14. Einfach zusammenhängende Gebiete. Riemannscher Abbildungssatz

14.1. Definition. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, Γ, Γ_1 Zyklen in $\mathbb{C}$. Bekanntlich heißt Γ_1 homolog zu Γ, falls

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) \quad \forall\, z \notin \Omega.$$

Wir nennen Γ nullhomolog in Ω, falls

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = 0 \quad \forall\, z \notin \Omega.$$

Wir schreiben: $\Gamma_1 \sim \Gamma$ in Ω bzw. $\Gamma \sim 0$ in Ω.

14.2. Definition. Eine geschlossene Kurve γ in der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt nullhomotop, falls γ homotop ist zu der „Punktkurve" $\tilde{\gamma}(t) \equiv z_0$ für ein $z_0 \in \Omega$.

Ein Gebiet Ω heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop ist.

14.3. Bemerkungen.

(a) Wissen: Aus Homotopie folgt Homologie. Aus Nullhomotopie folgt Nullhomologie: Die Punktkurve hat Windungszahl Null.

(b) Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend, denn man kann jede Kurve auf den Sternpunkt zusammenziehen:

$$H(t,s) = sa + (1-s)\gamma(t), \quad a : \text{Sternpunkt}.$$

(c) γ nullhomolog in $\Omega \not\Rightarrow \gamma$ nullhomotop in Γ.

Beispiel: Es sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $A = -1-i,\ B = 1-i,\ C = 1+i,\ D = -1+i$ und

$$\gamma = AD + DB + BC + CD + DA + AC + CB + BA.$$

Dann ist $\mathrm{Ind}_\gamma(\frac{1}{2}) = \mathrm{Ind}_\gamma(-\frac{1}{2}) = 0$, aber γ nicht nullhomotop.

(d) In einem einfach zusammenhängenden Gebiet gelten der Cauchysche Integralsatz bzw. der Residuensatz für jeden geschlossenen Weg: Dort ist jeder geschlossene Weg nullhomolog, denn man kann ihn stetig in eine Punktkurve deformieren, die Windungszahl Null hat. Also die Voraussetzung von Satz 13.5 erfüllt.

(e) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und U homöomorph zu Ω, so ist U einfach zusammenhängend.

(f) Es folgt: Jedes zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ homöomorphe Gebiet in $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

14.4. Riemannscher Abbildungssatz. *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \neq \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ ist biholomorph abbildbar auf dem Einheitskreis $\mathbb{E}$.*

14.5. Definition. Ein Randpunkt β eines einfach zusammenhängenden Gebiets Ω in $\mathbb{C}$ heißt einfacher Randpunkt, falls gilt: Zu jeder Folge $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ in Ω mit $\alpha_j \to \beta$ existiert ein stetiger Weg γ mit Parameterintervall $[0,1]$ und eine Folge $t_1 \le t_2 \le \ldots \to 1$ in $[0,1[$ mit

(i) $\gamma(t) \in \Omega$ für $0 \le t < 1$

(ii) $\gamma(t_j) = \alpha_j$

(iii) $\gamma(1) = \beta$ (dies folgt natürlich sofort aus der Stetigkeit).

14.6. Bemerkung.

(a) Klar: Hat Ω z.B. glatten Rand, so ist jeder Randpunkt einfach.

(b) Ist die Bedingung erfüllt, so existiert zu jeder offenen Umgebung V von β in $\overline{\Omega}$ ein $T \in [0,1]$ derart, dass der Weg γ für $T \le t \le 1$ in V verläuft. Wir sehen:

(c) Ist $\Omega = \mathbb{E} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$ so ist jeder der Punkte β mit $0 < \beta \le 1$ *nicht* einfach.

14.7. Satz. *Ist Ω einfach zusammenhängend und beschränkt mit nur einfachen Randpunkten, so hat die nach dem Riemannschen Abbildungssatz existierende biholomorphe Abbildung $\kappa : \Omega \to \mathbb{E}$ eine Fortsetzung zu einer invertierbaren bistetigen Abbildung $\kappa : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{E}}$, wobei $\kappa(\partial\Omega) = \partial\mathbb{E}$.*

14.8. Satz. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, so sind äquivalent:*

(a) *Ω ist homöomorph zu $\mathbb{E}$.*

(b) *Ω ist einfach zusammenhängend.*

(c) *$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend.*

(d) *Jeder geschlossene Weg ist nullhomolog.*

(e) *Für jeden (stückweise stetig differenzierbaren) geschlossenen Weg γ in Ω und jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ist*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(f) *Jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ hat eine Stammfunktion.*

(g) *Jedes nullstellenfreie $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ hat eine holomorphe Logarithmusfunktion.*

(h) *Jedes nullstellenfreie $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ hat eine holomorphe Quadratwurzel.*