10. Grundlagen der Funktionentheorie

Topologie und Zusammenhang.

10.1. Topologische Räume.

(a) Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Familie von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:
  (i) $X \in \mathcal{O}$, $\emptyset \in \mathcal{O}$;
  (ii) $U_i \in \mathcal{O}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$;
  (iii) $U_i \in \mathcal{O}, i = 1, \dots, m \Rightarrow \bigcap_{i=1}^m U_i \in \mathcal{O}$.
  Dann heißt $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum; die Elemente von $\mathcal{O}$ nennt man die offenen (Teil-)mengen von X und $\mathcal{O}$ die Topologie von X.

  Eine Menge heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist. Klar: X und $\emptyset$ sind stets sowohl offen als auch abgeschlossen.

(b) X heißt zusammenhängend, falls X und $\emptyset$ die einzigen Mengen sind, die offen und abgeschlossen sind. Äquivalent: X ist nicht zusammenhängend, falls offene Mengen $U, V \neq \emptyset$ existieren mit $X = U \dot\cup V$ (disjunkte Vereinigung).

(c) Eine Menge $M \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls es eine offene Menge U gibt mit $x \in U \subseteq M$.

(d) X, Y seien topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

(e) X heißt wegzusammenhängend, falls es zu $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$.

10.2. Bemerkung. Jeder metrische Raum (Banachraum, Hilbertraum) ist ein topologischer Raum. Topologische Räume können jedoch viel komplizierter sein. Für $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verwendet man die üblichen offenen Mengen, falls nichts anderes festgelegt ist.

10.3. Lemma. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Setzt man $\mathcal{O}_M = \{M \cap U : U \in \mathcal{O}\}$, so ist $(M, \mathcal{O}_M)$ ebenfalls ein topologischer Raum.*

Beweis. Klar. $\lhd$

10.4. Lemma. *Es ist äquivalent*

(1) *X ist zusammenhängend;*

(2) *Ist $\emptyset \neq A \subseteq X$ offen und abgeschlossen, so ist $A = X$.*

(3) *Ist $f : X \to \mathbb{C}$ lokal konstant (d.h. gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung, auf der f konstant ist), so ist f konstant.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Schreibe $X = A \,\dot\cup\, (X \setminus A)$. (Zerlegung in offene Mengen!)

(2) $\Rightarrow$ (3): Man sieht leicht: Als lokal konstante Funktion ist f stetig. Daher ist $f^{-1}(f(x))$ abgeschlossen für jedes $x \in X$, da $f(x)$ als einzelner Punkt in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist, und $\neq \emptyset$. Ferner ist $f^{-1}(f(x))$ auch offen, da f lokal konstant ist. Nach Annahme ist daher $f^{-1}(f(x)) = X$, somit ist f konstant.

(3) $\Rightarrow$ (1): Es seien $U, V \subseteq X$ offen und $X = U \dot\cup V$. Betrachte die charakteristische Funktion χ_U von U. Sie ist lokal konstant, also nach Annahme konstant. Somit ist $V = \emptyset$. $\lhd$

10.5. Lemma. *Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

Beweis. Es sei $f(X) = U\dot{\cup}V$ mit offenen Mengen U und V. Dann ist $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U\dot{\cup}V) = f^{-1}(U)\dot{\cup}f^{-1}(V)$. Da wegen der Stetigkeit von f die Mengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen sind und X zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) = \emptyset$. $\triangleleft$

10.6. Lemma. *Die zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.*

Beweis. Man überlegt sich zunächst, dass $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, wenn aus $c, d \in I$, $c < d$ folgt, dass $]c, d[\, \subseteq I$:

Es sei I eine Menge mit dieser Eigenschaft. Setze $l = \inf I$, $r = \sup I$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ist $l = r$, so ist $I = \emptyset$ oder $I = [l, l]$ ein Intervall. Ansonsten gibt es nach Definition von inf und sup zu hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ Elemente $c_\varepsilon < d_\varepsilon \in I$ mit $c_\varepsilon < l + \varepsilon$, $d_\varepsilon > r - \varepsilon$, so dass $]c_\varepsilon, d_\varepsilon[\, \subseteq I$. Es folgt, dass $]l, r[\, = \bigcup_\varepsilon]c_\varepsilon, d_\varepsilon[\, \subseteq I$ und somit $I \in \{]l, r[, [l, r[,]l, r], [l, r]\}$, je nachdem, ob das Infimum bzw. Supremum zu I gehört oder nicht.

'$\Rightarrow$' Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall, so finden wir $c < d \in I$ und $a \in\,]c, d] \setminus I$. Dann ist $I = (I \cap\,]-\infty, a[) \dot{\cup} (I \cap\,]a, \infty[)$ nicht zusammenhängend.

'$\Leftarrow$' Es sei I ein Intervall und $I = U\dot{\cup}V$ mit offenen, disjunkten Teilmengen U und V von I. Wähle $u \in U$. Dann existiert ein offenes Intervall um u, das in U enthalten ist. Wähle $l < u$ minimal und $r > u$ maximal, so dass $]l, r[\subseteq U$. Dann sind l und r nicht in V, denn dann gäbe es offene Intervalle um l bzw. r, die in V enthalten sind. Diese hätten aber nichtleeren Schnitt mit $]l, r[\, \subseteq U$. Widerspruch. Also sind l und r Randpunkte von I, so dass $I \in \{]l, r[, [l, r[,]l, r], [l, r]\}$ und $V = \emptyset$. $\triangleleft$

10.7. Lemma. *Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Achtung *Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch; s. aber 10.8.*

Beweis. Annahme, X ist nicht zusammenhängend; $X = U \dot{\cup} V$. Wähle $x \in U$, $y \in V$. Dann existiert ein stetiger Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Als Bild der zusammenhängenden Menge $[0, 1]$ ist $\gamma([0, 1])$ zusammenhängend im Widerspruch dazu, dass wir schreiben können

$$\gamma([0, 1]) = (\gamma([0, 1]) \cap U) \dot{\cup} (\gamma([0, 1]) \cap V).$$

$\triangleleft$

10.8. Satz. *In $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist jede zusammenhängende und offene Menge auch wegzusammenhängend.*

Beweis. Es sei $X \neq \emptyset$ offen und zusammenhängend. Wähle $a \in X$ beliebig. Setze

$$X_a = \{x \in X : \exists\gamma \in C([0, 1], X) \text{ mit } \gamma(0) = a, \gamma(1) = x\}.$$

Dann ist X_a offen, da X offen ist: Zu x in X_a wähle eine Kugel, die in X enthalten ist. Dann lässt sich jedes Element der Kugel zunächst über ein Geradenstück mit x verbinden, dieses wiederum mit a nach Annahme.

X_a ist auch abgeschlossen: Ist $x \in X$ so, dass jede offene Umgebung von x die Menge X_a schneidet, so wählt man eine Kugel um x, die in X enthalten ist. Diese enthält ein Element x_0 von X_a. Wie oben erhält man dann einen stetigen Weg von x über x_0 nach a. $\triangleleft$

10.9. Definition. Eine Teilmenge Z von X heißt Zusammenhangskomponente, falls gilt

- Z ist zusammenhängend.
- Z ist maximal bezüglich dieser Eigenschaft, d. h. ist $Z \subseteq Z'$, Z' zusammenhängend, so ist $Z = Z'$.

10.10. Lemma. *X sei topologischer Raum.*

(a) *Zu jedem zusammenhängenden $\emptyset \neq M \subseteq X$, insbesondere zu jedem Punkt $x \in X$, gibt es genau eine Zusammenhangskomponente Z mit $M \subseteq Z$.*

(b) *Jede Zusammenhangskomponente ist abgeschlossen.*

Beweis. Selbst probieren. ◁

10.11. Definition. Ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Holomorphe Funktionen. Im Folgenden sei Ω stets ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

10.12. Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt (komplex) differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, falls

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Ist f auf ganz Ω differenzierbar, so nennt man f holomorph (oder analytisch) auf Ω und schreibt

$$f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Beachte: f' ist wieder eine Funktion von Ω nach $\mathbb{C}$.

10.13. Lemma.

(a) *Sind f, g differenzierbar in z_0, so auch $f + g, f \cdot g$ und $1/g$ (falls $g(z_0) \neq 0$); es gelten die üblichen Rechenregeln.*

(b) *Die Komposition holomorpher Funktionen ist holomorph; es gilt die Kettenregel*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Beweis. Wie im Reellen.

10.14. Beispiele.

(a) Polynome sind holomorph in $\mathbb{C}$.

(b) $1/z^k$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$.

(c) $\exp, \sin, \cos$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $\exp' = \exp, \sin' = \cos, \cos' = -\sin$ mit der gleichen Rechnung wie im reellen Fall (s. auch 10.19 unten).

10.15. Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit – Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$$

Wir identifizieren f mit der Abbildung

$$F : \Omega_\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \Omega_\mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$$

definiert durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} U(x, y) = u(x + iy) \\ V(x, y) = v(x + iy). \end{array}$$

Dann gilt: f ist komplex differenzierbar in $x + iy \Leftrightarrow F$ ist total differenzierbar in (x, y), und es gelten die so genannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x U(x, y) &= \partial_y V(x, y) \\ \partial_y U(x, y) &= -\partial_x V(x, y) \end{aligned}$$

kurz: $U_x = V_y,\ U_y = -V_x$.

Beweis. f ist komplex differenzierbar in $z = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f'(z) =: \varphi(z, h) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0$$

(1) $$\Leftrightarrow \quad f(z + h) = f(z) + hf'(z) + h\varphi(z, h)$$

mit $\varphi(z,h) \to 0$ für $h \to 0$. Schreibe $f'(z) =: c \in \mathbb{C},\ c = c_1 + ic_2$.
Dann gilt

$$f'(z)h = (c_1 + ic_2)(h_1 + ih_2) = c_1h_1 - c_2h_2 + i(c_2h_1 + c_1h_2),$$

wir identifizieren dies mit dem Element von $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} c_1h_1 - c_2h_2 \\ c_2h_1 + c_1h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Das heißt: Die komplexe Multiplikation mit $c = c_1 + ic_2$ ist äquivalent zu der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Die Beziehung (1) ist also äquivalent zu

$$F(x + h_1, y + h_2) = F(x,y) + \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \psi(x,y,h)$$

mit $\psi(x,y,h) = o(\|h\|)$.
Dies wiederum heißt gerade, dass F in (x,y) total differenzierbar ist mit

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix}.$$

10.16. Bemerkung. Hinreichend für totale Differenzierbarkeit von F ist bekanntlich, dass F stetig partiell differenzierbar ist. Zum Nachweis der komplexen Differenzierbarkeit genügt es also, dies und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu überprüfen.

10.17. Der $\overline{\partial}$-Operator. Wegen $z = x + iy$ haben wir

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = -i\frac{z - \overline{z}}{2}.$$

Wir betrachten z und $\overline{z}$ als neue Variablen. Es sei $F = F(x,y) : \Omega_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ total reell differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Schreiben wir $F = u + iv$, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y},$$

und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind äquivalent dazu, dass

$$\overline{\partial}F := \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0.$$

10.18. Potenzreihen.

(a) Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ existiert der Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$. Auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B(a,r)}$ mit $r < R$ konvergiert die Reihe gleichmäßig, während sie auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B(a,R)}$ divergiert. Es gilt

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

(b) Wir sagen, die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei durch Potenzreihen dargestellt, falls zu jeder Kreisscheibe $B(a,r) \subseteq \Omega$ eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ existiert, die für alle $z \in B(a,r)$ gegen $f(z)$ konvergiert.

10.19. Satz. *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei durch Potenzreihen dargestellt. Dann ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und f' ist ebenfalls durch Potenzreihe dargestellt. Es gilt: Ist*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad z \in B(a,r),$$

so ist

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

Diese Reihe hat gleichen Konvergenzradius wie die obige.
Beachte: Wegen der Konvergenz der Reihe für f gilt für den Konvergenzradius $R \geq r$.

Beweis. Setze $g(z) = \sum nc_n(z-a)^{n-1}$; wähle $w \in B(a,r)$ und ρ mit $|w-a| < \rho < r$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a = 0$.
Dann gilt

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1} \right).$$

Der Ausdruck in Klammern ist Null für $n = 1$ und (mit kurzer Rechnung) gleich

$$(z-w) \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1} z^{n-k-1}$$

für $n \geq 2$ (ausmultiplizieren und verwenden, dass $(z-w)(z^{n-1}+z^{n-2}w+\ldots+w^{n-1}) = z^n - w^n$). Für $|w|, |z| < \rho$ ist der Betrag der *Summe* höchstens

$$\frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2},$$

also ist

$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) \right| \leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n| \rho^{n-2}.$$

Nun ist $|c_n| \leq R^{-n}$ Die Summe konvergiert, weil $\rho < r \leq R$. Daher geht die linke Seite gegen Null, falls $z \to w$. Folglich ist $f'(w) = g(w)$. ◁

10.20. Folgerung. Der Satz läßt sich wiederum auf f' anwenden. Also ist f beliebig oft differenzierbar. Jede Ableitung ist durch Potenzreihen darstellbar, und

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k-1)c_n(z-a)^{n-k}.$$

Es gilt $f^{(k)}(a) = k!\, c_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Die Potenzreihendarstellung ist also eindeutig.

10.21. Erinnerung. Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar. Die Abbildung γ (manchmal auch das Bild $\Gamma = \gamma([a,b])$ nennt man dann einen Weg in $\mathbb{C}$. Er heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Für stetiges $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Dies ist unabhängig von orientierungserhaltenden Parametrisierungen: Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$, so ist für $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$

$$\int_c^d f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_c^d f \circ \gamma \circ \varphi(t)\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f \circ \gamma(t)\gamma'(t)\,dt,$$

Kehrt φ die Orientierung um, d. h., ist $\varphi(c) = b, \varphi(d) = a$, so ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Man nennt dann γ_1 den entgegengesetzten Weg. Sind γ_1, γ_2 zwei Wege, und ist der Endpunkt von γ_1 gleich dem Ausgangspunkt von γ_2, so setzt man für den vereinigten Weg γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

falls f stetig auf $\operatorname{Bild}\gamma_1 \cup \operatorname{Bild}\gamma_2$. Es gilt die Ungleichung

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \|f\|_{\sup} \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt,$$

das letzte Integral nennt man die Länge von γ.

10.22. Spezialfälle.

(a) Es sei $a \in \mathbb{C}, r > 0$. Der durch

$$\gamma(t) = a + re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

definierte Weg heißt die positiv orientierte Kreislinie um a mit Radius r; es gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ir\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})e^{it}dt.$$

Die Länge von γ ist $2\pi r$.

(b) Sind $a, b \in \mathbb{C}$, so heißt der durch

$$\gamma(t) = a + (b-a)t, \quad 0 \le t \le 1$$

definierte Weg die Verbindungsstrecke von a und b. Schreibe $[a,b]$. Seine Länge ist $|b-a|$ und

$$\int_{[a,b]} f(z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f(a + (b-a)t)\,dt.$$

Ist

$$\gamma_1(t) = \frac{a(\beta - t) + b(t-\alpha)}{\beta - \alpha}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

so erhalten wir einen äquivalenten Weg. Der entgegengesetzte Weg zu $[a,b]$ ist $[b,a]$.

(c) Es sei $\{a,b,c\}$ ein geordnetes Tripel komplexer Zahlen. Es sei $\triangle = \triangle(a,b,c)$ das zugehörige Dreieck (formal: $\triangle$ ist kleinste konvexe Menge, die a, b und c enthält. Eine Menge heißt konvex, falls sie mit je zwei Punkten x und y auch deren Verbindungsstrecke enthält.). Ist f auf $\partial\triangle$ stetig, so setzen wir

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz.$$

Vertauscht man a, b, c zyklisch, so ändert sich das Integral nicht.

10.23. Satz. *Es sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$ mit Bild Γ und $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Wir setzen*

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\, dw, \quad z \notin \Gamma.$$

Dann ist f auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ in Potenzreihen entwickelbar, also holomorph.

Beweis. Es sei $B(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Wir zeigen: Es gibt eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a, die f darstellt und auf $B(a,r)$ konvergiert.
Für $z \in B(a,r)$ und $w \in \Gamma$ ist $|z-a| < r \le |w-a|$ und

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)(1-\frac{z-a}{w-a})} = \frac{1}{w-a}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k \quad \text{(konvergent!)}.$$

Also ist

$$\frac{g(w)}{w-z} = \sum_{k=0}^\infty \frac{g(w)}{(w-a)^{k+1}}(z-a)^k.$$

Auf jeder Scheibe $B(a,\rho), \rho < r$ konvergiert die Reihe gleichmäßig nach dem Weierstraß-Kriterium, da

$$\sum_{k=0}^\infty \left|\frac{g(w)}{w-a}\right| \left|\frac{z-a}{w-a}\right|^k \le \frac{\sup|g|}{r}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^k < \infty.$$

Somit können wir Integration und Summation vertauschen:

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\, dz = \sum_{k=0}^\infty c_k(z-a)^k,$$

wobei

$$c_k = \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw.$$

Logarithmus und Windungszahl.

10.24. Der Logarithmus. Die Exponentialfunktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Ihr Bild ist bekanntlich $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir wissen auch, dass

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$$

ist. Daher ist exp nicht bijektiv. Auf dem Streifen

$$S = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, -\pi < y \le \pi\}$$

ist exp jedoch injektiv (denn $\exp w = \exp z \Leftrightarrow w - z \in \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$); das Bild des Streifens unter exp ist $\mathbb{C}^*$. Also existiert eine Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{C}^* \to S$ mit $\exp \circ \ln = id$ und $\ln \circ \exp = id$.
Aber: Diese Umkehrfunktion ist nicht stetig. Es ist $\exp(i\pi) = -1$, also $\ln(-1) = i\pi$, für $-\pi < y_n < \pi$ mit $y_n \to -\pi$ gilt $\exp(iy_n) \to -1$, aber

$$\ln(\exp(iy_n)) = iy_n \to -i\pi \ne i\pi = \ln(-1).$$

Wählen wir hingegen:

$$S_0 = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\},$$

so ist exp auf S_0 injektiv mit Bild $\exp(S_0) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$, und die Umkehrfunktion $\ln|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}}$ ist stetig, sogar differenzierbar mit $\ln' z = 1/z$. Mehr dazu in 10.26 unten.

10.25. Definition. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Eine stetige Funktion $f: \ \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z$ heißt stetiger Zweig des Logarithmus auf Ω.

(b) Allgemeiner: Ist $M \subseteq \mathbb{C}$ und $g : M \to \mathbb{C}$ stetig, so nennt man eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = g(z)$ einen stetigen Logarithmus für g.

Die Funktion $\mathrm{Im}\, f : M \to \mathbb{R}$ heißt dann Argumentfunktion zu g. Es gilt:

$$g(z) = |g(z)| \exp(i\mathrm{Im}\, f(z)).$$

10.26. Satz.

(a) *Die Funktion*

$$\ln|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$$

(*vgl.* 10.24) *ist ein stetiger Zweig des Logarithmus, der sog. Hauptzweig.*

(b) *Ist Ω zusammenhängend, so unterscheiden sich je zwei stetige Logarithmusfunktionen um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.*

(c) *Jeder stetige Zweig f des Logarithmus auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ ist holomorph, und es gilt*

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Beweis. (a) Stetigkeit: Zu jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ lassen sich $r > 0$ und $\varphi \in \,] - \pi, \pi[$ stetig wählen, so dass $z = re^{i\varphi}$. Dann ist $\ln z = \ln r + i\varphi$, wobei mit $\ln r$ der reelle Logarithmus gemeint ist. Damit ist $z \mapsto \ln z$ stetig.

(b) Es seien f, g stetige Zweige. Setze

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z)).$$

Dann ist

$$\exp(2\pi i h(z)) = \exp(f(z) - g(z)) = 1,$$

also ist $h(z) \in \mathbb{Z}$ für jedes $z \in \Omega$, somit auch $h(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$. Da Ω zusammenhängt, ist h konstant.

(c) Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion: Ist (z_k) eine Folge in Ω mit $z_k \to z \in \Omega$, so gilt (nach Annahme der Stetigkeit) $y_k := \ln z_k \to \ln z =: y$, folglich

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln z_k - \ln z}{z_k - z} = \lim \frac{y_k - y}{\exp y_k - \exp y} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{z}.$$

$\lhd$

10.27. Satz. *Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ stetig, so existiert eine stetige Funktion f mit $\exp(f(t)) = \gamma(t)$. Ist γ sogar stückweise stetig differenzierbar, so auch f.*

Beweis. (Kreiskettenverfahren). Das Bild Γ von γ schneidet nicht den Ursprung. Wir überdecken es mit endlich vielen Kreisen, die so klein sind, dass auch sie den Ursprung nicht enthalten. Auf jedem dieser Kreise finden wir einen Logarithmus. Dort wo zwei Kreise sich schneiden, müssen die Logarithmen bis auf ein Vielfaches von $2\pi i$ übereinstimmen. Wir gehen die Kreise der Reihe nach durch und finden durch Abändern der Logarithmen um geeignete Vielfache von $2\pi i$ dann einen Logarithmus auf ganz Γ.

Genauer: Die Menge $\gamma([a, b])$ ist kompakt. Setze $r = \min\{|\gamma(t)| : a \leq t \leq b\}$. Dann ist $r > 0$. Wähle eine Partition

$$a = t_0 < t_1 < \ldots t_N = b$$

von $[a,b]$ der Feinheit δ, wobei δ so gewählt ist, dass aus $|s-t|<\delta$ folgt $|\gamma(s)-\gamma(t)|<r/2$. Dann ist

$$\bigcup_{j=0}^{N} B(\gamma(t_j),r) \supseteq \gamma([a,b])$$

und

$$\gamma([t_k,t_{k+1}]) \subseteq B(\gamma(t_k),r)\cap B(\gamma(t_{k+1}),r).$$

Ferner ist $0\notin B(\gamma(t_j),r)$ für alle j nach Wahl von r.

Wir machen nun folgende Beobachtung: Ist $a\in\mathbb{C}^*$, so existiert auf $B(a,|a|)$ ein stetiger Zweig des Logarithmus (für $a\in\mathbb{R}_{>0}$ können wir den Hauptzweig des Logarithmus wählen, für allgemeines $a=|a|e^{i\varphi}$ wählen wir $\ln(z)=\ln(ze^{-i\varphi})+i\varphi$, wobei rechts der Hauptzweig stehen soll).

Also existiert ein $f_0:[t_0,t_1]\to\mathbb{C}$ mit

$$\exp(f_0(t))=\gamma(t);\quad t_0\le t\le t_1.$$

Klar: Da $f=\gamma\circ\ln$ ist, ist mit γ auch f stetig/stückweise stetig differenzierbar. Anschließend finden wir ein $g_1:[t_1,t_2]\to\mathbb{C}$ mit

$$\exp(g_1(t))=\gamma(t),\quad t_1\le t\le t_2.$$

Dabei existiert ein $k\in\mathbb{Z}$ mit $g_1(t_1)=f_0(t_1)+2\pi ik$. Wir definierten dann $f_1:[t_1,t_2]\to\mathbb{C}$ durch $f_1t)=g_1(t)-2\pi ik$ und haben dadurch die gesuchte Funktion auf $[t_0,t_2]$. Nach N Schritten sind wir fertig. $\lhd$

10.28. Folgerung. *Ist $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ eine Kurve und $z\notin\Gamma=\text{Bild}\gamma$, so ist $\delta=\gamma-z$ eine Kurve in $\mathbb{C}^*$. Wir finden also eine stückweise stetig differenzierbare Funktion f mit $\exp(f(t))=\delta(t)$. Dann ist*

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z}=\int_a^b\frac{(\delta(t)+z)'}{(\delta+z)-z}\,dt=\int_a^b\frac{\exp(f(t))f'(t)}{\exp(f(t))}\,dt=\int_a^b f'(t)\,dt=f(b)-f(a).$$

Insbesondere ist also der Imaginärteil des Integrals der Zuwachs des Imaginärteils von f entlang der Kurve somit der Zuwachs des Arguments von δ entlang der Kurve. Ist die Kurve geschlossen, so ist dies ein Vielfaches von $2\pi i$. Dies führt zur folgendem Resultat:

10.29. Satz. *Es sei γ geschlossener Weg mit Bild Γ. Für $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma=:\Omega$ setze*

(1) $$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dw}{w-z}.$$

Dann ist Ind_γ eine $\mathbb{Z}$-wertige Funktion auf Ω, die auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist; sie ist Null auf der unbeschränkten Komponente von Ω.

Man nennt $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ die Windungszahl von z bezüglich γ.

Beachte: Γ ist als stetiges Bild des kompakten Intervalls $[a,b]$ kompakt, also existiert ein $R>0$ mit $\Gamma\subseteq B(0,R)$. Da $\mathbb{C}\setminus B(0,R)$ zusammenhängend ist, liegt es in einer Zusammenhangskomponente von Ω. Daher hat Ω genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

Beweis. Dass $\mathrm{Ind}_\gamma(z)\in\mathbb{Z}$ wissen wir aus Folgerung 10.28. Nach Satz 10.23 ist Ind_γ außerdem holomorph. Das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist nach Lemma 10.5 zusammenhängend. Die einzigen zusamennhängenden Mengen in $\mathbb{Z}$ sind jedoch einzelne Punkte. Daher ist Ind_γ auf jeder Zusammenhangskomponente konstant.

Aus (1) folgt, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(z)\to 0$ für $z\to\infty$ (etwa mit dominierter Konvergenz). Also ist die Windungszahl auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente Null. $\lhd$

10.30. Lemma. *Ist γ die positiv orientierte Kreislinie um a mit Radius r, so ist*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & |z-a| < r \\ 0 & |z-a| > r \end{cases}.$$

Beweis. Wähle $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann folgt aus 10.29, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ für $|z-a| > r$ und $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a)$ für $|z-a| < r$. Wir sehen:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{a + re^{it} - a}\, dt = 1.$$

10.31. Hilfssatz. Es sei $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ und F' stetig (wir sehen später: dies ist automatisch erfüllt). Dann ist

$$\int_\gamma F'(z)\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ.

Beweis. $\int_\gamma F'(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$, da $\gamma(b) = \gamma(a)$. ◁

10.32. Folgerung. Es sei $n \in \mathbb{Z}$ und γ eine geschlossene Kurve . Für $n < 0$ sei zusätzlich $0 \notin \mathrm{Bild}\,\gamma$. Dann ist

$$\int_\gamma z^n\, dz = \begin{cases} 0; & n \ne -1 \\ 2\pi i \mathrm{Ind}_\gamma(0); & n = -1 \end{cases}.$$

Beweis. Für $n \ne -1$ ist $z^n = \left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)'$; 10.31 liefert die Behauptung. Für $n = -1$ folgt die Behauptung aus der Definition der Windungszahl. ◁

10.33. Satz. *Es sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist äquivalent:*

(i) *f hat auf Ω eine holomorphe Stammfunktion F mit $F' = f$.*

(ii) *Für jeden geschlossenen Weg γ in Ω ist $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

Beweis. Genau wie in Analysis 2. Der Vollständigkeit halber:

(i) $\Rightarrow$ (ii) 10.31.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ω ist offen und zusammenhängend, also wegzusammenhängend. Wähle $a \in \Omega$ fest. Für beliebige $z \in \Omega$ wähle einen Weg γ_z von a nach z und setze

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw.$$

Da das Integral von f über geschlossene Wege Null ist, hängt F nicht von der Wahl des Weges ab.

Wir zeigen: F ist differenzierbar mit $F' = f$. Fixiere $z_0 \in Z$. Nahe z_0 kann man $\gamma_z = \gamma_{z_0} + [z_0, z]$ wählen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(z)\, dz \\
&= \frac{1}{z - z_0}\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt\, (z - z_0) \\
&= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt \\
&\overset{z - z_0 \to 0}{\to} f(z_0)
\end{aligned}$$

mit dominierter Konvergenz. ◁