13. Der Satz von der offenen Abbildung. Maximumprinzip. Globale Cauchyformel. Residuensatz

13.1. Satz von der offenen Abbildung. Ist Ω ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, so ist $f(\Omega)$ entweder ein Punkt ($\Leftrightarrow f$ konstant) oder offen und somit als Bild einer zusammenhängenden Menge ein Gebiet.

Ist f injektiv, so ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$.

Ohne *Beweis.*

13.2. Bemerkung. Es gibt jedoch holomorphe Funktionen f mit $f'(z) \neq 0$ für alle z, die nicht injektiv sind, z. B. $f(z) = e^z$.

13.3. Satz. (Maximumprinzip). Es sei Ω ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nicht konstant. Dann gilt: Ist $A = \sup_\Omega |f(z)|$ und f nicht konstant, so ist

$$|f(z)| < A, \quad z \in \Omega. \tag{1}$$

Ist also f auf $\overline{\Omega}$ stetig fortsetzbar, so nimmt $|f|$ sein Maximum – wenn überhaupt – am Rand an.

Beweis. Ist $A = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Ist f nicht konstant, so ist für jedes $z \in \Omega$ der Punkt $f(z)$ innerer Punkt von $f(\Omega)$. In jeder Umgebung von z gibt es also einen Punkt z_0, für den $|f(z_0)| > |f(z)|$ gilt. Folglich wird das Maximum nicht im Inneren angenommen, und „$<$“ gilt in (1). $\lhd$

Globale Version des Cauchyschen Integralsatzes.

13.4. Ketten und Zyklen. Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Wege in der Ebene und

$$K = \operatorname{Bild} \gamma_1 \cup \ldots \cup \operatorname{Bild} \gamma_n.$$

Wir interessieren uns hier weniger für die Wege selbst als für das Ergebnis, wenn wir eine Funktion darüber integrieren. Jedes γ_j liefert ja eine lineare Abbildung $\tilde{\gamma}_j : C(K) \to \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{\gamma}_j(f) = \int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

Wir schreiben daher

$$\Gamma := \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \gamma_n, \tag{1}$$

nennen Γ die formale disjunkte Summe der Wege und setzen

$$\int_\Gamma f(z)\, dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\, dz, \quad f \in C(K).$$

Solche formalen Summen von Wegen Γ nennt man Ketten; wir nennen die obige Menge K das Bild von Γ. Wir sprechen von einer “Kette Γ in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$”, falls $\operatorname{Bild}\Gamma \subseteq \Omega$. Sind alle γ_j geschlossen, so heißt Γ Zyklus. Ist Γ ein Zyklus und $w \notin \operatorname{Bild}\Gamma$, so definieren wir die Windungszahl von Γ bezüglich w durch

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - w}.$$

Klar: $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = \sum \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(w)$. Wird jedes γ_j durch den entgegengesetzten Weg ersetzt, so nennt man die entsprechende Kette $-\Gamma$; es gilt dann

$$\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz.$$

Insbesondere ist $\operatorname{Ind}_{-\Gamma}(w) = -\operatorname{Ind}_\Gamma(w)$, falls Γ Zyklus und $w \notin \operatorname{Bild}\Gamma$.

Man kann auf dieselbe Weise auch Ketten formal addieren $\Gamma = \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ soll heißen

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

13.5. Satz von Cauchy. Es sei Ω beliebige offene Menge in $\mathbb{C}$, Γ ein Zyklus in Ω mit

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \tag{1}$$

Dann gilt für $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$f(z)\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad z \in \Omega \setminus \operatorname{Bild}\Gamma \tag{2}$$

und

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Sind Γ_1 und Γ_2 Zyklen in Ω mit $\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(w)$ für jedes w, das nicht in Ω liegt, so ist folglich

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz. \tag{4}$$

Ohne *Beweis.* Man muss hier 'nur' (2) zeigen. (3) folgt, indem man für ein $a \in \Omega \setminus \operatorname{Bild}\Gamma$ die Funktion $F(z) = (z-a)f(z)$ betrachtet. Dann ist wegen $F(a) = 0$

$$\int_\Gamma f(w)\,dw = \int_\Gamma \frac{F(w)}{w-a}dw \overset{(2)}{=} 2\pi i F(a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0.$$

(4) folgt aus (3) mit der Definition der Wegsumme. ◁

13.6. Bemerkung. Die Voraussetzung $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0\,\forall\,\alpha \notin \Omega$ ist beispielsweise dann erfüllt, wenn Ω konvexes Gebiet ist und γ geschlossener Weg in Ω. Nach dem Satz von Cauchy für konvexe Gebiete ist dann nämlich

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-\alpha}\,dw = \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha).$$

Damit ist 13.5 eine echte Verallgemeinerung von Satz 11.2.

13.7. Definition. Man nennt zwei Zyklen γ_1, γ_2 in Ω homolog, falls gilt

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(a) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

13.8. Homotopie. (Erinnerung). Es seien γ_0, γ_1 geschlossene Kurven in Ω mit Parameter-Intervall $[a,b]$. Man nennt γ_0 homotop zu γ_1 in Ω, falls eine stetige Abbildung

$$H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$$

existiert mit $H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$, $H(a,t) = H(b,t)$.

13.9. Lemma. *Es seien γ_0, γ_1 geschlossene Kurven in Ω mit Parameter-Intervall $I = [0,1]$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Gilt*

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|, \tag{1}$$

so ist

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(\alpha).$$

Beachte: (1) ist insbesondere erfüllt, falls $|\gamma_0(s) - \gamma_1(s)| < \min\{|\gamma_0(s) - \alpha| : 0 \le s \le 1\}$.

Beweis. (Falls von Interesse) Aus (1) folgt, dass α weder im Bild von γ_0 noch im Bild von γ_1 liegt. Wir können also den Weg

$$\gamma(s) = \frac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha}$$

definieren. Dann gilt

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}$$

und

$$|1 - \gamma(s)| = \frac{|\gamma_0(s) - \gamma_1(s)|}{|\gamma_0(s) - \alpha|} < 1.$$

Also ist $\operatorname{Bild}\gamma \subseteq B(1,1)$ und somit $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 0$ (da 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}\gamma$ liegt). Nun ist

$$\begin{aligned} 0 = 2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(0) &= \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - 0}\,ds = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - \alpha}\,ds - \int_0^1 \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \alpha}\,ds \\ &= 2\pi i\,(\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)). \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. ◁

13.10. Satz. *Es seien γ_0, γ_1 homotope geschlossene Kurven in Ω. Dann ist*

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) \quad \textit{für alle } \alpha \notin \Omega.$$

Also: Aus Homotopie folgt Homologie.

Beweis. (Falls von Interesse. Idee: Die Windungszahl ändert sich beim Homotopieren stetig, ist also wegen der Ganzzahligkeit konstant. Ähnlich zum Beweis von Satz 13.19 in Analysis II) O.B.d.A. mögen γ_1, γ_0 beide Parameter-Intervall $I = [0,1]$ haben. Es sei $H : I \times I \to \Omega$ die Homotopie. Da $I \times I$ kompakt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass

(1) $$|\alpha - H(s,t)| > 2\varepsilon \quad \text{für alle } s,t \in I \times I.$$

Da H gleichmäßig stetig ist, existiert ferner ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

(2) $$|H(s,t) - H(s',t')| < \varepsilon \quad \text{falls } |s - s'| + |t - t'| \le \frac{1}{n}.$$

Wir definieren nun Polygonzüge $g_0, \dots, g_n$ durch

(3) $$g_k(s) = H(\frac{j}{n}, \frac{k}{n})(ns + 1 - j) + H(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n})(j - ns)$$

für $j - 1 \le ns \le j$ und $j = 1, \dots, n$. Aus (2) und (3) folgt, dass

(4) $$|g_k(s) - H(s, \frac{k}{n})| < \varepsilon, \quad k = 0, \dots, n,\ 0 \le s \le 1.$$

Insbesondere erhalten wir für $k = 0$ und $k = n$:

(5) $$|g_0(s) - \gamma_0(s)| < \varepsilon, \quad |g_n(s) - \gamma_1(s)| < \varepsilon, \quad 0 \le s \le 1.$$

Aus (4) und (1) folgt, dass

(6) $$|\alpha - g_k(s)| > \varepsilon \quad \text{für alle } s \in I, k = 0, \dots, n.$$

Andererseits liefern (3) und (2), dass

(7) $$|g_{k-1}(s) - g_k(s)| < \varepsilon \quad \text{für alle } s \in I, k = 1, \dots, n.$$

Nun schließen wir aus (5), (6) und (7) und $(n+2)$-facher Anwendung von Lemma 13.9, dass die Windungszahl von $\gamma_0, g_0, \dots, g_n, \gamma_1$ bezüglich α dieselbe ist. ◁

Meromorphie und Residuensatz.

13.11. Definition. Die Funktion f heißt meromorph in der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, falls

(i) $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ ist, wobei

(ii) die Menge $A \subseteq \Omega$ von Ausnahmepunkten keinen Häufungspunkt in Ω hat und

(iii) f in jedem $a \in A$ einen Pol hat.

Schreibe: $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

13.12. Bemerkung.

(a) Es wird nicht ausgeschlossen, dass $A = \emptyset$. Jede holomorphe Funktion in Ω ist also meromorph.

(b) Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß hat jede Folge, die in einer kompakten Teilmenge K von $\mathbb{C}$ liegt, eine konvergente Teilfolge in K. Folglich enthält jede kompakte Teilmenge von Ω nur endlich viele Punkte von A. Damit ist A abzählbar.

13.13. Residuensatz. Es sei Γ ein Zyklus in $\Omega \setminus A$ mit

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \text{für alle} \quad \alpha \notin \Omega, \tag{1}$$

und f eine Funktion mit 13.11 (i/ii), z.B. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in A} \mathrm{Res}\,(f;a)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(a). \tag{2}$$

Beweis. 1. *Schritt.* Wir zeigen, dass die Menge $B = \{a \in A : \mathrm{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$ nur endlich ist, so dass die Summe in (2) endlich ist: Angenommen, es gäbe eine Folge $(a_j) \subseteq A$ mit $\mathrm{Ind}_\Gamma a_j \neq 0$. Dann ist (a_j) beschränkt, denn auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}\,\Gamma$ ist $\mathrm{Ind}_\Gamma(\cdot)$ konstant Null. Damit hat (a_j) einen Häufungspunkt, a. Dieser liegt in $\partial\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$, da A in Ω nach Definition keinen Häufungspunkt hat. Also ist $\mathrm{Ind}_\Gamma a = 0$. Es folgt wegen der Konstanz des Index auf Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}\,\Gamma$, dass $\mathrm{Ind}_\Gamma(a_j) = 0$ für große j. Widerspruch!

2. *Schritt.* Es seien $b_1, \ldots, b_k$ die Elemente von B und $Q_1, \ldots, Q_k$ die zugehörigen Hauptteile von f. Dann ist die Funktion

$$g = f - (Q_1 + \ldots + Q_k)$$

holomorph fortsetzbar in alle Ausnahmepunkte in Ω, um die die Windungszahl von Γ ungleich Null ist. Wir können daher auf g die Cauchysche Integralformel anwenden; sie liefert

$$0 = \int_\Gamma g(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{k} \int_\Gamma Q_j(z)\,dz.$$

3. *Schritt.* Schreibe

$$Q_j(z) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}^{(j)} (z - b_j)^{-l}.$$

Diese Reihen konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}$. Daher gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_j(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}^{(j)} \int_\Gamma \frac{dz}{(z-b_j)^l} = a_{-1}^{(j)}\,\mathrm{Ind}_\Gamma(b_j),$$

denn für $l \neq 1$ ist das Integral Null (dann existiert eine Stammfunktion 10.31). Da $a_{-1} = \mathrm{Res}\,(f; b_j)$ ist, folgt die Behauptung. $\triangleleft$

13.14. Bemerkung. Es sei f auf jedem Intervall $[-R, R]$, $R \in \mathbb{R}_+$ Riemann integrierbar. Wir setzen

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Bezeichnung: Hauptwert (valeur principal, principal value).

13.15. Beispiel: Anwendung des Residuensatzes. Es sei $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, f sei meromorph auf einer offenen Umgebung U von H mit endlich vielen Polen $a_1, \ldots, a_n$, $\operatorname{Im} a_k > 0$. Es gelte

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} f(Re^{it})Re^{it}\,dt = 0.$$

Dann ist

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; a_k).$$

Beweis. Wähle γ als folgenden Weg: Von $-R$ bis R auf der reellen Achse, von R nach $-R$ auf dem Halbkreis durch die obere Halbebene. Dann ist

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k) \overset{13.13}{=} \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + i \int_0^{\pi} f(Re^{it})Re^{it}\,dt.$$

Grenzwert für $R \to \infty$ liefert die Aussage. ◁

13.16. Lemma. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *sei offen,* $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

(a) *Ist* a *Nullstelle der Ordnung* m, *so ist* $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}; a) = m$.

(b) *Ist* a *Pol der Ordnung* m, *so ist* $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}; a) = -m$.

Beweis. (a) Schreibe $f(z) = (z-a)^m g(z)$, wobei $g(z) \neq 0$ nahe a. Dann ist $f'(z)/f(z) = \frac{m}{z-a} + g'(z)/g(z)$.
(b) analog. ◁

13.17. Satz. Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, γ geschlossener Weg mit $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \notin \Omega$. Ferner sei $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) \in \{0, 1\}$ für alle $\alpha \in \Omega \setminus \operatorname{Bild}\gamma$. Setze $\Omega_1 = \{\alpha \in \Omega : \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1\}$.
Für $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sei N_f die Anzahl der Nullstellen von f in Ω_1, einschließlich Vielfachheit gezählt.

(a) Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \operatorname{Bild}\gamma$, so ist für $\Gamma = f \circ \gamma$:

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \operatorname{Ind}_\Gamma(0),$$

(b) **Satz von Rouché.** Ist auch $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und gilt

(1) $$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \operatorname{Bild}\gamma$$

so ist $N_f = N_g$.

Beweis. (a) Erste Identität aus 13.16. Die zweite ist einfach:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_\Gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f' \circ \gamma)(s)\gamma'(s)}{(f \circ \gamma)(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \end{aligned}$$

(b) Aus (1) folgt, dass weder f noch g eine Nullstelle auf Bild γ hat. Nach (a)

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der Nullstellen von } f &= \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) \\ \text{Anzahl der Nullstellen von } g &= \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0). \end{aligned}$$

Wegen (1) ist nun die Voraussetzung von Lemma 13.9 erfüllt, also $\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$. $\lhd$