## 12. Identitätssatz und Klassifikation isolierter Singularitäten

**Identitätssatz.**

**12.1. Erinnerung.** Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt Häufungspunkt der Teilmenge $M$ des metrischen Raums $X$, falls es eine Folge $(x_j)$ in $M$ gibt mit $x_j \neq x_0 \,\forall\, j$ und $x_j \to x_0$.

**Beachte**:

(i) Es muss nicht $x_0 \in M$ sein.

(ii) Die Menge aller Häufungspunkte einer Menge $M$ ist abgeschlossen.

**12.2. Lemma.** *Jede offene Teilmenge $U$ von $\mathbb{C}$ ist abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen.*

*Beweis.* $U_k := \{z \in U : |z| \le k$ und $\operatorname{dist}(z, \partial U) \ge \frac{1}{k}\}$. Dann ist $U_1 \subseteq U_2, \ldots$, und $U = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$. Ferner sind alle $U_k$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. $\lhd$

**12.3. Satz.** *Es sei $\Omega$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und*

$$\mathcal{N}(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$$

*die Nullstellenmenge von $f$. Dann gilt* entweder *$\mathcal{N}(f) = \Omega$ (d. h. $f$ ist die Nullfunktion)* oder *$\mathcal{N}(f)$ ist abzählbar und hat keinen Häufungspunkt in $\Omega$.*

*Im zweiten Fall gibt es zu jedem $a \in \mathcal{N}(f)$ eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 1$ (die sogenannte Nullstellenordnung) mit*

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \tag{1}$$

*wobei $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $g(a) \neq 0$.*

*Beweis.* Es sei $H$ die Menge aller Häufungspunkte von $\mathcal{N}(f)$ in $\Omega$. Sie ist nach 12.1 abgeschlossen. Da $f$ stetig ist, ist $f(a) = 0$ für alle $a \in H$.

Sei nun $a \in \mathcal{N}(f)$ und $r > 0$ mit $B(a,r) \subseteq \Omega$. Nach Satz 11.3 hat $f$ eine Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n (z-a)^n, \quad z \in B(a,r). \tag{2}$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten

- Entweder sind alle $c_n$ Null; in diesem Fall ist $f$ die Nullfunktion, oder
- es gibt eine kleinste Zahl $m$ mit $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$ und $c_m \neq 0$. Natürlich ist $m \ge 1$, denn $c_0 = f(a) = 0$!

Im letzten Fall definieren wir

$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & z = a. \end{cases}$$

Damit gilt 12.3(1). Klar ist, dass $g$ auf $\Omega \setminus \{a\}$ holomorph ist. Aus (2) folgt jedoch, dass

$$g(z) = \sum_{n=m}^\infty c_n (z-a)^{n-m} = \sum_{n=0}^\infty c_{m+n} (z-a)^n, \quad z \in B(a,r).$$

Folglich ist $g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Weil $g(a) \neq 0$, existiert auch eine Umgebung von $a$ mit $g(z) \neq 0$. Folglich ist $a$ die einzige Nullstelle von $f$ in dieser Umgebung und $a$ kann kein Häufungspunkt von Punkten in $\mathcal{N}(f)$ sein.

Ist also $a$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$ in $\Omega$, so ist $f \equiv 0$ in $B(a,r)$. Daher ist $H$ nicht nur abgeschlossen sondern auch offen in $\Omega$. Also haben wir die Alternativen:

(i) $H = \emptyset$, d.h. $\mathcal{N}(f)$ hat keine Häufungspunkte in $\Omega$, oder

(ii) $H = \Omega$, d.h. $f \equiv 0$ auf $\Omega$.

Falls $f$ nicht die Nullfunktion ist, hat $\mathcal{N}(f)$ keine Häufungspunkte in $\Omega$. In jeder kompakten Teilmenge von $\Omega$ können daher nur endlich viele Elemente von $\mathcal{N}(f)$ liegen. Nach Lemma 12.2 folgt die Abzählbarkeit. $\lhd$

**12.4. Folgerung. (Identitätssatz)** Es seien $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $f(z) = g(z)$ auf einer Teilmenge von $\Omega$, die einen Häufungspunkt enthält (z. B. einer Folge $(z_n)$ mit Grenzwert $z_0 \in \Omega$). Dann ist $f = g$.

**12.5. Bemerkung.** Der Häufungspunkt muss in $\Omega$ liegen:

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} \ \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

hat eine Folge von Nullstellen in $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$, mit $z_k \to 0$, stimmt aber nicht mit der Nullfunktion überein.

**Isolierte Singularitäten.**

**12.6. Definition.** Ist $a \in \Omega$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, so nennt man $a$ eine *isolierte* Singularität von $f$ in $\Omega$.

Wenn man $f$ in $a$ so definieren kann, dass die resultierende Funktion auf ganz $\Omega$ holomorph ist, so heißt $a$ *hebbare* Singularität.

*Beispiel*: $\frac{\sin z}{z}$ hat in Null eine hebbare Singularität (Potenzreihenentwicklung anschauen!).

**12.7. Satz. (Casorati–Weierstraß)** *Ist $a \in \Omega$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, so liegt einer der folgenden (verschiedenen) Möglichkeiten vor:*

(a) *$f$ hat eine hebbare Singularität in $a$. In diesem Fall ist $f$ in einer Umgebung von $a$ beschränkt.*

(b) *Es gibt komplexe Zahlen $c_1, \ldots, c_m$, $m \geq 1$, $c_m \neq 0$ derart, dass*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

*eine hebbare Singularität in $a$ hat. Man sagt dann, $f$ habe einen Pol der Ordnung $m$ in $a$ und nennt $\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ den Hauptteil von $f$ in $a$. Den Koeffizienten $c_1$ vom $(z-a)^{-1}$ nennt man das Residuum von $f$ in $a$. Man schreibt $\mathrm{Res}_a f$ oder $\mathrm{Res}\,(f; a)$.*

*In diesem Fall gilt*

$$|f(z)| \to \infty \quad \text{für} \quad z \to a.$$

(c) *Für jedes $r > 0$ ist das Bild von $B(a, r) \setminus \{a\}$ unter $f$ dicht in $\mathbb{C}$. Man sagt dann, dass $f$ in $a$ eine wesentliche Singularität habe.*

**Beachte**: *Wir können die drei Fälle anhand des Wachstumsverhaltens von $f$ nahe $a$ unterscheiden. Mehr in 12.11.*

*Beweis.* Annahme, Fall (c) liegt nicht vor. Dann existiert ein $r > 0$, ein $\delta > 0$ und ein $\omega \in \mathbb{C}$ mit

$$|f(z) - \omega| > \delta \quad \forall\, z \in B(a, r) \setminus \{a\}.$$

Wir schreiben $B := B(a, r)$, $\dot{B} = B(a, r) \setminus \{a\}$ und definieren

(1) $$g(z) := \frac{1}{f(z) - \omega}, \quad z \in \dot{B}.$$

Dann ist $g(z) \in \mathcal{H}(\dot{B})$ und $|g| < 1/\delta$. Nun hat jede in $\dot{B}$ holomorphe und beschränkte Funktion $g$ eine holomorphe Fortsetzung auf $B$. Das sieht man so:

Setze

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 g(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ 0 & z = a \end{cases}.$$

Dann ist $h$ offensichtlich auf $\Omega \setminus \{a\}$ differenzierbar. Auch in $a$ ist $h$ differenzierbar mit Ableitung Null, denn

$$\lim_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} (z-a) g(z) \to 0,$$

da $g$ in einer Umgebung von $a$ beschränkt ist. Auf jeder Kreisscheibe $B(a,r) \subseteq \Omega$ hat $h$ also eine Potenzreihendarstellung

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Folglich ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n$ für $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$ und die Definition $g(a) := c_2$ liefert eine holomorphe Fortsetzung.

Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten

(i) $g(a) \neq 0$. Dann ist $f$ wegen (1) in einer Umgebung von $a$ beschränkt, und wir haben nach obigem Argument eine hebbare Singularität.

(ii) $g(a) = 0$. Nach Satz 12.3 hat $g$ eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, d. h. $\exists\, m \geq 1$, $\tilde{g} \in \mathcal{H}(B)$ mit $\tilde{g}(a) \neq 0$ und

$$g(z) = (z-a)^m \tilde{g}(z).$$

Da $f$ nahe $a$ holomorph ist, hat $g$ keine weitere Nullstelle in $B$. Somit ist $\tilde{g}(z) \neq 0$ für alle $z \in B$. Wir können also die Funktion

$$h := \frac{1}{\tilde{g}} \quad \in \mathcal{H}(B)$$

definieren; $h$ hat keine Nullstelle auf $B$. Es gilt

(2) $$f(z) - \omega = (z-a)^{-m} h(z), \quad z \in \dot{B}.$$

Zudem können wir $h$ in eine Potenzreihe entwickeln

(3) $$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n, \quad z \in B,$$

wobei $b_0 \neq 0$ ist.

Kombination von (2) und (3) liefert die Behauptung. $\triangleleft$

**12.8. Definition.** Es sei $0 \leq r < R \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$. Definiere

$$U_{rR}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

**12.9. Cauchysche Integralformel für Kreisringe.** (Vgl. mit der Cauchyformel in konvexen Gebieten, s. 11.2) Es sei $0 \leq r < r' < R' < R \leq \infty$, $f \in \mathcal{H}(U_{rR}(a))$, $z \in U_{r'R'}(a)$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

*Beweis.* Schreibe die Differenz als Summe von Integralen über Wege, die jeweils in konvexen Teilmengen von $U_{rR}(a)$ verlaufen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege $z$ auf keiner der Trennlinien. Dann ist $\operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z) = 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, N\}$ ; für alle anderen ist $\operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z) = 0$. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z).$$

◁

**12.10. Laurent-Reihen.** Ist $f \in \mathcal{H}(U_{rR}(a))$, so gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz$$

für beliebiges $\rho \in ]r, R[$ (die Integrale sind unabhängig von der Wahl). Die Reihen konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $U_{rR}(a)$. Die Koeffizienten in der Darstellung sind eindeutig.

*Beweis.* Analog 10.22: Nach 12.9 ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = F(z) - H(z)$$

für $r < r' < R' < R$, $z \in U_{r'R'}(a)$. Weil $|z-a| < R'$ ist, schließt man wie in 10.23: $F$ ist holomorph,

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw$$

Dass die $c_k$ unabhängig von $\rho$ sind, sieht man durch ein Zerlegungsargument für die Wegdifferenz analog zu 12.9.
Für $|w-a| = r' < |z-a|$ ist

$$w - z = (w-a) - (z-a) = (z-a)\left(\frac{w-a}{z-a} - 1\right).$$

Also ist

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^k.$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint\limits_{|w-a|=r'} f(w)(w-a)^k (z-a)^{-k-1}\, dw.$$

Also:

(1) $$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw.$$

Die Potenzreihe für $F$ konvergiert für $|z-a| < R$, diejenige für $H$ auf $|z-a| > r$. Beide konvergieren absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $U_{rR}(a)$.

Die Eindeutigkeit der Koeffizienten folgt aus der Formel (1). ◁

**12.11. Nochmals: Isolierte Singularitäten.** Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(U_{0R}(a)) = \mathcal{H}(B(a, R) \setminus \{a\})$ für ein $R > 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$. Man nennt

$$h_a(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$$

den Hauptteil von $f$ in $a$ und den Koeffizienten $c_{-1}$ (nach 12.10 ist $c_{-1} = \oint_{|w-a|=\rho} f(w)\,dw$) das Residuum von $f$ in $a$.

Wir erhalten nun eine weitere Klassifikation der isolierten Singularitäten über den Hauptteil der Laurentreihe: Die Funktion $h_a$ ist nach Satz 12.10 holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Es gilt

(i) $f$ hat eine hebbare Singularität in $a \Leftrightarrow h_a = 0 \Leftrightarrow c_k = 0$ für alle $k < 0$.

(ii) $f$ hat einen Pol der Ordnung $m$ in $a \Leftrightarrow h_a = \sum_{k=-m}^{-1} c_k (z-a)^k$ mit $c_m \neq 0$ (endliche Summe).

(iii) $f$ hat eine wesentliche Singularität in $a \Leftrightarrow$ unendlich viele $c_k$ sind $\neq 0$.

Dies sieht man sofort, weil $f(z-a)^m$ holomorph fortsetzbar in $a \Rightarrow$ alle $c_k = 0$ für $k < -m$ nach Cauchy $\Leftrightarrow h_a$ hat nur (höchstens) $m$ Terme.

**12.12. Definition. Singularitäten im Unendlichen.** Es sei $f \in \mathcal{H}(U_{r,\infty}(0))$. Wir sagen $f$ habe im Unendlichen eine hebbare Singularität, einen Pol, eine wesentliche Singularität, falls die Funktion

$$g(z) := f(1/z) \in \mathcal{H}(U_{0,\frac{1}{r}}(0))$$

die entsprechende Singularität in Null hat.

**12.13. Beispiel.** Ein Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k$ vom Grad $m \geq 1$ hat im Unendlichen einen Pol der Ordnung $m$. Ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ kein Polynom, so hat $f$ eine wesentliche Singularität im Unendlichen. Ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und hat $f$ im Unendlichen eine hebbare Singularität, so ist $f$ konstant.