# 1. Messbarkeit und Lebesgue-Mass

Zur praktischen Berechnung von Integralen ist der von Riemann eingeführte Integralbegriff sehr gut geeignet. Er hat allerdings zwei Schwächen:

- Es gibt keine gut handhabbaren Sätze zur Vertauschung von Integral und Grenzwert. Wir haben zwar Satz 9.10 aus Analysis I, aber der erfordert die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge, und die ist oft nicht gegeben.
- In der Quantenmechanik braucht man Hilberträume integrierbarer Funktionen. Die lassen sich mit dem Riemannschen Integralbegriff nicht konstruieren.

Der Grund dafür ist, dass zu wenige Funktionen riemannintegrierbar sind. Die Lösung ist ein neuer Integralbegriff, mit dem mehr Funktionen integriert werden können.

Beim Riemann-Integral für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die zentrale Idee, das Intervall zu partitionieren $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ und Zwischensummen zu bilden

$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j1})$$

mit der Hoffnung, dass die Zwischensummen gegen einen Wert (nämlich das Integral) konvergieren, wenn die Feinheit der Partition gegen Null geht.

Die neue Idee ist, den Wertebereich zu partitionieren. Man fragt sich z.B.: Wie groß ist das Volumen ('Maß') der Urbildmenge zu dem Intervall $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$, d.h. aller Punkte $x$, für die $f(x)$ im Intervall $[y, y + \varepsilon]$ liegt. Dann summiert man entsprechend auf.

An einem einfachen Beispiel sieht man den Unterschied: Wir betrachten die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ auf $[0, 1]$. Hier konvergiert der Riemannsche Zwischensummenprozess nicht. Wenn man andererseits die Urbilder von $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ und $] - \varepsilon, \varepsilon[$ ansieht (andere sind nicht interessant), so erkennt man, dass erstere Menge nur die abzählbar vielen Punkte von $\mathbb{Q}$ enthält, letztere die von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wir werden daher sehen, dass man dieser Funktion das Integral Null zuweisen kann.

Dazu wollen wir zunächst Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ein Maß (Volumen) zuordnen. Das wichtigste Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist das sogenannte Lebesgue-Maß, und wir werden es im folgenden konstruieren. Gerade für Anwendungen der Physik, wo man z.B. auch Punktmassen betrachten möchte, ist es aber günstig, noch weitere Maße betrachten zu können. Daher entwickeln wir parallel die abstrakte Theorie.

**Messbarkeit.**

**1.1. Definition.** Es sei $X$ eine Menge. Eine Familie $\mathcal{R}$ von Teilmengen von $X$ heißt $\sigma$-Algebra, falls gilt:

(i) $X \in \mathcal{R}$.

(ii) Mit $A$ und $B$ liegt auch $A \setminus B$ in $\mathcal{R}$.

(iii) Aus $A_j \in \mathcal{R}, j = 1, 2, \ldots$ folgt, dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$.

Beachte: Aus der de-Morgan-Identität

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j)$$

folgt dann, dass auch $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$.

In diesem Fall heißt $X$ messbarer Raum und die Elemente von $\mathcal{R}$ messbare Mengen. Ohne Eigenschaft (i) spricht man von einem $\sigma$-Ring. Gilt außerdem (iii) nur für endliche Vereinigungen, so spricht man von einem Ring.

**1.2. Definition.** Eine Mengenfunktion auf einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{R}$ (hier langt, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist) ist eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\},$$

wobei $\varphi$ weder $\equiv \infty$ noch $\equiv -\infty$ sein soll und nur einer der Werte $\pm\infty$ von $\varphi$ angenommen wird. Die Funktion $\varphi$ heißt additiv, falls

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Sie heißt abzählbar additiv (oder $\sigma$-additiv), falls

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j) \tag{1}$$

für jede Folge $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkter Mengen mit $\cup A_j \in \mathcal{R}$.

**1.3. Bemerkung.** Die linke Seite in 1.2(1) ändert sich bei Umordnung nicht. Ist daher die rechte Seite konvergent, so ist sie automatisch absolut konvergent, ist sie nicht konvergent, so divergieren die Partialsummen entweder gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$.

**1.4. Lemma.** *Ist $\varphi$ eine additive Mengenfunktion, so gilt*

(a) $\varphi(\emptyset) = 0$

(b) $\varphi(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(A_j)$ *für paarweise disjunkte Mengen $A_j$.*

(c) $\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$

(d) *Ist $\varphi(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$, so gilt*

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \varphi(A_1) \leq \varphi(A_2).$$

(e) $\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B)$ *falls $B \subseteq A$ und $|\varphi(B)| < \infty$.*

*Beweis.* Leicht. ◁

**1.5. Satz.** *Es sei $\varphi$ abzählbar additive Mengenfunktion auf dem $\sigma$-Ring $\mathcal{R}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, und*

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

*mit $A_j, A \in \mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(A_j) = \varphi(A).$$

*Beweis.* Setze $B_1 = A_1$ und $B_j = A_j \setminus A_{j-1}, j = 2, 3, \dots$ Dann gilt $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \neq j, A_n = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ und $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Folglich ist

$$\varphi(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(B_j) \quad \text{und} \quad \varphi(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_j).$$

◁

**Konstruktion des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$.** Die Konstruktion erfolgt in drei Schritten. (i) Wir definieren das Maß von Intervallen analog zum Maß von Rechtecken und Quadern. Damit erhalten wir ein Maß auf elementaren Mengen, d.h. endlichen Vereinigungen von Intervallen. (ii) Mit dessen Hilfe können wir *jeder* Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ein sog. äußeres Maß zuordnen. Das ist einerseits gut, andererseits fehlt diesem Maß die albzählbare Additivitat, die oft benötigt wird. (iii) Daher schränkt man sich auf eine kleinere Klasse von Mengen, die sog. messbaren Mengen, ein. Das sind Mengen, die Grenzwerte elementarer Mengen sind sowie deren abzählbare Vereinigungen. Auf diesen Mengen ist das äußere Maß dann albzählbar additiv.

**1.6. Definition.**

(a) Ein Intervall in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

(1) $$\{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j\}$$

mit geeigneten $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j, j = 1, \ldots, n$. Statt „$\leq$" kann stets auch „$<$" stehen. Insbesondere betrachten wir die leere Menge als Intervall.

(b) Eine Menge, die sich als endliche Vereinigung von Intervallen schreiben läßt, heißt elementar. Mit $\mathcal{E}$ bezeichnen wir die Menge der elementaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(c) Einem Intervall $I$ wie in (1) ordnen wir das Maß

$$m(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

zu – unabhängig davon, ob oder wo in (1) „$<$" oder „$\leq$" steht. Wir setzen $m$ fort auf $\mathcal{E}$: Ist $A$ die disjunkte Vereinigung der Intervalle $I_1, \ldots, I_k$, so definieren wir

(2) $$m(A) = \sum_{j=1}^{k} m(I_j).$$

**1.7. Lemma.**

(a) *Die Differenz $I_1 \setminus I_2$ und der Durchschnitt $I_1 \cap I_2$ zweier Intervalle sind in disjunkte Intervalle zerlegbar.*

(b) *Jede elementare Menge ist disjunkte Vereinigung endlich vieler Intervalle.*

(c) *$\mathcal{E}$ enthält endliche Vereinigungen, ist jedoch kein $\sigma$-Ring.*

(d) *Kann man $A \in \mathcal{E}$ auf zweierlei Weise als Vereinigung von Intervallen darstellen, so ergibt sich in 1.6(2) dennoch derselbe Wert.*

(e) *$m$ ist additiv auf $\mathcal{E}$.*

*Beweis.* Leicht bis auf (d). Hier die Details:

(a) Wegen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ brauchen wir nur Differenzen zu betrachten. Davon sollten Sie sich selbst überzeugen.

(b) Wegen $I_1 \cup I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup (I_2 \setminus I_1) \cup (I_1 \cap I_2)$ ist nach (a) jede endliche Vereinigung von Intervallen auch endliche Vereinigung disjunkter Intervalle.

(c) Ring klar (Vereinigung nach Definition, Differenz nach (a).

Wieso kein $\sigma$-Ring? Eine abzählbare Vereinigung von Intervallen lässt sich i.Allg. nicht als endliche Vereinigung von Intervallen darstellen. Konkret betrachte etwa die Folge $(0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1), (2, \ldots, 2), \ldots$ in $\mathbb{R}^n$. Dies ist eine abzählbare Vereinigung von Intervallen ($a_j^k = b_j^k = k$), die nicht als endliche Vereinigung darstellbar ist.

(d) Ist $E \in \mathcal{E}$ und sind $E = \bigcup I_j = \bigcup J_k$ zwei Zerlegungen in disjunkte Intervalle, so kann man nach (a) eine Zerlegung finden, bei der die zerlegenden Intervalle jeweils sowohl in einem der $I_j$

als auch in einem der $J_k$ enthalten sind. Damit ist nur zu zeigen, dass für ein Intervall $I$ der Wert von $m(I)$ gleich bleibt, wenn wir $I$ in Teilintervalle zerlegen. Um das zu sehen, können wir $I$ ggf. entlang sämtlicher vorkommender Intervallgrenzen weiter zerlegen: Hat $I$ die Grenzen $a$ und $b$ ($\in \mathbb{R}^n$), so finden wir für jedes $j$ Partitionen $a_j = t_{j0} < \dots t_{jk_j} = b_j$ so dass $I$ die Vereinigung der $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ Intervalle mit Grenzen an den $t_{jl}$ ist. Nun folgt die Behauptung aus dem Distributivgesetz.

(e) folgt aus der Definition. $\triangleleft$

**1.8. Definition.** Eine nicht-negative additive Mengenfunktion $\varphi$ auf $\mathcal{E}$ heißt regulär, falls folgendes gilt: Für jedes $A \in \mathcal{E}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren $F, G \in \mathcal{E}$ mit $F$ abgeschlossen, $G$ offen, $F \subseteq A \subseteq G$ und

$$\varphi(G) - \varepsilon \le \varphi(A) \le \varphi(F) + \varepsilon. \tag{1}$$

**1.9. Lemma.** *Die obige Funktion $m$ ist regulär.*

*Beweis.* Ist $A$ ein Intervall, so sind $F, G$ leicht gefunden: Hat $A$ die Grenzen $a$ und $b$, so wähle – falls $a_j < b_j$ – für kleines $\delta > 0$

$$F = \{a_j + \delta \le x_j \le b_j - \delta\} \text{ und } G = \{a_j - \delta < x_j < b_j + \delta\}.$$

Wie behilft man sich für $a_j = b_j$? $\triangleleft$

**1.10. Bemerkung.** Es gibt andere reguläre Mengenfunktionen. Die folgende Konstruktion kann man mit einem beliebigen additiven, regulären nichtnegativen $\mu$ machen, das auf $\mathcal{E}$ endlich ist. Weitere Beispiele in den Übungen.

**1.11. Das äußere Maß.** Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{E}, \text{offen} \right\}.$$

Klar: $\mu^*(E) \ge 0$ für alle $E \subseteq \mathbb{R}^n$, und $\mu^*(E_1) \le \mu^*(E_2)$ falls $E_1 \subseteq E_2$. (1)

**1.12. Satz.** *Das äußere Maß $\mu^*$ setzt $\mu$ fort, d.h. es gilt*

$$\mu^*(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{E},$$

*und es ist subadditiv :*

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j). \tag{1}$$

*Allerdings ist es nicht abzählbar additiv, daher die Konstruktion in 1.13 und 1.14.*

*Beweis.* (a) Wähle $A \in \mathcal{E}$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Regularität von $\mu$ existiert eine offene elementare Menge $G$ mit $A \subseteq G$ und $\mu(G) \le \mu(A) + \varepsilon$. Da $\mu^*(A) \le \mu^*(G) \le \mu(G)$, ergibt sich

$$\mu^*(A) \le \mu(A). \tag{2}$$

Andererseits gibt es nach Definition von $\mu^*$ eine Folge offener elementarer Mengen $\{A_j\}$, so dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Wiederum wegen der Regularität von $\mu$ existiert eine abgeschlossene elementare Menge $F$ mit $F \subseteq A$ und $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$. $F$ ist auch beschränkt, also kompakt. Da $F \subseteq A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, existieren $A_1, \ldots, A_n$ mit $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Daher ist

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + \varepsilon. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt (a), da $\varepsilon$ beliebig war.

(b) Ist $\mu^*(E_j) = +\infty$ für ein $E_j$, so ist die Aussage sicher wahr. Sei also $\mu^*(E_j) < \infty\ \forall j$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir nach Definition von $\mu^*$ elementare Mengen $\{A_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ mit

$$E_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{jk} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{jk}) \leq \mu^*(E_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{jk}$ überdeckt $E$. Folglich ist

$$\mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) + \varepsilon.$$

◁

**1.13. Definition.**

(a) Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\begin{aligned} S(A,B) &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad \text{„Symmetrische Differenz“} \\ d(A,B) &= \mu^*(S(A,B)). \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $A_j \to A$ falls $\lim_{j\to\infty} d(A_j, A) = 0$.

(c) Gibt es eine Folge elementarer Mengen $\{A_j\}$ mit $A_j \to A$, so nennen wir $A$ endlich messbar. Wir schreiben $A \in \mathcal{M}_E(\mu)$.

(d) Ist $A$ die abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen, so heißt $A$ messbar (Lebesgue-messbar, falls wir von der Mengenfunktion in 1.6 ausgehen). Schreibe $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

**1.14. Satz.** *Die Menge $\mathcal{M}(\mu)$ ist eine $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^n$, und $\mu^*$ ist abzählbar additiv auf $\mathcal{M}(\mu)$.*

*Beweis. Schritt 1: $\mathcal{M}_E(\mu)$ ist ein Ring, und $\mu^*$ ist additiv auf $\mathcal{M}_E(\mu)$.*
Es seien $A$ und $B$ endlich $\mu$-messbar. Wir wählen elementare Mengen $A_k$ und $B_k$ mit $A_k \to A$ und $B_k \to B$. Mit kleinen Überlegungen zum äußeren Maß der symmetrischen Differenz folgt

$$\begin{aligned} A_k \cup B_k &\to A \cup B && (1) \\ A_k \cap B_k &\to A \cap B && (2) \\ A_k \setminus B_k &\to A \setminus B && (3) \\ \mu^*(A_k) &\to \mu^*(A), && (4) \end{aligned}$$

und es gilt $\mu^*(A) < \infty$, da $d(A_k, A) \to 0$. (Man sieht hier: Die endlich messbaren Mengen haben endliches Maß.) Wegen (1) und (3) bildet $\mathcal{M}_E(\mu)$ einen Ring. Wir wissen aus 1.4(c), dass

$$\mu(A_k) + \mu(B_k) = \mu(A_k \cup B_k) + \mu(A_k \cap B_k).$$

Sind $A$ und $B$ disjunkt so erhalten wir wegen (4) und Satz 1.12(a) die Additivität für $k \to \infty$:

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A \cup B).$$

*Schritt 2: $\mu^*$ ist abzählbar additiv auf $\mathcal{M}(\mu)$.*
Es sei $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Dann ist $A$ eine abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen, also auch eine abzählbare Vereinigung *disjunkter* endlich messbarer Mengen: Ist nämlich $A = \cup A_j$ so setze

$B_j = (A_1 \cup \ldots \cup A_j) \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{j-1})$, $j \geq 2$, und es ist $A = \cup B_j$ (disjunkt) mit $B_j \in \mathcal{M}_E(\mu)$ nach Schritt 1. Nach Satz 1.12(b) wissen wir, dass

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j).$$

Andererseits gilt $A \supseteq B_1 \cup \ldots \cup B_j$, somit ist (nach der Bemerkung in 1.11 und wegen der Additivität von $\mu^*$ auf den endlich messbaren Mengen):

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B_1 \cup \ldots \cup B_j) = \mu^*(B_1) + \ldots + \mu^*(B_j), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Es folgt, dass

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j). \tag{5}$$

Ist nun $\mu^*(A) < \infty$, so gilt für $C_k = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, dass

$$d(A, C_k) = \mu^* \left( \bigcup_{j=k+1}^{\infty} B_j \right) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu^*(B_j) \longrightarrow 0.$$

Folglich gilt $C_k \to A$. Da $C_k$ in $\mathcal{M}_E(\mu)$ liegt, d.h. Grenzwert einer Folge elementarer Mengen ist, gilt dies auch für $A$. Also liegt auch $A$ in $\mathcal{M}_E(\mu)$. Die endlich messbaren Mengen sind also genau die messbaren Mengen mit endlichem Maß.

Nun erhalten wir rasch die abzählbare Additivität: Es sei $A \in \mathcal{M}(\mu)$ und $A = \cup A_k$ für eine Folge $(A_k)$ disjunkter Mengen in $\mathcal{M}(\mu)$. Gilt $\mu^*(A_k) < \infty$ für alle $k$, so gilt $A_k \in \mathcal{M}_E(\mu)$ für alle $k$. In diesem Fall folgt (5) (mit $B_j$ in der Rolle von $A_j$) wie oben gezeigt. Ist hingegen für ein $k$ das Maß $\mu^*(A_k)$ unendlich, so gilt (5) trivialerweise.

*Schritt 3: $\mathcal{M}(\mu)$ ist ein $\sigma$-Ring.*
Es seien $A_k \in \mathcal{M}(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$. Dann ist jedes $A_k$ eine abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen, somit auch $\cup A_k$ (abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar).

Nun seien $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$ die abzählbaren Vereinigungen der endlich messbaren Mengen $A_k$ bzw. $B_j$. Dann ist

$$A_k \cap B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_k \cap B_j),$$

und somit $A_k \cap B$ in $\mathcal{M}(\mu)$. Ferner ist $\mu^*(A_k \cap B) \leq \mu^*(A_k) < \infty$. Daher ist $A_k \cap B \in \mathcal{M}_E(\mu)$ für alle $k$, also auch $A_k \setminus B = A_k \setminus (A_k \cap B)$ nach Schritt 1. Es folgt, dass $A \setminus B = \cup(A_k \setminus B) \in \mathcal{M}(\mu)$.

Da $\mathbb{R}^n$ als abzählbare Vereinigung von Intervallen messbar ist, ist $\mathcal{M}(\mu)$ auch eine $\sigma$-Algebra. $\lhd$

**1.15. Bemerkung.**

(a) Der obige Beweis zeigt, dass $\mathcal{M}_E(\mu) = \{A \in \mathcal{M}(\mu) : \mu(A) < \infty\}$.

(b) Wie erwähnt, lässt sich die obige Konstruktion mit jeder additiven, regulären nichtnegativen Mengenfunktion $\mu$ auf $\mathbb{R}^n$ durchführen, die auf $\mathcal{E}$ endlich ist. Für $A \in \mathcal{M}(\mu)$ schreibt man einfach $\mu(A)$ statt $\mu^*(A)$. Man hat also die Abbildung $\mu$ von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{M}(\mu)$ fortgesetzt.

**1.16. Definition.** Eine Menge $X$ heißt Maßraum, falls zu $X$ eine $\sigma$-Algebra $\mathcal{M}$ von Teilmengen von $X$ existiert und eine $\sigma$-additive nichtnegative Mengenfunktion $\mu$, die auf $\mathcal{M}$ definiert ist. Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen dann messbare Mengen. Man schreibt $\mathcal{M}(\mu)$, wenn man das Maß betonen möchte.

Geht man speziell von der in 1.6 definierten Funktion $m$ aus, so nennt man die Mengen in $\mathcal{M}(m)$ die Lebesgue-messbaren Mengen und $m$ das Lebesgue-Maß.

Frage: Welche Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind Lebesgue-messbar? Erste Antwort:

**1.17. Lemma.**

(a) *Jede offene Menge ist messbar.*

(b) *Jede abgeschlossene Menge ist messbar.*

(c) *Jede Menge, die sich aus offenen Mengen durch die Operationen "Vereinigung", "Durchschnitt", "Komplement" darstellen lässt, ist messbar. Dabei kann man abzählbar viele Vereinigungen bzw. Durchschnitte bilden.*

*Beweis.* (a) Jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist abzählbare Vereinigung offener Intervalle (wieso?) und daher messbar.

(b) Als Komplement einer offenen Menge ist eine abgeschlossene Menge messbar.

(c) Dies gilt, weil die offenen Mengen zu $\mathcal{M}(\mu)$ gehören und $\mathcal{M}(\mu)$ als $\sigma$-Ring unter den angegebenen Operationen abgeschlossen ist. $\lhd$

**1.18. Borel-Mengen.** Die aus 1.17(c) resultierenden Mengen nennt man die Borel-Mengen. Etwas präziser definiert man die Familie der Borel-Mengen als die kleinste $\sigma$-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.

Unabhängig davon, von welcher Mengenfunktion wir ausgegangen sind, sind die Borel-Mengen messbar. Im Allgemeinen bilden sie jedoch eine echte Teilmenge von $\mathcal{M}(\mu)$.

**1.19. Lemma.** *Es sei $A \in \mathcal{M}(\mu)$ und $\varepsilon > 0$.*

(a) *Es existieren eine offene Menge $G$ und eine abgeschlossene Menge $F$ mit*

$$F \subseteq A \subseteq G; \quad \mu(G \setminus A) < \varepsilon; \quad \mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

(b) *Es existieren Borel-Mengen $\tilde{G}$ und $\tilde{F}$ mit*

$$\tilde{F} \subseteq A \subseteq \tilde{G}; \quad \mu(\tilde{G} \setminus A) = 0 = \mu(A \setminus \tilde{F}).$$

*Jede messbare Menge stimmt daher bis auf eine Menge, deren Maß Null ist, mit einer Borelmenge überein.*

*Beweis.* (a) Nach Definition von $\mu^*$ (vgl. 1.11) existiert eine offene Menge $G$ mit $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. Da beide Mengen messbar sind, können wir statt $\mu^*$ auch $\mu$ schreiben. Ebenso existiert zu $\mathbb{R}^n \setminus A$ eine offene Menge $G'$ mit $(\mathbb{R}^n \setminus A) \subseteq G'$ und $\mu^*(G' \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) < \varepsilon$. Mit $F = \mathbb{R}^n \setminus G'$ ergibt sich die Behauptung.

(b) folgt aus (a), indem wir $\varepsilon = 1/j$ wählen, $F_j$ und $G_j$ wie in (a) bestimmen und $F = \cup F_j$, $G = \cap G_j$ setzen. $\lhd$

**1.20. Bemerkung.** Messbarkeit ist eine sehr schwache Eigenschaft. Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die nicht Lebesgue-messbar sind. Man muss allerdings das Auswahlaxiom bemühen, um sie zu konstruieren. Mehr dazu in der Übung.

**1.21. Definition.** Eine Menge $N$ mit $\mu^*(N) = 0$ heißt Nullmenge.

**1.22. Lemma.**

(a) *Jede Nullmenge ist endlich messbar und hat Maß 0.*

(b) *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*

(c) *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.*

*Speziell für das Lebesgue-Maß gilt ferner:*

(d) *Ein einzelner Punkt ist eine Nullmenge; somit sind auch alle abzählbaren Mengen Nullmengen.*

(e) *Es sei $k \in \{1, \dots, n\}$, $c \in \mathbb{R}$, und $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = c\}$. Dann ist $U$ eine Nullmenge.*

*Beweis.* (a) Wir betrachten die Folge $(E_j)$ von elementaren Mengen (sogar Intervallen), die durch $E_j = \emptyset$ für alle $j$ definiert ist. Dann gilt $d(N, E_j) = 0$. Somit ist $N$ endlich messbar, und *per def.* ist $\mu(N) = \mu^*(N) = 0$.

(b) Folgt aus abzählbarer Additivität.

(c) Sei $E \subseteq N, N$ Nullmenge. Dann ist $0 \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(N) = 0$.

(d) Klar: $\{x\}$ ist sogar Intervall mit Maß 0.

(e) $U$ ist abzählbare Vereinigung von Intervallen vom Maß 0. $\triangleleft$

**1.23. Bemerkung.** Es gibt auch in $\mathbb{R}$ überabzählbare Nullmengen, z.B. die Cantormenge. Mehr dazu in der Übung.