8. Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Im Folgenden sei H ein komplexer Hilbertraum.

8.1. Definition.

(a) $\mathcal{O}$ sei das System der offenen Mengen in $\mathbb{R}^k$. $\mathcal{B}$ sei der kleinste σ-Ring, der $\mathcal{O}$ enthält (vgl. §21 in Analysis 3). Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen Borelmengen.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ heißt Borel-messbar oder Borel-Funktion, falls für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) < a\}$$

Borel-messbar ist. Komplexwertige Funktionen sind bekanntlich Borel-messbar, falls Real- und Imaginärteil Borel-messbar sind.

(c) Ein komplexes Borelmaß ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ mit

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \tag{1}$$

für jede Zerlegung $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ von E in paarweise disjunkte Mengen $E_j \in \mathcal{B}$. Dabei soll die rechte Seite absolut konvergieren.

Beispiel: $f \in L^1$ definiert das komplexe Borel-Maß $\mu(E) = \int_E f(x)\, dx$.

(d) Nicht jedes reelle Maß ist auch ein komplexes, da reelle Maße auch den Wert ∞ annehmen können.

Zur Unterscheidung bezeichnet man die üblichen Maße manchmal als positive Maße.

(e) Die totale Variation $|\mu|$ von μ ist das positive Maß, das durch

$$|\mu|(E) = \sup \sum |\mu(E_j)|, \qquad E = \bigcup E_j \text{ disjunkt}, \ E_j \in \mathcal{B}$$

definiert ist. (Man kann zeigen, dass $|\mu|$ sogar ein endliches reguläres Borel-Maß ist). Mehr Details zu komplexen Maßen in Rudin, Real and Complex Analysis, Chapter 6.

8.2. Definition. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen und $\mathcal{B}_\Omega = \{B \cap \Omega : B \in \mathcal{B}\}$ die Familie der Borelmengen in Ω. Ein Spektralmaß (oder eine hilbertraumwertige Zerlegung der Eins) auf Ω ist eine Abbildung

$$E : \mathcal{B}_\Omega \to \mathcal{L}(H)$$

mit folgenden Eigenschaften

(1) $E(\emptyset) = 0, E(\Omega) = I$.

(2) $E(\omega)$ ist orthogonale Projektion für jedes $\omega \in \mathcal{B}_\Omega$ (d.h. $E(\omega) = E(\omega)^2 = E(\omega)^*$).

(3) $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1)E(\omega_2)$.

(4) Ist $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, so ist $E(\omega_1 \cup \omega_2) = E(\omega_1) + E(\omega_2)$.

(5) Für alle $x, y \in H$ ist durch

$$E_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y\rangle$$

ein komplexes Borelmaß definiert. (Insbesondere ist dann $E_{x,x}$ ein positives Borel-Maß).

8.3. Lemma. *Es sei E wie in 8.2.*

(a) $E_{x,x}(\omega) = \|E(\omega)x\|^2$.

(b) $E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$.

(c) $E(\omega_1)E(\omega_2) = E(\omega_2)E(\omega_1)$.

(d) *Ist $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, so ist* $\operatorname{Bild} E(\omega_1) \perp \operatorname{Bild} E(\omega_2)$.

(e) *Ist (ω_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$, so gilt*

$$\begin{aligned} \langle E(\omega)x, y\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(\omega_n)x, y\rangle, \quad x, y \in H \text{ und} \\ E(\omega)x &= \sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x. \end{aligned}$$

(f) *E ist im allgemeinen nicht abzählbar additiv.*

Beweis. (a) $\langle E(\omega)x, x\rangle = \langle E^2(\omega)x, x\rangle = \langle E(\omega)x, E(\omega)x\rangle$.
(b) folgt aus $E(\Omega) = I$.
(c) folgt aus Eigenschaft (3).
(d) $\langle E(\omega_1)x, E(\omega_2)y\rangle = \langle x, E(\omega_1)E(\omega_2)y\rangle \overset{(3)}{=} \langle x, E(\emptyset)y\rangle \overset{(1)}{=} 0$, falls $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$.
(e) Nach (d) sind $E(\omega_j)x =: x_j$ paarweise orthogonal. Nach Eigenschaft (5) gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} E_{x,y}(\omega_j) = E_{x,y}(\omega) \\ \Rightarrow\ & \sum_{j=1}^{\infty} \langle E(\omega_j)x, y\rangle = \langle E(\omega)x, y\rangle \ \forall\ y \\ \Rightarrow\ & \Big(\sum_{j=1}^{n} E(\omega_j)x\Big)_n \text{ schwach konvergent gegen } E(\omega)x \end{aligned}$$

Wir zeigen nun mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass $(\sum_{j=0}^{n} E(\omega_j)x)_n$ gegen $E(\omega)x$ konvergiert: Dazu definiere $\Lambda_n \in H^*$ durch $\Lambda_n y = \langle y, \sum_1^n E(\omega_j)x\rangle$. Dann ist Λ_n schwach beschränkt, also ist nach Banach-Steinhaus $\|\Lambda_n\|$ beschränkt. Nun ist wegen der paarweisen Orthogonalität

$$\|\Lambda_n\|^2 = \|E(\omega_1)x + \ldots + E(\omega_n)x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|E(\omega_j)x\|^2,$$

also ist $\sum \|E(\omega_j)\|^2 < \infty$. Daher ist für $m < n$ auch

$$\|E(\omega_m)x + \ldots + E(\omega_n)x\|^2 = \|E(\omega_m)x\|^2 + \ldots + \|E(\omega_n)x\|^2.$$

Also ist $\sum E(\omega_j)x$ eine Cauchy-Folge in H und somit konvergent. Ihr Grenzwert stimmt notwendigerweise mit dem schwachen Grenzwert überein.
(f) Die Reihe $\sum E(\omega_j)$ konvergiert nur dann in $\mathcal{L}(H)$, wenn $E(\omega_j)$ eine Nullfolge ist. Da jede Projektion $\neq 0$ die Norm 1 hat, konvergiert die Reihe nur, wenn sie eine endliche Summe ist. $\lhd$

8.4. Bemerkung. Die Aussage von 8.3, insbesondere 8.3(e) formuliert man oft so, dass die Abbildung $\omega \mapsto E(\omega)x$ ein abzählbar additives H-wertiges Maß auf $\mathcal{B}_\Omega$ definiert.

8.5. Lemma. *Das Variationsmaß zu $E_{x,y}$ ist endlich.*

Beweis. Es ist für jede Zerlegung $\Omega = \bigcup \omega_j$ von Ω

$$|E_{x,y}(\omega_j)| = \langle E(\omega_j)x, E(\omega_j)y\rangle \leq \|E(\omega_j)x\|\|E(\omega_j)y\|$$

und deshalb

$$\begin{aligned}\sum_j |E_{x,y}(\omega_j)| &\le \sum_j \|E(\omega_j)x\|\|E(\omega_j)y\| \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \Big(\sum_j \|E(\omega_j)x\|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_j \|E(\omega_j)y\|^2\Big)^{1/2} \\ &\overset{8.3(\mathrm{d})}{=} \|\sum_j E(\omega_j)x\|\|\sum_j E(\omega_j)y\| \overset{8.3(\mathrm{e})}{=} \|E(\Omega)x\|\|E(\Omega)y\| = \|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

Somit ist

$$|E_{x,y}|(\Omega) = \sup \sum |E_{x,y}(\omega_j)| \le \|x\|\|y\|.$$

$\triangleleft$

8.6. Die Algebra $L^\infty(\Omega)$. Wir nennen eine komplexwertige Funktion wesentlich beschränkt, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $|f(x)| \le C$ f.ü.. Wir schreiben

$$\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \le C \text{ f.ü.}\}.$$

Weil $\{x : |f(x)| > C\} = \bigcup_k \{x : |f(x)| > C + 1/k\}$ ist, gilt dann sogar $|f(x)| \le C$ f.ü..
Mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnet man die Menge aller wesentlich beschränkten, bzgl. E Borel-messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$. (Wie üblich unterscheiden wir nicht zwischen zwei Funktionen, wenn sie sich lediglich auf einer Nullmenge unterscheiden, betrachten also eigentlich Äquivalenzklassen).
Man sieht leicht: $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ ist eine Banachalgebra.

8.7. Satz. *Es sei E ein Spektralmaß.*

(a) *Die Formel*

(1)
$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y}, \quad x, y \in H,$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus Ψ von der Banachalgebra $L^\infty(\Omega)$ auf eine abgeschlossene $*$-invariante Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$. Dabei gilt:

(2)
$$\Psi(\overline{f}) = \Psi(f)^*, \quad f \in L^\infty(\Omega)$$

und

(3)
$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x}, \quad x \in H, f \in L^\infty(\Omega).$$

(b) *Ein Operator $Q \in \mathcal{L}(H)$ vertauscht mit jedem $E(\omega)$ genau dann, wenn Q mit jedem $\Psi(f)$ vertauscht.*

Bemerkung: (1) schreibt man oft in der Form:

$$\Psi(f) = \int_\Omega f dE.$$

Beweis. Zunächst sei s eine einfache Funktion, d.h. es sei $\Omega = \omega_1 \cup \ldots \cup \omega_n$ eine Zerlegung und $s = \sum_j \alpha_j \chi_{\omega_j}$ mit den charakteristischen Funktionen χ_{ω_j} von ω_j und $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir

(4)
$$\Psi(s) = \sum_{j=1}^n \alpha_j E(\omega_j).$$

Da alle $E(\omega_j)$ selbstadjungiert sind, ist

$$\Psi(s)^* = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha}_j E(\omega_j) = \Psi(\overline{s}).$$

Ist $\omega'_1, \dots, \omega'_m$ eine weitere Zerlegung von Ω, und ist $t = \sum_{k=1}^m \beta_k \omega'_k$ eine weitere einfache Funktion, so ist

$$\Psi(s)\Psi(t) = \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k E(\omega_j)E(\omega'_k) \overset{8.2(3)}{=} \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k E(\omega_j \cap \omega'_k).$$

Da auch st eine einfache Funktion ist, die auf $\omega_j \cap \omega'_k$ den Wert $\alpha_j \beta_k$ annimmt, folgt

$$\Psi(s)\Psi(t) = \Psi(st).$$

Analog zeigt man, dass

$$\Psi(\lambda s + \mu t) = \lambda \Psi(s) + \mu \Psi(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Für $x, y \in H$ folgt aus (4):

$$(5) \qquad \langle \Psi(s)x, y\rangle = \sum_j \alpha_j \ \langle E(\omega_j)x, y\rangle = \sum_j \alpha_j \ E_{x,y}(\omega_j) = \int_\Omega s \, dE_{x,y}.$$

Aus den obigen Identitäten schließen wir ferner

$$\Psi^*(s)\Psi(s) = \Psi(\overline{s})\Psi(s) = \Psi(\overline{s}s) = \Psi(|s|^2).$$

Somit ist

$$\|\Psi(s)x\|^2 = \langle \Psi(s)^*\Psi(s)x, x\rangle = \langle \Psi(|s|^2)x, x\rangle = \int_\Omega |s|^2 \, dE_{x,x}.$$

Da nach 8.3(b) gilt $|E_{x,x}(\Omega)| = \|x\|^2$, schließen wir

$$\|\Psi(s)x\| \le \|s\|_\infty \|x\|.$$

Ist andererseits $x \in \operatorname{Bild} E(\omega_j)$, so ist wegen der paarweisen Orthogonalität $E(\omega_k)x = 0$ für alle $k \neq j$, also

$$\Psi(s)x = \alpha_j E(\omega_j) = \alpha_j x.$$

Wählen wir j so, dass $|\alpha_j| = \|s\|_\infty$, so erhalten wir

$$(6) \qquad \|\Psi(s)\| = \|s\|_\infty.$$

Ist nun $f \in L^\infty$ beliebig, so wählen wir eine Folge (s_k) einfacher messbarer Funktionen s_k, die gegen f in $L^\infty(\Omega)$ konvergiert. Nach (6) bilden die Operatoren $\Psi(s_k)$ eine Cauchyfolge, die in $\mathcal{L}(H)$ einen Grenzwert hat, den wir mit $\Psi(f)$ bezeichnen. Aus (6) folgt einerseits, dass der Grenzwert nicht von der Wahl der Folge s_k abhängt, andererseits, dass

$$\|\Psi(f)\| = \|f\|_\infty, \quad f \in L^\infty(\Omega).$$

Ebenso folgt nun aus (5) Identität (1), indem man f durch s_k nähert (da alle $E_{x,y}$ endliche Maße sind, zieht die L^∞-Konvergenz die L^2-Konvergenz nach sich. Ebenso erhalten wir die Linearität und Multiplikativität von Ψ sowie (2) aus den entsprechenden Gleichungen für einfach messbare Funktionen.

Inbesondere erhalten wir, dass Ψ eine Isometrie von L^∞ auf $\operatorname{Bild}\Psi$ ist, wobei letzteres (wegen Linearität und Multiplikativität) eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$ ist. Da $L^\infty(\Omega)$ vollständig ist, ist diese Algebra abgeschlossen.

(b) Ist Q mit jedem $E(\omega)$ vertauschbar, so auch mit $\Psi(s)$ für jede einfach messbare Funktion, somit auch mit $\Psi(f)$ für jedes $f \in L^\infty(\Omega)$. Die Umkehrung ergibt sich, indem man die charakteristische Funktion von ω betrachtet. $\lhd$

8.8. Lemma. *Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Wir setzen*

$$\mathcal{D}_f := \left\{ x \in H : \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x} < \infty \right\}.$$

Dann gilt

(a) *$\mathcal{D}_f$ ist dichter Unterraum von H.*

(b) *Für $x, y \in H$ ist*

$$\int_\Omega |f|\, d|E_{x,y}| \le \|y\| \left\{ \int_\Omega |f|^2\, dE_{x,x} \right\}^{1/2}.$$

(c) *Ist f beschränkt und $w = \Psi(f)z$, so ist*

$$\int_\Omega g\, dE_{x,w} = \int_\Omega g\overline{f}\, dE_{x,z}, \quad g \in L^\infty(\Omega).$$

Beweis. (a) Es sei $\omega \in \mathcal{B}_\Omega, x, y \in \mathcal{D}_f, z = x + y$. Dann ist

$$\|E(\omega)z\|^2 \le (\|E(\omega)x\| + \|E(\omega)y\|)^2 \le 2(\|E(\omega)x\|^2 + \|E(\omega)y\|^2)$$

somit (weil $E_{x,x}(\omega) = \langle E(\omega)x, x\rangle = \langle E(\omega)x, E(\omega)x\rangle$)

$$E_{z,z}(\omega) \le 2E_{x,x}(\omega) + 2E_{y,y}(\omega).$$

Es folgt, dass $x + y \in \mathcal{D}_f$. Analog: $\alpha x \in \mathcal{D}_f$ für $\alpha \in \mathbb{C}$. Also ist $\mathcal{D}_f$ Unterraum von H.
Nun zur Dichtheit von $\mathcal{D}_f$. Wir setzen $\omega_n = \{t \in \Omega : |f(t)| < n\}$. Ist $x \in \operatorname{Bild} E(\omega_n)$, so ist

$$E(\omega)x = E(\omega)E(\omega_n)x = E(\omega \cap \omega_n)x,$$

so dass

$$E_{x,x}(\omega) = E_{x,x}(\omega \cap \omega_n)$$

und daher

$$\int_\Omega |f|^2\, dE_{x,x} = \int_{\omega_n} |f|^2\, dE_{x,x} \le n^2 E_{x,x}(\Omega) = n^2\|x\|^2.$$

Somit ist $\operatorname{Bild} E(\omega_n) \subseteq \mathcal{D}_f$. Nun ist $\Omega = \bigcup_1^\infty \omega_n$ und für beliebiges $y \in H$ die Abbildung $\omega \mapsto E(\omega)y$ abzählbar additiv. Es folgt

$$y = E(\Omega)y = \lim E(\omega_n)y.$$

Damit liegt y im Abschluss von $\mathcal{D}_f$.
(b) Es seien $x, y \in H$ und $0 \ne f = \sum_j \alpha_j \chi_{\omega_j}$ eine einfache messbare Funktion; $\alpha_j \ne 0$. O.B.d.A. sei $|E_{x,y}|(\Omega) > 0$; sonst ist nichts zu zeigen. Nach Definition des Variationsmaßes können wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die ω_j so in Teilmengen ω_{jk} zerlegen, dass

(1) $$\Big||E_{x,y}|(\omega_j) - \sum_k |E_{x,y}(\omega_{jk})|\Big| \le \varepsilon\, \frac{|E_{x,y}|(\omega_j)}{|E_{x,y}|(\Omega)\|f\|_\infty}.$$

Beachte, dass $|E_{x,y}|(\Omega)$ nach Satz 8.7 endlich ist, und dass auch die linke Seite Null ist, wenn $|E_{x,y}|(\omega_j)$ Null ist. Setze

$$u = \sum_{jk} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j} \frac{|E_{x,y}(\omega_{jk})|}{E_{x,y}(\omega_{jk})} \chi_{\omega_{jk}}$$

(wir verstehen den Quotienten $\frac{|E_{x,y}(\omega_{jk})|}{E_{x,y}(\omega_{jk})}$ als $= 1$, wenn $E_{x,y}(\omega_{jk}) = 0$). Dann ist $|u| = 1$ und

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |f|\, d|E_{x,y}| - \int_\Omega uf\, dE_{x,y}\right| &= \left|\sum_j |\alpha_j||E_{x,y}|(\omega_j) - \sum_{jk} |\alpha_j||E_{x,y}(\omega_{jk})|\right| \\ \le \sum_j |\alpha_j| \,\Big||E_{x,y}|(\omega_j) - \sum_k |E_{x,y}(\omega_{jk})|\Big| &\overset{(1)}{\le} \|f\|_\infty \sum_j \varepsilon\, \frac{|E_{x,y}|(\omega_j)}{|E_{x,y}|(\Omega)\|f\|_\infty} \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\int uf\, dE_{x,y} = \langle \Psi(uf)x, y\rangle \le \|\Psi(uf)x\|\|y\|$$

und, nach Satz 8.7,

$$\|\Psi(uf)x\|^2 = \int_\Omega |uf|^2 dE_{x,x} = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x}.$$

Da ε beliebig war, schließen wir, dass

$$\int_\Omega |f| d|E_{x,y}| \le \left(\int |f|^2 dE_{x,y} \right)^{1/2} \|y\|$$

für einfaches f. Im allgemeinen Fall approximieren wir $|f|$ durch einfache Funktionen.
(c) Beachte, dass f und g beschränkt sind. Es ist

$$\int_\Omega g\, dE_{x,w} = \langle \Psi(g)x, w\rangle = \langle \Psi(g)x, \Psi(f)z\rangle = \langle \Psi(\overline{f})\Psi(g)x, z\rangle = \langle \Psi(\overline{f}g)x, z\rangle = \int_\Omega g\overline{f}\, dE_{x,z}.$$

$\lhd$

8.9. Satz. *Es sei E ein Spektralmaß auf Ω.*

(a) *Zu jedem Borel-messbaren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ existiert ein dicht definierter abgeschlossener Operator $\Psi(f)$ mit Definitionsbereich*

$$\mathcal{D}(\Psi(f)) = \mathcal{D}_f,$$

gegeben durch

(1)
$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f\, dE_{x,y} \quad x \in \mathcal{D}_f, y \in H.$$

Es gilt

(2)
$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2\, dE_{x,x} \quad x \in \mathcal{D}_f.$$

(b) *Sind f, g Borel-messbar, so ist*

$$\Psi(f)\Psi(g) \subset \Psi(fg) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}.$$

Folglich ist

$$\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{D}_{fg} \subseteq \mathcal{D}_g.$$

(c) *Für jedes Borel-messbare $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt*

$$\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f})$$

und

$$\Psi(f)\Psi(f)^* = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)^*\Psi(f).$$

Beweis. (a) Ist $x \in \mathcal{D}_f$, so ist die Abbildung $y \mapsto \int_\Omega f\, dE_{x,y}$ eine konjugiert-lineare Abbildung $H \to \mathbb{C}$ mit Norm $\le (\int |f|^2\, dE_{x,x})^{1/2}$ nach 8.8.
Folglich gibt es analog zu 4.9 [2] genau ein Element $\Psi(f)x \in H$ mit Eigenschaft (1) und

(3)
$$\|\Psi(f)x\|^2 \le \int_\Omega |f|^2\, dE_{x,x}.$$

Die Abbildung $x \mapsto \Psi(f)x$ ist linear, da $E_{x,y}$ linear in x ist.
Um zu sehen, dass in (3) Gleichheit gilt, setzen wir $f_n = f\varphi_n$, wobei $\varphi_n(x) = 1$, falls $|f(x)| \le n$ und 0 sonst. Da f_n beschränkt ist, ist $\mathcal{D}_{f-f_n} = \mathcal{D}_f$. Aus (3) folgt dann mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\|\Psi(f)x - \Psi(f_n)x\|^2 \le \int_\Omega |f - f_n|^2 dE_{x,x} \to 0, \quad n \to \infty,\; x \in \mathcal{D}_f.$$

[2] *Genauer:* Es sei $\Lambda : H \to \mathbb{C}$ konjugiert linear, d.h. $\Lambda(x + cy) = \Lambda(x) + \overline{c}\Lambda(y)$, und stetig. Dann existiert ein $y \in H$ mit $\Lambda(x) = \langle y, x\rangle$. Es ist notwendig eindeutig. Zur Existenz: Für $\Lambda = 0$ wähle $y = 0$. Ansonsten ist die Menge $\mathcal{N} = \{x \in H : \Lambda(x) = 0\}$ ein echter abgeschlossener Unterraum von H. Also existiert ein $z \ne 0$ mit $z \perp \mathcal{N}$. Da $\Lambda(\overline{\Lambda(x)}z - \overline{\Lambda(z)}x) = 0$ ist, gilt $\overline{\Lambda(x)}\langle z, z\rangle - \overline{\Lambda(z)}\langle x, z\rangle = 0$. Das liefert die Behauptung.

Nun gilt (2) für f_n nach Satz 8.7. Wir erhalten (2) daher auch für f. Die Abgeschlossenheit erhalten wir aus der noch zu beweisenden ersten Identität in (c), denn damit ist

$$\Psi(f) = \Psi(\overline{f})^*$$

als adjungierter Operator automatisch abgeschlossen.
(b) Zunächst sei f beschränkt, so dass $\mathcal{D}_{fg} \subseteq \mathcal{D}_g$. Ist $z \in H$ und $w = \Psi(\overline{f})z$, so wissen wir aus Satz 8.7(2) und Lemma 8.8(c), dass

$$\begin{aligned} \langle \Psi(f)\Psi(g)x, z\rangle &= \langle \Psi(g)x, \Psi(\overline{f})z\rangle = \langle \Psi(g)x, w\rangle = \\ &= \int_\Omega g\, dE_{x,w} = \int_\Omega fg\, dE_{x,z} = \langle \Psi(fg)x, z\rangle. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(fg)x, \quad x \in \mathcal{D}_g, f \in L^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Ist $y = \Psi(g)x$, so folgt aus (4) und (2), dass für $x \in \mathcal{D}_g, f \in L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega |f|^2\, dE_{y,y} \overset{(2)}{=} \|\Psi(f)y\|^2 = \|\Psi(f)\Psi(g)x\|^2 \overset{(4)}{=} \|\Psi(fg)x\|^2 = \int_\Omega |fg|^2\, dE_{x,x}.$$

Durch Approximation erhalten wir die obige Gleichung für beliebiges (evtl. unbeschränktes) f. Nun besteht $\mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g))$ aus allen $x \in \mathcal{D}_g$, für die $\Psi(g)x \in \mathcal{D}_f$ gilt. Aus der Gleichheit folgt, dass $y = \Psi(g)x \in \mathcal{D}_f$ genau dann, wenn $x \in \mathcal{D}_{fg}$, somit, dass

$$\mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}.$$

Ist $x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}$ und $y = \Psi(g)x$, und sind f_n wie oben definiert, so ist

$$\Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(f)y = \lim \Psi(f_n)y = \lim \Psi(f_n g)x = \Psi(fg)x.$$

Damit folgt die erste Aussage in (b). Die zweite ergibt sich sofort, weil $\mathcal{D}(\Psi(fg)) = \mathcal{D}_{fg}$.
(c) Nun sei $x \in \mathcal{D}_f$ und $y \in \mathcal{D}_{\overline{f}} = \mathcal{D}_f$. Wir schließen aus Satz 8.7, dass (f_n wie oben)

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \lim\langle \Psi(f_n)x, y\rangle = \lim\langle x, \Psi(\overline{f}_n)y\rangle = \langle x, \Psi(\overline{f})y\rangle.$$

Damit ist $y \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$, also

$$\Psi(\overline{f}) \subseteq \Psi(f)^*.$$

Um Gleichheit zu zeigen, wählen wir $z \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$ und φ_n wie oben. Wir setzen $w = \Psi(f)^*z$. Dann ist

$$\Psi(f_n) = \Psi(f)\Psi(\varphi_n).$$

Da $\Psi(\varphi_n)$ als beschränkter Operator selbstadjungiert ist, schließen wir aus 8.7 und 7.15, dass

$$\Psi(\varphi_n)\Psi(f)^* \subseteq (\Psi(f)\Psi(\varphi_n))^* = \Psi(f_n)^* = \Psi(\overline{f}_n).$$

Also ist

$$\Psi(\varphi_n)w = \Psi(\overline{f}_n)z.$$

Da $|\varphi_n| \le 1$ ist, folgt aus (2)

$$\int_\Omega |f_n|^2 dE_{z,z} = \int_\Omega |\varphi_n|^2 dE_{w,w} \le E_{w,w}(\Omega)$$

Also ist $z \in \mathcal{D}_f$.
Die zweite Identität in (c) erhalten wir aus der Multiplikativität in (b), weil $\mathcal{D}_{f\overline{f}} \subset \mathcal{D}_f$. ◁

8.10. Bemerkung. Ist g beschränkt, so ist $\mathcal{D}_g = H$, also $\mathcal{D}_{fg} \subseteq \mathcal{D}_g$ und

$$\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg).$$

Ferner

$$\Psi(g)\Psi(f) \subset \Psi(f)\Psi(g). \tag{1}$$

8.11. Satz. *In der Situation von Satz 8.9 gilt*

$$\mathcal{D}_f = H \;\Leftrightarrow\; f \text{ beschränkt.}$$

Beweis. Zunächst sei $\mathcal{D}_f = H$. Da $\Psi(f)$ ein abgeschlossener Operator ist, zeigt der Graphensatz, dass $\Psi(f) \in \mathcal{L}(H)$. Ist $f_n = f\varphi_n$ definiert wie im Beweis von 8.9(a), so schließen wir

$$\|f_n\|_\infty = \|\Psi(f_n)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\Psi(f)\Psi(\varphi_n)\|_{\mathcal{L}(H)} \le \|\Psi(f)\|_{\mathcal{L}(H)},$$

da $\|\Psi(\varphi_n)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\varphi_n\|_\infty \le 1$. Es folgt, dass $f \in L^\infty$. Ist umgekehrt $f \in L^\infty$, so ist per Definition $\mathcal{D}_f = H$ (weil E endliches Maß). $\lhd$

8.12. Definition. Das *wesentliche Bild* einer Borel-messbaren Funktion f auf Ω ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge A von $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x) \in A$ für fast alle $x \in \Omega$. Anders gesagt: $\mathbb{C} \setminus A$ ist die Vereinigung V über alle offenen $U \subseteq \mathbb{C}$, so dass $E(f^{-1}(U)) = 0$. Da V abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln U_j ist, ist für alle $x \in H$ (mit $W_1 = U_1$, $W_j = U_j \setminus \cup_{k<j} U_k$:

$$\begin{aligned}\|E(f^{-1}V)x\| &= \|E(f^{-1}(\cup U_j))x\| = \|E(f^{-1}(\cup W_j))x\| \overset{8.3(e)}{=} \sum \|E(f^{-1}(W_j))x\| \\ &\overset{8.2(4)}{\le} \sum \|E(f^{-1}(U_j))x\| = 0,\end{aligned}$$

also $E(f^{-1}(V)) = 0$.

8.13. Satz. *Es sei E ein Spektralmaß auf Ω, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und $\omega_\alpha = \{t \in \Omega : f(t) = \alpha\}$. Dann gilt:*

(a) *Ist α im wesentlichen Bild von f und $E(\omega_\alpha) \neq 0$, so ist $\Psi(f) - \alpha I$ nicht injektiv, d. h. α ist Eigenwert.*

(b) *Ist α im wesentlichen Bild von f, aber $E(\omega_\alpha) = 0$, so ist $\Psi(f) - \alpha I$ injektiv mit dichtem Bild, aber nicht surjektiv (als Abbildung $\mathcal{D}_f \to H$). Es gibt jedoch eine Folge von Vektoren $x_n \in \mathcal{D}_f$ mit*

$$\lim \|\Psi(f)x_n - \alpha x_n\| = 0.$$

(c) *Das Spektrum von $\Psi(f)$ ist gerade das wesentliche Bild von f.*

Bemerkung zu (b). *Wir können $(\Psi(f)-\alpha I)^{-1}$ als dicht definierten Operator* $\operatorname{Bild}(\Psi(f)-\alpha I) \to \mathcal{D}_f$ *definieren. Aus der Abgeschlossenheit von $\Psi(f) - \alpha I$ folgt dann die Abgeschlossenheit von $(\Psi(f) - \alpha I)^{-1}$.*

Beweis. O.B.d.A. sei $\alpha = 0$.
(a) Ist $E(\omega_0) \neq 0$, so existiert ein $x \in \operatorname{Bild}(E(\omega_0))$ mit $\|x\| = 1$. Wir bezeichnen mit χ_0 die charakteristische Funktion von $E(\omega_0)$. Nach Annahme ist $f\chi_0 = 0$. Wegen der Multiplikativität der Abbildung Ψ folgt:

$$\Psi(f)x = \Psi(f)E(\omega_0)x = \Psi(f)\Psi(\chi_0)x = \Psi(f\chi_0) = 0.$$

(b) Wir setzen

$$\omega_n = \{t \in \Omega : |f(t)| < 1/n\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Dann ist zwar $E(\omega_0) = 0$, aber $E(\omega_n) \neq 0$ (sonst wäre 0 nicht im wesentlichen Bild). Wählen wir $x_n \in \operatorname{Bild} E(\omega_n)$ mit $\|x_n\| = 1$ und bezeichnen wir mit χ_n die charakteristische Funktion von ω_n, so schließen wir wie oben, dass

$$\|\Psi(f)x_n\| = \|\Psi(f)E(\omega_n)x_n\| = \|\Psi(f\chi_n)x_n\| = \|f\chi_n\|_\infty \le \frac{1}{n}.$$

Daher gilt $\Psi(f)x_n \to 0$ obwohl $\|x_n\| = 1$; somit kann $\Psi(f)$ nicht invertierbar sein.
Ist andererseits $\Psi(f)x = 0$ für ein $x \in \mathcal{D}_f$, so gilt

$$0 = \langle \Psi(f)x, x\rangle = \int_\Omega |f|^2 \, dE_{x,x}.$$

Nun ist $E(\omega_0) = 0$. Also ist $|f|^2 > 0$ fast überall bezüglich des Maßes $E_{x,x}$. Wir schließen, dass $E_{x,x}(\Omega) = 0$. Da andererseits nach 8.3(b) gilt, dass $E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$, folgt $x = 0$ und die Injektivität von $\Psi(f)$.
Ebenso ist $\Psi(f)^* = \Psi(\overline{f})$ injektiv. Ist $y \in H$ mit $y \perp \operatorname{Bild}\Psi(f)$, so ist

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle, \quad x \in \mathcal{D}_f.$$

Daher ist $y \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$ und $\Psi(f)^*y = 0$. Wegen der Injektivität folgt $y = 0$. Somit ist $\operatorname{Bild}\Psi(f)$ dicht in H.
(c) Aus (a) und (b) folgt, dass das wesentliche Bild von f im Spektrum von $\Psi(f)$ enthalten ist. Um die umgekehrte Inklusion herzuleiten, nehmen wir an, dass 0 nicht im wesentlichen Bild von f liege. Dann ist $g = 1/f \in L^\infty(\Omega)$. Aus $fg = 1$ folgt dann

$$\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(1) = I.$$

Dann ist $\operatorname{Bild}\Psi(f) = H$. Ferner ist $\Psi(f)$ injektiv (mit dem gleichen Argument wie in (b)). $\lhd$

8.14. Definition. Man teilt das Spektrum in zwei Teile: Das Punktspektrum besteht aus denjenigen α, wo Fall (a) vorliegt; das stetige Spektrum aus allen α mit Fall (b).

Existenz des Spektralmaßes.

8.15. Satz. *Es sei $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf den Borelmengen von $\sigma(T)$, für das gilt:*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE(\lambda).$$

Erinnerung: *Dies ist die Kurzschreibweise für $\langle Tx, y\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE_{x,y}$, wobei mit λ die Funktion $\lambda \mapsto \lambda$ gemeint ist.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigt man zwei Sätze, die wir hier nicht beweisen:

8.16. Satz von Riesz. K sei ein kompakter topologischer Hausdorffraum. Dann ist der Dualraum $C(K)'$ isometrisch isomorph zum Raum $M_{\mathcal{B}}(K)$ der komplexen Borelmaße auf K unter der Abbildung

$$\varphi : M(K) \to C(K)', \quad \varphi(\mu)(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Dabei ist $M_{\mathcal{B}}(K)$ ein Banachraum bezüglich der Variationsnorm, die einem Maß μ auf K den Wert $\|\mu\| = |\mu|(K)$, d.h. das Variationsmaß von K, zuordnet.

8.17. Satz von Lax-Milgram. (vgl.Ü3Blatt 5) Es sei $B : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear und stetig. Dann existiert ein $T \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$B(x, y) = \langle Tx, y\rangle.$$

Beweis von Satz 8.15. Wir verwenden den stetigen Funktionalkalkül für beschränkte Operatoren (Satz 5.16): Zu $x, y \in H$ und $f \in C(\sigma(T))$ definiere

$$\varphi_{x,y}(f) = \langle f(T)x, y\rangle.$$

Dann ist $\varphi_{x,y} : C(\sigma(T)) \to \mathbb{C}$ linear, weil die Abbildung $f \mapsto f(T)$ linear in f ist, und stetig, weil

$$|\varphi_{x,y}(f)| \le \|f(T)\| \, \|x\| \, \|y\| = \|f\|_{\sup} \|x\| \, \|y\|. \tag{1}$$

Nach dem Satz von Riesz existiert also ein komplexes Borelmaß $\mu_{x,y}$ auf $\sigma(T)$, so dass

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,y}. \tag{2}$$

Wegen (1) ist dieses Maß endlich. Wir können also statt stetiger Funktionen auch L^∞-Funktionen einsetzen. Wir zeigen nun, dass sogar für jedes $f \in L^\infty(\sigma(T))$ die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,y}$$

sesquilinear und stetig ist.

Die Sesquilinearität folgt dabei aus (2), denn das Maß ist nach dem Satz von Riesz schon durch die Werte bei Integration stetiger Funktionen eindeutig bestimmt. Um die Stetigkeit zu sehen, bemerken wir zunächst, dass nach dem Satz von Riesz gilt $\|\mu_{x,y}\| = \|\varphi_{x,y}\|$, so dass

$$\left| \int_{\sigma(T)} f \, d\mu_{x,y} \right| \leq \|f\|_\infty \, |\mu_{x,y}|(T) \overset{def}{=} \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \overset{Riesz}{=} \|f\|_\infty \|\varphi_{x,y}\| \overset{(1)}{=} \|f\|_\infty \, \|x\| \|y\| |.$$

Folglich können wir den Satz von Lax-Milgram anwenden und erhalten zu jedem $f \in L^\infty$ einen beschränkten Operator $f(T)$. Genau wie im Beweis von Satz 8.9 zeigen wir nun, dass die Abbildung $\Psi : f \mapsto f(T)$ ein isometrischer $*$-Algebrenhomomorphismus ist.

Wir definieren nun für eine Borelmenge $\omega \subseteq \sigma(T)$

$$E(\omega) = \Psi(\chi_\omega)$$

als Bild der charakteristischen Funktion von ω. Wei Ψ ein $*$-Algebrenhomomorphismus ist, ist $E(\omega)$ eine Orthogonalprojektion, und die Anforderungen an ein Spektralmaß in 8.2(1)-(5) ergeben sich unmittelbar.

Zur Eindeutigkeit. Aus der Annahme $\Psi(\lambda) = T$ (für die Funktion $\lambda \mapsto \lambda$) folgt, dass für jedes Polynom p gilt $\Psi(p) = p(T)$. Nun liegen die Polynome dicht in $C(\sigma(T))$, also ist $\Psi(f) = f(T)$ für alle $f \in C(\sigma(T))$. Insbesondere gilt

$$\langle \Psi(f)x, y \rangle = \int f \, dE_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

Damit ist nach Riesz $E_{x,y}$ als komplexes Borelmaß eindeutig bestimmt, also auch $E(\omega)$ für jede Borelmenge ω.

8.18. Satz. *Der Spektralsatz gilt auch für normale ($TT^* = T^*T$) Operatoren $T \in \mathcal{L}(H)$: Es existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf den Borelmengen von $\sigma(T)$, für das gilt:*

$$T = \int_{\sigma(T)} t \, dE(t).$$

Beweis. Ähnlich unter Verwendung des Funktionalkalküls für normale Operatoren (den wir hier nicht behandelt haben). $\triangleleft$

8.19. Satz. *Zu jedem selbstadjungierten Operator $A : \mathcal{D}(A) \to H$ existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf $\mathbb{R}$ mit*

$$\text{(1)} \qquad \langle Ax, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_{x,y} \quad x \in \mathcal{D}(A), y \in H.$$

Das Spektralmaß E ist auf $\sigma(A)$ konzentriert, d. h. $E(\sigma(A)) = I$. Wir schreiben

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t \; dE(t).$$

Beweis. Es sei U die Cayley-Transformierte von A. Sie ist nach Satz 7.31(c) unitär, insbesondere also normal. Ihr Spektrum, $\sigma(U)$, ist eine Teilmenge von S^1. Ferner sei $\Omega = S^1 \setminus \{1\}$ und E_U das auf $\sigma(U)$ definierte Spektralmaß für U. Wir wissen aus Satz 7.31(b), dass $I - U$ injektiv ist.

Folglich ist $E_U(\{1\}) = 0$ nach Satz 8.13(a) (beachte: $\{1\} = f^{-1}\{1\}$ für die Funktion $f : t \mapsto t$). Daher genügt es, über Ω zu integrieren, und

(2)
$$\langle Ux, y\rangle = \int_\Omega \lambda \, dE_{U,x,y}(\lambda), \quad x, y \in H.$$

Für
$$f(\lambda) = i\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad \lambda \in S^1 \setminus \{1\},$$
definieren wir nun $\Psi(f)$ wie in Satz 8.9(a) mit Hilfe von E_U:
$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f \, dE_{U,x,y}, \quad x \in \mathcal{D}_f, y \in H.$$
Da f reellwertig ist, ist $\Psi(f)$ selbstadjungiert nach 8.9(c). Wegen der Multiplikativität haben wir ferner
$$\Psi(f)(I-U) = \Psi(f)\Psi(1-\lambda) = i\Psi(1+\lambda) = I + U.$$
Insbesondere ist Bild$(I-U) \subseteq \mathcal{D}(\Psi(f)$. Als Cayley-Transformierte von A erfüllt U nach Satz 7.31 die Identität
$$A(I-U) = i(I+U)$$
mit $\mathcal{D}(A) = $ Bild$(I-U) \subseteq \mathcal{D}(\Psi(f)$. Folglich ist $\Psi(f)$ nicht nur selbstadjungiert, sondern wegen der Injektivität von $I-U$ auch eine Fortsetzung von A. Als selbstadjungierter Operator hat jedoch A keine echte Fortsetzung, vgl. Satz 7.23. Daher ist $A = \Psi(f)$ und

(3)
$$\langle Ax, y\rangle = \int_\Omega f \, dE_{U,x,y}, \quad x \in \mathcal{D}(A), y \in H.$$

Nun sagt uns Satz 8.13(c), dass $\sigma(A)$ das wesentliche Bild von f ist. Folglich ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (beachte: da das wesentliche Bild bzgl. des Maßes E_U gebildet wird, haben wir nicht notwendig '=' – was ja auch falsch wäre).

Wir definieren nun E durch
$$E(\omega) = E_U(f^{-1}(\omega)), \quad \omega \subseteq \mathbb{R} \text{ Borelmenge.}$$
Dies liefert ebenfalls ein Spektralmaß, und aus (3) folgt (1): In der Tat gilt stets für das durch $E(\omega) = E_U(\varphi^{-1}(\omega))$ mittels messbarem $\varphi : \Omega \to \Omega'$ definierte Maß, dass
$$\int_{\Omega'} g \, dE_{x,y} = \int_\Omega (g \circ \varphi) \, dE_{U,x,y},$$
wie man leicht sieht, indem man zuerst charakteristische, dann einfache Funktionen betrachtet.

Genauso wie wir aus (3) Gleichung (1) abgeleitet haben, hätten wir auch (3) aus (1) herleiten können. Da das Spektralmaß E_U für U nach Satz 8.18 eindeutig bestimmt ist, ist auch E eindeutig bestimmt. $\triangleleft$

8.20. Folgerung. Mit Hilfe von 8.9–8.13 erhalten wir also auch einen Funktionalkalkül für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren.

8.21. Satz. *Es sei $A : \mathcal{D}(A) \to H$ selbstadjungiert. Dann gilt*

(a) *$A \geq 0$ genau dann, wenn $\sigma(A) \subseteq [0, \infty[$.*

(b) *Es gibt eine eindeutige positive Quadratwurzel B zu A.*

Beweis. (a) '$\Rightarrow$'. Es sei $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ und $\lambda > 0$. Dann gilt
$$\lambda\|x\|^2 = \lambda\langle x, x\rangle \leq \langle (A+\lambda)x, x\rangle \leq \|(A+\lambda)x\|\|x\|;$$
also ist

(1)
$$\|(A+\lambda)x\| \geq \lambda\|x\|$$

und somit $A+\lambda$ injektiv. Gleichzeitig folgt aus (1), dass das Bild von $A+\lambda$ dicht ist, denn ist $y \in H$ und $\langle y,(A+\lambda)x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$, so ist

$$\langle y,(A+\lambda)x\rangle = 0 = \langle 0,x\rangle,$$

so dass $y \in \mathcal{D}((A-\lambda)^*)$ und (wegen der Selbstadjungiertheit) $0 = (A-\lambda)^* y = (A-\lambda)y$. Aus der Injektivität folgt $y = 0$.

Ferner ist das Bild von $A+\lambda$ abgeschlossen: Ist $y_n = (A+\lambda)x_n$ eine Folge im Bild von $A+\lambda$ mit $x_n \in \mathcal{D}(A)$ und $y_n \to y \in H$, so ist nach (1) auch x_n eine Cauchy-Folge in H mit einem Grenzwert x. Aus der Abgeschlossenheit des Graphen von A folgt, dass $x \in \mathcal{D}(A)$ und $(A+\lambda)x = y \in \mathrm{Bild}(A)$. Damit ist $\mathrm{Bild}(A+\lambda) = H$, somit $A+\lambda$ invertierbar und $-\lambda$ nicht im Spektrum.

'$\Leftarrow$' Da das Spektrum in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt, können wir schreiben

$$\langle Ax,x\rangle = \int_0^\infty \lambda \, dE_{x,x}.$$

Nun ist λ eine nicht-negative Funktion und $E_{x,x}$ ein positives Borelmaß. Daher ist $\langle Ax,x\rangle \geq 0$.

(b) Nach (a) ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Setze $B = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dE$. Aus dem Funktionalkalkül folgt, dass B eine Quadratwurzel ist. Die Positivität folgt wie im Beweis von (a).

Annahme: Es gibt eine weitere positive Quadratwurzel C. Dann können wir schreiben

$$C = \int_0^\infty \lambda \, dE^C$$

für das C zugeordnete Spektralmaß E^C. Dann erhalten wir mit dem Transformationssatz

$$\int_0^\infty \lambda \, dE = A = C^2 = \int_0^\infty \lambda^2 \, dE^C = \int_0^\infty \lambda \, dE',$$

wobei $E'(\lambda^2(\omega)) = E^C(\omega)$. Es folgt $E' = E$ wegen der Eindeutigkeit des Spektralmaßes und somit $C = B$. $\triangleleft$

8.22. Bemerkung. Die Existenz eines Spektralmaßes E mit

$$\langle Nx,y\rangle = \int_{\sigma(N)} \lambda \, dE_{x,y}(\lambda)$$

kann man auch für unbeschränkte normale Operatoren beweisen.