle \nabla v, \nabla u\rangle + v\Delta u.$$

(2) folgt aus (1). Rollen von u und v vertauschen, subtrahieren.

15.4. Satz. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(U)$.*

(a) *Ist u harmonisch in U, so hat u die Mittelwerteigenschaft (MWE), d.h. für jede Kugel $B(x, r)$, die ganz in U liegt, gilt*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\operatorname{vol} S(x,r)} \int_{S(x,r)} u(y) \, dS(y) = \frac{1}{\operatorname{vol} S(0,1)} \int_{S(0,1)} u(x+ry) dS(y) \\ &= \frac{1}{\operatorname{vol} B(x,r)} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy. \end{aligned}$$

[1] Es sei u harmonisch in Ω. Gesucht ist $v : \Omega \to \mathbb{C}$, so dass $u + iv$ holomorph ist. Letzteres ist der Fall (Cauchy-Riemannsche DGl), wenn v total differenzierbar ist und $v_y = u_x; v_x = -u_y$ gilt. Also sucht man ein Potential v zu dem Vektorfeld $F = (-u_y, u_x)$. Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet existiert ein solches v (Analysis II), wenn F die Integrationsbedingung erfüllt, d.h. $\partial F_1/\partial_y = \partial F_2/\partial x$ bzw. $-u_{yy} = u_{xx}$. Dies ist hier der Fall, weil u harmonisch ist.

(b) *Hat umgekehrt u die MWE, so ist u harmonisch.*

Bemerkung. *Man kann zeigen, dass jede harmonische Funktion automatisch C^∞ ist. In (b) langt Stetigkeit.*

Wir benutzen im Folgenden die Schreibweise $⨍$ für das gemittelte Integral, also z.B.

$$\frac{1}{\operatorname{vol} S(x,r)} \int_{S(x,r)} = ⨍_{S(x,r)}.$$

Beweis. (a) Aus der Substitutionsregel folgt, dass die beiden ersten gemittelten Integrale gleich sind. Für hinreichend kleines $r > 0$ setze

$$\varphi(r) = ⨍_{S(x,r)} u(y)\, dS(y) = ⨍_{S(0,1)} u(x+ry) dS(y).$$

Dann ist

$$\varphi'(r) = ⨍_{S(0,1)} \nabla u(x+ry) \cdot y\, dS(y).$$

Nun ist y der Normaleneinheitsvektor auf $S(0,1)$, und das letzte Integral ist nach dem Satz von Gauß

$$= \frac{1}{\operatorname{vol} S(0,1)} \int_{B(0,1)} \operatorname{div}_y(\nabla u(x+ry))\, dy = \frac{r}{\operatorname{vol} S(0,1)} \int_{B(0,1)} (\Delta u)(x+ry)\, dy = 0.$$

Somit ist φ konstant, und die Behauptung folgt aus:

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = \lim_{r \to 0^+} ⨍_{S(0,1)} u(x+ry)\, dS(y) \overset{\text{dom Kvgz}}{=} ⨍_{S(0,1)} u(x)\, dS(y) = u(x).$$

Zum letzten Integral in (a): Es ist

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy &= \int_0^r \int_{S(x,\rho)} u\, dS\, d\rho \overset{\text{MWE}}{=} u(x) \int_0^r \operatorname{vol} S(x,\rho) d\rho \\ &= u(x) \operatorname{vol} S(0,1) \int_0^r \rho^{n-1}\, d\rho = u(x) \operatorname{vol} S(0,1) r^n/n = u(x) \operatorname{vol} B(x,r). \end{aligned}$$

(b) Ist $\Delta u \not\equiv 0$, so existiert eine Kugel $B(x,r)$ mit $\Delta u \neq 0$ auf $B(x,r)$; o.B.d.A. sei dort $\operatorname{Re} \Delta u > 0$. Dann ist mit obigen Bezeichnungen

$$0 = \operatorname{Re} \varphi'(r) = \frac{r}{\operatorname{vol} B(0,1)} \int_{B(0,1)} (\operatorname{Re} \Delta u)(x+ry)\, dy > 0.$$

Widerspruch! ◁

15.5. Satz. (Maximumprinzip) *U sei Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Ist u harmonisch und reellwertig auf U und $\sup_{x\in U} u(x) = A < \infty$, so ist entweder $u(x) < A$ für alle $x \in U$ oder $u(x) \equiv A$.*

Beweis. Die Menge $U_A = \{x \in U : u(x) = A\}$ ist (relativ) abgeschlossen in U. Ist $x_0 \in U_A$, so folgt aus der MWE, dass auf jeder Kugel $B(x_0, r)$, deren Abschluss in U liegt, $u(y) \equiv A$ ist (sonst wäre der Mittelwert $< A$). Also ist die Menge U_A auch offen in U. Damit ist entweder $U_A = U$ oder $U_A = \emptyset$, was den beiden Fällen in der Aussage entspricht. ◁

15.6. Bemerkung. Da auch $-u$ harmonisch ist, können wir Satz 15.5 auch darauf anwenden und sehen, dass auch entweder $u(x) > \inf u$ für alle $x \in U$ oder $u(x) \equiv \inf u$.

15.7. Folgerung. *Ist zusätzlich u stetig auf $\overline{U}$ und nimmt u sein Maximum auf $\overline{U}$ an (z.B. wenn $\overline{U}$ kompakt ist), so wird es am Rand erreicht.*

Beweis. Wird das Maximum an einem inneren Punkt angenommen, so ist nach 15.5 $u \equiv A$. Damit wird A auch am Rand erreicht. ◁

Die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$.

15.8. Radialsymmetrische Lösung. Unter der Annahme, dass es eine Lösung gibt, die nur von $\|x\|$ abhängt (d.h. es gibt ein u mit $\Delta u = 0$ und $u(x) = v(\|x\|)$ für eine auf $J \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion v), leitet man leicht her, dass v die gewöhnliche Dgl $v'' + \frac{n-1}{t}v' = 0$ erfüllt und somit für geeignete Konstanten b, c gilt

$$v(t) = b \ln t + c \quad (n = 2) \qquad \text{bzw.} \qquad v(t) = bt^{2-n} + c \quad (n \geq 3).$$

15.9. Definition. Die Funktion $N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\mathrm{vol} S(0,1)} \|x\|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases}$$

heißt Newton-Potential.

15.10. Lösung der Poisson-Gleichung. Es sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$[2]. Dann löst die Funktion

$$u(x) = N * f(x) = \int N(x-y) f(y)\, dy = \int N(y) f(x-y)\, dy$$

die Gleichung $\Delta u = f$.

Bemerkungen. Die Lösung ist nicht eindeutig.
Es langt, dass $f \in L^1$ und, falls $n = 2$, zusätzlich $f \log \|x\| \in L^1$. Dann wird der Beweis komplizierter. Man sieht aber, dass man so die Poissongleichung auf beliebigen offenen Mengen lösen kann, indem man f durch Null fortsetzt.

Beweis. Differenzieren unter dem Integral zeigt:

$$\Delta u(x) = \int N(y) \Delta_x f(x-y)\, dy.$$

Wegen der Singularität von N in 0 spalten wir das Integral auf in das über $B(0,\varepsilon)$ und das über $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}(0,\varepsilon)$; wir nennen sie I_ε und J_ε. Dann gilt für $\varepsilon \to 0$:

$$|I_\varepsilon| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} N(y) |\Delta f(x-y)|\, dy \leq C \|\Delta f\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} N(y)\, dy \to 0, \text{ da } N \in L^1(B(0,1)).$$

Im Integral J_ε beachten wir, dass wir Δ_x durch Δ_y ersetzen können, und wenden dann die erste Greensche Formel an:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} N(y) \Delta_y f(x-y)\, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla N(y) \nabla f(x-y)\, dy + \int_{S(0,\varepsilon)} N(y) \partial_\nu f(x-y)\, dS(y) \end{aligned}$$

Analog wie oben konvergiert das Randintegral gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. Im ersten Integral wenden wir nochmal die Greensche Formel an, es ist dann:

$$= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta N(y) f(x-y)\, dy - \int_{S(0,\varepsilon)} \partial_\nu N(y) f(x-y)\, dS(y).$$

Da für $y \neq 0$ gilt $\Delta N(y) = 0$, ist das erste Integral Null. Das zweite rechnen wir aus: Es ist

$$\nabla N(y) = \frac{1}{\mathrm{vol}\, S(0,1)} \frac{y}{\|y\|^n}$$

[2] d.h. f ist C^2 und hat kompakten Träger.

und der Normaleneinheitsvektor ist $\nu = -y/\varepsilon$ (beachte '$-$'). Daher ist

$$\partial_\nu N(y) = \nu \cdot \nabla N(y) = -\frac{1}{\operatorname{vol} S(0,1)\varepsilon^{n-1}}.$$

Da $\operatorname{vol} S(0,1)\varepsilon^{n-1}$ gerade das Volumen von $S(0,\varepsilon)$ ist, hat das letzte Integral damit den Wert

$$-\frac{1}{\operatorname{vol} S(0,\varepsilon)} \int_{S(0,\varepsilon)} f(x-y)\, dS(y) \to -f(x).$$

Damit folgt die Behauptung. $\triangleleft$

Das Dirichletproblem.

15.11. Aufgabenstellung. Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Das Dirichletproblem ist die Aufgabe, zu gegebenen Funktionen f auf Ω und g auf $\partial\Omega$ eine Funktion u zu finden mit

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega; \quad u_{|\partial\Omega} = g. \tag{1}$$

Auf die Fragen, welche Eigenschaften das Gebiet Ω und sein Rand haben sollten, aus welchen Funktionenräumen f und g stammen sollen und inwiefern die Werte von u auf dem Rand mit denen im Inneren zusammenhängen, kann man verschiedene Antworten geben.

Der Einfachheit halber wollen wir hier annehmen, dass Ω beschränkt und der Rand von Ω von der Klasse C^2 ist, dass $f \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$.

15.12. Reduktion 1. Ω sei ein beschränktes Gebiet. Dann langt es, die semi-homogene Aufgabe

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega; \quad u_{|\partial\Omega} = g$$

für $g \in C(\partial\Omega)$ lösen zu können, um das Dirichlet-Problem unter den obigen Annahmen zu lösen.

Beweis. Nehmen wir an, wir können die obige Aufgabe lösen und suchen die Lösung zu

$$\Delta u = f, \ u_{|\partial\Omega} = g \tag{1}$$

für gegebene Funktionen $f \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Es sei $\tilde{f}$ eine Fortsetzung von f zu einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$ (wie man eine solche findet, sehen Sie im Beweis von 22.18 im Skript von Analysis 3). Für $\tilde{f}$ sind die Bedingungen aus der Bemerkung nach der Formulierung von Satz 15.10 erfüllt, denn f bzw. $x \mapsto f(x)\ln\|x\|$ (für $n=2$) sind integrierbar; letzteres folgt, weil in $\mathbb{R}^2$ mit Polarkoordinaten

$$\int_{B(0,1)} \ln\|x\|\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \ln(r)\, r\, dr d\phi < \infty.$$

Somit liefert $v = N * \tilde{f}$ eine Funktion mit $\Delta v = f$ in $\overline{\Omega}$. Außerdem ist v als Faltung der L^1-Funktion N mit der stetigen Funktion $\tilde{f}$ stetig. Die Einschränkung von v auf $\partial\Omega$ ist also ebenfalls stetig. Also können wir nach Annahme die Aufgabe

$$\Delta w = 0 \text{ in } \Omega, w_{|\partial\Omega} = g - v_{|\partial\Omega}$$

lösen und erhalten mit $u = w + v$ die Lösung der Aufgabe (1). $\triangleleft$

15.13. Reduktion 2. Ω sei ein beschränktes Gebiet. Kann man die semi-homogene Aufgabe

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega; \quad u_{|\partial\Omega} = 0$$

für $f \in C(\overline{\Omega})$ lösen, so kann man das obige Dirichlet-Problem für alle $f \in C(\overline{\Omega})$ und alle $g \in C(\partial\Omega)$ lösen, für die eine $C^2_c(\mathbb{R}^n)$-Funktion $\tilde{g}$ existiert mit $\tilde{g}_{|\partial\Omega} = g$.

Beweis. Es seien $f \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$ gegeben; wir suchen eine Funktion u mit $\Delta u = f$ und $u_{|\partial\Omega} = g$. Nach Voraussetzung finden wir eine Funktion $\tilde{g} \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{g}_{|\partial\Omega} = g$. Dann ist $\Delta\tilde{g} \in C(\overline{\Omega})$, und wir finden nach Annahme eine Funktion w mit $\Delta w = f - \Delta\tilde{g}$, $w_{|\partial\Omega} = 0$. Dann löst $w + \tilde{g}$ die Aufgabe. $\lhd$

15.14. Satz. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand. Dann existiert zu jeder stetigen Funktion g auf $\partial\Omega$ eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit*

$$\Delta u = 0 \textit{ in } \Omega, \quad u_{|\partial\Omega} = g.$$

Ein Beweis findet sich etwa in dem Buch von Gilbarg und Trudinger (Theorem 2.12).

Es gibt eine Vielzahl von Varianten dieses Satzes; insbesondere sind sog. schwache Lösungen in Sobolevräumen von großem Interesse. Mehr dazu in einer Vorlesung über partielle Differentialgleichungen. Die Lösung ist meist abstrakt. Konkrete Lösungsformeln erhält man für Kugeln und den Halbraum.

Das Dirichletproblem für die Einheitskugel.

15.15. Ausblick. Wir lösen das Dirichletproblem für die Einheitskugel

$$B = B(0,1) \text{ mit } \partial B = S(0,1) =: S$$

Die Resultate übertragen sich durch Schiebung und Streckung auf beliebige Kugeln in $\mathbb{R}^n$.

15.16. Satz. *Wieder bezeichne N das Newtonpotential. Wir definieren eine Funktion $G : \overline{B} \times B \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (die sogenannte Greensche Funktion für dieses Problem) wie folgt:*

Für $n = 2$:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\log\|x-y\| - \log\left\|\frac{x}{\|x\|} - \|x\|y\right\| & x \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi}\log\|y\| & x = 0 \end{cases}.$$

Für $n \geq 3$:

$$G(x,y) = N(x-y) - N\left(\frac{x}{\|x\|} - \|x\|y\right) \tag{1}$$

$$= \frac{1}{(2-n)\operatorname{vol} S}\left[\|x-y\|^{2-n} - \left\|\frac{x}{\|x\|} - \|x\|y\right\|^{2-n}\right] \tag{2}$$

$$= N(x-y) - \|x\|^{2-n} N\left(\frac{x}{\|x\|^2} - y\right), \textit{ falls } x \neq 0 \tag{3}$$

$$G(0,y) = \frac{1}{(2-n)\operatorname{vol} S}\left[\|y\|^{2-n} - 1\right] \tag{4}$$

Dann gilt für jede Funktion $f \in C(\overline{B})$

$$u(x) = \int_B G(x,y) f(y)\, dy \tag{5}$$

löst $\Delta u = f$ in $B, u_{|S} = 0$.

Beachte: Für jedes x ist $G(x,\cdot) \in C^\infty(B \setminus \{x\})$.

Eine Funktion $G = G(x,y)$, die wie in (5) das Dirichletproblem löst, nennt man eine Greensche Funktion.

Beweis. ($n \geq 3$) Zunächst zu den obigen Identitäten:

(3) zeigt, dass $G(x,\cdot) - N(x-\cdot)$ für $x \neq 0$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{x/|x|^2\}$ ist, insbesondere also harmonisch auf B und stetig auf $\overline{B}$. Für $x = 0$ sieht man aus (4), dass $G(0,y)$ harmonisch in B und stetig auf $\overline{B}$ ist.

Aus (2) folgt, dass (4) die stetige Fortsetzung von (3) nach $x = 0$ ist.

Nun sei $x \in B$ fest. Wir setzen f durch Null zu einer Funktion $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fort. Nach Satz 15.10 ist

$$v(x) = \int_B N(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y)\tilde{f}(y)$$

eine Funktion mit $\Delta v = \tilde{f}$. Da $G(x,\cdot) - N(x-\cdot)$ auf B harmonisch ist, gilt also für die oben definierte Funktion u, dass $\Delta u(x) = \Delta v(x) = f(x)$ auf B.

Für $\|x\| = 1$ ist $G(x,y) = 0$ und somit $u(x) = 0$. $\lhd$

15.17. Der Poissonkern. Für $x \in B$ und $y \in S$ setzen wir $P(x,y) = \partial_{\nu_y} G(x,y) = y\nabla_y G(x,y)$. Dann gilt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} P(x,y) \quad &= \quad -\frac{1}{\operatorname{vol} S}\left[\frac{\langle y,(x-y)\rangle}{\|x-y\|^n} - \frac{\|x\|\langle y, \left(\frac{x}{\|x\|} - \|x\|y\right)\rangle}{\left\|\frac{x}{\|x\|} - \|x\|y\right\|^n}\right] \\ &\overset{\|y\|=1}{=} \quad \frac{1-\|x\|^2}{\operatorname{vol} S\|x-y\|^n}. \end{aligned}$$

15.18. Satz. *Es sei $f \in L^1(S)$. Setze*

$$u(x) = \int_S P(x,y)f(y)\,d\sigma(y), \qquad x \in B.$$

(Poissonsche Integralformel)

Dann ist u harmonisch auf B. Ist f stetig, so hat u eine stetige Fortsetzung auf $\overline{B}$ mit $u|_S = f$. Ist $f \in L^p(S), p \in [1,\infty)$, so gilt $u_r \longrightarrow f$ in $L^p(S)$ für $r \longrightarrow 1$. Dabei ist

$$u_r(x) = u(rx), \quad x \in S.$$

Beweis. Für jedes $x \in B$ ist $P(x,y)$ beschränkt auf S, daher existiert das Integral. Ferner ist P harmonisch in x (da G harmonisch ist), also auch u. Nun zwei Beobachtungen

(1) $\int_S P(x,y)\,d\sigma(y) = 1, \qquad x \in B;$

(2) Für jedes $y_0 \in S$ und jede Umgebung V von y_0 in S gilt

$$\lim_{r\to 1}\int_{S\setminus V} P(ry_0,y)\,d\sigma(y) = 0.$$

(2) sieht man leicht: $\|ry_0 - y\|^{-n}$ ist gleichmäßig beschränkt für $r_0 < r < 1$, r_0 hinreichend groß, und $y \in S \setminus V$, ferner gilt $1 - \|ry_0\|^2 = 1 - r^2 \longrightarrow 0$

(1) Weil P harmonisch ist in x folgt aus der MWE für beliebiges $y \in S$:

$$1 \overset{15.17}{=} \operatorname{vol} S\ P(0,y) = \int_S P(ry',y)\,d\sigma(y').$$

Nun ist $P(ry',y) = P(ry,y')$ (weil $\|ry'-y\| = \|ry-y'\|$ für $y,y' \in S$), und es folgt (1) für $x = ry$.

Ist f stetig, so auch gleichmäßig stetig, da S kompakt ist. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ falls $|x-y| < \delta$. Setze $V_x = \{y \in S : |x-y| < \delta\}$. Dann gilt für $x \in S$ und $r < 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - u(rx)| &\overset{(1)}{=} \left| \int_S (f(x) - f(y)) P(rx, y)\, d\sigma(y) \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{V_x} P(rx, y)\, d\sigma(y) + 2\|f\|_{\sup} \int_{S \setminus V_x} P(rx, y)\, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Nach (1) ist der erste Summand rechts $< \varepsilon$, der zweite geht gegen Null wegen (2), falls $r \longrightarrow 1$. Es folgt, dass

$$\|u_r - f\|_{\sup} \longrightarrow 0 \text{ für } r \longrightarrow 1.$$

Dies wiederum erzwingt die Stetigkeit von u auf $\overline{B}$ und $u|_S = f$.

Ist $f \in L^p(S)$, so wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{C}(S)$ mit $\|g - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Setze

$$v(x) = \int P(x, y) g(y)\, d\sigma(y).$$

Dann gilt

$$\|f - u_r\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - v_r\|_p + \|v_r - u_r\|_p.$$

Der erste Term ist $\leq \frac{\varepsilon}{3}$. Für r nahe an 1 ist auch der zweite $\leq \frac{\varepsilon}{3}$, s.o. Der dritte Term ist von der Form $\|T(f-g)\|_p$, wobei der lineare Operator

$$T : L_p(s) \longrightarrow L_p(S)$$

definiert ist durch

$$Tu(x) = \int P(rx, y) u(y)\, dy$$

Man kann relativ leicht zeigen, dass $\|T\| \leq 1$ ist (Lemma von Schur). Dies liefert die Behauptung. $\triangleleft$

Das Dirichletproblem im Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

15.19. Notation. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &= \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\} \\ \Delta &= \Delta_x + \partial_t^2 \end{aligned}$$

Analog zu dem Obigen kann man damit das Dirchletproblem im Halbraum lösen:

15.20. Satz. *Setzt man*

$$G(x, t; y, s) = N(x - y, t - s) - N(x - y, -t - s)$$

und

$$P_t(x) = \frac{1}{\operatorname{vol} \mathbb{S}^{n+1}} \frac{2t}{(\|x\|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}$$

so erhält man die Lösungen der beiden semi-homogenen Aufgaben des Dirichlet-Problems:

(a) *Für $f \in C_c(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ (gilt allgemeiner) löst*

$$u(x, t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} G((x, t), (y, s)) f(y, s)\, dy\, ds$$

die Aufgabe $\Delta u = f$, $u_{\partial \mathbb{R}^{n+1}_+} = 0$.

(b) *Für beschränktes* $g \in C(\partial\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *löst*

$$u(x,t) = \int P_t(x-y)g(y)\,dy$$

die Aufgabe $\Delta u = 0$, $u_{|\partial\mathbb{R}^{n+1}_+} = g$.