Abgeschlossene Operatoren. Im folgenden sei X ein Banachraum.

7.1. Definition. Ein unbeschränkter Operator T auf X ist eine lineare Abbildung

$$T : \mathcal{D}(T) \to X,$$

wobei $\mathcal{D}(T)$, der „Definitionsbereich von T“ ein Unterraum von X ist. Wir machen zunächst keinerlei Stetigkeitsannahmen. T heißt dicht definiert, falls $\mathcal{D}(T)$ dicht in X ist.
Der Graph von T ist

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\} \subseteq X \times X.$$

Wir nennen S eine Fortsetzung von T, falls $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$.
Klar: S Fortsetzung von $T \Leftrightarrow \mathcal{G}(T) \subseteq \mathcal{G}(S)$. Schreibe: $T \subset S$.
T heißt abgeschlossen, falls $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen in $X \times X$. Konkret heißt das: Ist (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x \in X$ und $Tx_n \to y \in X$, so gilt $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$.

7.2. Bemerkung. $T \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow$ (i) $\mathcal{D}(T) = X$ und (ii) T abgeschlossen.

7.3. Satz. *Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to X$ abgeschlossen. Wir definieren für $x \in \mathcal{D}(T)$ die Norm $\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\|$. Dann gilt*

(a) *$(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ ist ein Banachraum.*
(b) *$T : (\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T) \to (X, \|\cdot\|)$ ist stetig.*

Beweis. Es sei (x_n) eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$. Dann sind (x_n) und (Tx_n) Cauchy-Folgen in X. Sie haben also Grenzwerte x und y. Wegen der Abgeschlossenheit ist $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$. Damit konvergiert x_n in der Norm $\|\cdot\|_T$ gegen x.
(b) Graphensatz: $x_n \to x$ in $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ und $Tx_n \to y$ in X liefert $y = Tx$. $\triangleleft$

7.4. Bemerkung. Der Begriff der Abgeschlossenheit ersetzt also in gewissem Sinn den der Stetigkeit.

7.5. Lemma. *(a) Ein Unterraum G von $X \times X$ ist genau dann der Graph eines linearen Operators T_0, wenn aus $(0, y) \in G$ folgt: $y = 0$.*
(b) Jeder Unterraum des Graphen eines linearen Operators ist selbst Graph eines linearen Operators.

Beweis. (a) '$\Rightarrow$' Klar.
'$\Leftarrow$' Wir definieren $\mathcal{D}(T_0) = \{x : \exists y \in X \text{ mit } (x, y) \in G\}$ und setzen $T_0x = y$, falls $(x, y) \in G$. Die obige Bedingung garantiert in Verbindung mit der Linearität, dass dies eine lineare Abbildung ist (Abbildung: Sind (x, y_1) und (x, y_2) in G, so auch $(0, y_1 - y_2)$, also ist dann $y_1 = y_2$).
(b) folgt aus (a). $\triangleleft$

7.6. Definition. Wir nennen einen linearen Operator $T : \mathcal{D}(T) \to X$ abschließbar, falls er eine abgeschlossene Fortsetzung (auch 'Erweiterung') hat. In diesem Fall nennen wir die kleinste (bezüglich der Inklusion der Definitionsbereiche) abgeschlossene Fortsetzung von T den Abschluss von T.

7.7. Lemma. *Für $T : \mathcal{D}(T) \to X$ sind äquivalent:*

(a) *T ist abschließbar mit Abschluss $\overline{T}$.*
(b) *$\overline{\mathcal{G}(T)}$ ist der Graph eines linearen Operators $\overline{T}$.*
(c) *Ist (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to 0 \in X$ und $Tx_n \to y \in X$ (für ein geeignetes y) so ist $y = 0$. In diesem Fall ist der Abschluss $\overline{T}$ definiert durch*

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \{x \in X : \exists (x_n) \in \mathcal{D}(T) \text{ mit } x_n \to x \text{ und } Tx_n \to y \text{ für geeignetes } y\},$$

und man setzt dann $\overline{T}x = y$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Folgt aus 7.5(a).
(b) $\Rightarrow$ (a): Ist $\overline{\mathcal{G}(T)}$ der Graph von $\overline{T}$, so ist $\overline{T}$ eine abgeschlossene Erweiterung von T. Da der Graph eines abgeschlossenen Operators abgeschlossen ist, ist $\overline{T}$ auch der Abschluss von T.
(c) $\Leftrightarrow$ (b): Ist lediglich eine Umformulierung. $\triangleleft$

7.8. Definition. Man kann Summe und Produkt unbeschränkter Operatoren definieren, indem man setzt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T+S) &= \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T) \\ \mathcal{D}(ST) &= \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(S)\}. \end{aligned}$$

7.9. Beispiel. Es sei $X = L^2(\mathbb{R})$ und

$$D : f \mapsto f' \qquad M : f \mapsto xf$$

mit $\mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(M) = C_c^\infty(\mathbb{R})$. Beachte: Weder D noch M können zu beschränkten Operatoren auf X fortgesetzt werden. Es gilt aber

$$(DM - MD)f = f \quad \text{also} \quad DM - MD = I \quad \text{auf} \quad C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Der Kommutator $[D, M]$ hat also eine stetige Fortsetzung auf ganz X.

7.10. Bemerkung. Es gibt keine beschränkten Operatoren A, B, so dass $AB - BA = I$.

7.11. Definition. Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to X$ ein unbeschränkter Operator auf X. Die Resolvente $\rho(T)$ von T ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die

$$T - \lambda I : \mathcal{D}(T) \to X$$

bijektiv ist und $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Mit anderen Worten: Es existiert ein $S \in \mathcal{L}(X)$ mit $S(T - \lambda I) = I_{\mathcal{D}(T)}$ und $(T - \lambda I)S = I_X$. Das Spektrum von T ist definiert durch $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

7.12. Satz.

(a) *Das Spektrum ist eine abgeschlossene Menge in* $\mathbb{C}$.

(b) *Jede abgeschlossene Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *(einschließlich* $\emptyset$ *und* $\mathbb{C}$*) kommt als Spektrum eines Operators vor.*

Beweis. (a) Es sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Setze $T_0 := T - \lambda_0 I$. Dann ist T_0 invertierbar. Es sei S die Inverse wie in 7.11. Dann ist für $z \in \mathbb{C}$:

$$(T_0 - zI)S = I - zS,$$

für hinreichend kleines $|z|$ ist die rechte Seite invertierbar. Es folgt

$$(T_0 - zI)S(I - zS)^{-1} = I$$

auf X. Ferner gilt $S(I - zS)^{-1} = (I - zS)^{-1}S$. Es folgt, dass auf $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_0)$:

$$(I - zS)^{-1}S(T_0 - zI) = (I - zS)^{-1}(I - zS) = I.$$

Daher ist $\rho(T)$ offen, also $\sigma(T)$ abgeschlossen.
(b) Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, $\mu = (\mu_j)$ eine dichte Folge in A und $X = \ell^2(\mathbb{N})$. Wir definieren

$$\mathcal{D}(M_\mu) = \{x \in X : (\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \ldots) \in X\} \text{ und } M_\mu(x_1, x_2, \ldots) = (\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \ldots).$$

Man sieht leicht, dass $\sigma(M_\mu) = \overline{\{\mu_j : j \in \mathbb{N}\}}$. Ein Beispiel für einen Operator mit leerem Spektrum erhält man, indem man mit $X = \{f \in AC[0,1] : f' \in L^2\}$ und $\mathcal{D}(D) = \{f \in X : f(0) = 0\}$ mit $Df = f'$ wählt, s. Übung. $\triangleleft$

7.13. Satz. *Ist T nicht abgeschlossen, so ist* $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

Beweis. Es sei $\lambda \in \rho(T)$. Wir zeigen, dass dann T abgeschlossen ist: Es sei (x_k) eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_k \to x$ in X und $Tx_k \to y$ in X. Dann folgt $(T - \lambda I)x_k \to y - \lambda x$.
Mit $S \in \mathcal{L}(X)$ bezeichnen wir die Inverse zu $T-\lambda I$. Dann gilt $Sx_k \to Sx$ und $x_k = S(T-\lambda I)x_k \to S(y - \lambda x)$. Insbesondere folgt,

$$x = \lim x_k = S(y - \lambda x) \in \operatorname{Bild} S = \mathcal{D}(T). \tag{1}$$

Ferner ist dann $y = (T - \lambda I)Sy \overset{(1)}{=} (T - \lambda I)(x + \lambda Sx) = (T - \lambda I)x + \lambda x = Tx.$ ◁

Adjungierte. Nun seien H, H_1, H_2 Hilberträume.

7.14. Definition. Es sei T dicht definiert. Wir setzen

$$\mathcal{D}(T^*) = \{x \in H : \exists\, z : \langle x, Ty\rangle = \langle z, y\rangle \qquad \forall\, y \in \mathcal{D}(T)\}$$

und definieren dann $T^*x = z$ (beachte: Weil T dicht definiert ist, existiert höchstens ein solches z). Es gilt also

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}(T^*), y \in \mathcal{D}(T).$$

T heißt symmetrisch, falls

$$\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{D}(T).$$

In diesem Fall ist also $T \subset T^*$. T heißt selbstadjungiert, falls $T = T^*$.

7.15. Satz. *S, T und ST seien dicht definiert. Dann ist*

$$T^*S^* \subset (ST)^*. \tag{1}$$

Ist zusätzlich $S \in \mathcal{L}(H)$, so ist

$$T^*S^* = (ST)^*. \tag{2}$$

Stets ist also $(ST)^*$ eine Fortsetzung von T^*S^*; Gleichung (2) besagt auch, dass beide Operatoren denselben Definitionsbereich haben.

Beweis. Es sei $x \in \mathcal{D}(ST)$, $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$. Dann ist auch $x \in \mathcal{D}(T)$ und $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$, also $\langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle$. Ferner ist $Tx \in \mathcal{D}(S)$ und $y \in \mathcal{D}(S^*)$, also $\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle$. Es folgt (1).
(2): Es sei S beschränkt und $y \in \mathcal{D}((ST)^*)$. Dann ist auch $S^* \in \mathcal{L}(H)$, somit $\mathcal{D}(S^*) = H$. Es folgt

$$\langle Tx, S^*y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)^*y\rangle$$

für jedes x in $\mathcal{D}(ST)$. Also ist $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$ und daher $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$. Nun folgt (2) aus (1). ◁

7.16. Definition. Wir benutzen für die folgenden Sätze die Abbildung

$$V : H\times H \to H\times H, \qquad V(a, b) := (-b, a).$$

$H\times H$ trägt das Skalarprodukt $\langle (x, y), (u, v)\rangle = \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle$.

7.17. Satz. *Es sei T dicht definiert. Dann gilt $\mathcal{G}(T^*) = (V\mathcal{G}(T))^\perp$.*
Beachte. Damit kennt man sofort auch $\mathcal{D}(T^*)$ und die Wirkung von T^*.

Beweis.

$$\begin{aligned}
& (y, z) \in \mathcal{G}(T^*) \\
\Leftrightarrow\quad & \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T) \\
\Leftrightarrow\quad & \langle (-Tx, x), (y, z)\rangle = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T) \\
\Leftrightarrow\quad & (y, z) \in [V\mathcal{G}(T)]^\perp.
\end{aligned}$$

7.18. Folgerungen. Es sei T dicht definiert.

(a) Dann ist T^* abgeschlossen, weil $\mathcal{G}(T^*)$ ein orthogonales Komplement und somit abgeschlossen ist.

(b) Insbesondere sind selbstadjungierte Operatoren abgeschlossen.

(c) Ist T zusätzlich abgeschlossen, so ist

$$H \times H = V\mathcal{G}(T) \oplus (V\mathcal{G}(T))^\perp = V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*)$$

als orthogonale direkte Summe, da $V\mathcal{G}(T)$ ebenso wie $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen ist.

7.19. Satz. *T sei dicht definiert und symmetrisch. Dann gilt*

(a) *Ist $\mathcal{D}(T) = H$, so ist T selbstadjungiert und $T \in \mathcal{L}(H)$.*

(b) *Ist T selbstadjungiert und injektiv, so ist* Bild T *dicht in H. Wir können die algebraische Inverse T^{-1} von T (auf* Bild T*) als dicht definierten Operator in H mit Definitionsbereich* Bild T *auffassen. Dann ist T^{-1} selbstadjungiert.*

(c) *Ist* Bild T *dicht in H, so ist T injektiv.*

(d) *Ist* Bild $T = H$*, so ist T selbstadjungiert und $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.*

Beweis. (a) Nach 7.14 ist $T \subset T^*$. Wegen $\mathcal{D}(T) = H$ folgt $T = T^*$. Da $\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}(T^*)$ abgeschlossen ist, ist $T \in \mathcal{L}(H)$ (Graphensatz).

(b) Es sei $y \perp \operatorname{Bild} T$. Dann ist $\langle y, Tx\rangle = 0 = \langle 0, x\rangle$ für $x \in \mathcal{D}(T)$. Damit ist $y \in \mathcal{D}(T^*) \overset{\text{sa}}{=} \mathcal{D}(T)$, und $Ty \overset{\text{sa}}{=} T^*y = 0$. Da T nach Annahme injektiv ist, schließen wir, dass $y = 0$. Damit ist $\overline{\operatorname{Bild} T} = H$. Folglich ist die algebraische Inverse dicht definiert, und ihre Adjungierte T^{-1*} existiert. Nun ist

(1) $$\mathcal{G}(T^{-1}) = V\mathcal{G}(-T).$$

Mit T ist auch $-T$ selbstadjungiert, insbesondere abgeschlossen. Nach (1) ist dann auch T^{-1} abgeschlossen. Ferner ist wegen der Selbstadjungiertheit nach Folgerung 7.18(c)

(2) $$H \times H = V\mathcal{G}(-T) \oplus \mathcal{G}(-T)$$

als orthogonale direkte Summe.

Es folgt

$$\mathcal{G}(T^{-1*}) \overset{7.17}{=} (V\mathcal{G}(T^{-1}))^\perp \overset{(1)}{=} (\mathcal{G}(-T))^\perp \overset{(2)}{=} V\mathcal{G}(-T) \overset{(1)}{=} \mathcal{G}(T^{-1}).$$

Damit ist $T^{-1} = T^{-1*}$.

(c) Ist $Tx = 0$, so ist $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0 \ \forall\ y \in \mathcal{D}(T)$. Also ist $x \perp \operatorname{Bild} T$, folglich $x = 0$.

(d) Weil $\operatorname{Bild} T = H$ ist, schließen wir aus (c), dass T injektiv ist. Die (zunächst algebraische) Inverse ist auf ganz H definiert.

Zeige: Sie ist symmetrisch. Es seien $x, y \in H$. Dann finden wir $z, w \in \mathcal{D}(T)$ mit $x = Tw$, $y = Tz$. Dann ist

$$\langle T^{-1}x, y\rangle = \langle w, Tz\rangle \overset{T \text{ symm}}{=} \langle Tw, z\rangle = \langle x, T^{-1}y\rangle.$$

Nun folgt aus (a), dass T^{-1} selbstadjungiert und beschränkt ist (somit eine richtige Inverse). Aus (b) folgt dann die Selbstadjungiertheit von T. ◁

7.20. Satz. *Es sei T dicht definiert und abgeschlossen. Dann ist $\mathcal{D}(T^*)$ dicht und*

$$T^{**} = T.$$

Beweis. Da $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen ist und $V^2 = -I$, ist auch $V\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen. Also ist nach 7.18(c) als orthogonale direkte Summe

$$\begin{aligned} H \times H &= V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*) \text{ bzw.} \\ H \times H &= \mathcal{G}(T) \oplus V\mathcal{G}(T^*) \end{aligned}$$

.

Es sei $z \perp \mathcal{D}(T^*)$. Dann ist $\langle z, y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{D}(T^*)$ und somit $\langle (0,z), (-T^*y, y)\rangle = 0$. Also ist $(0,z) \in (V\mathcal{G}(T^*))^\perp = \mathcal{G}(T)$. Es folgt $z = 0$. Daher ist $\mathcal{D}(T^*)$ dicht, und T^{**} ist definiert. Ferner ist $\mathcal{G}(T^{**}) \overset{7.17}{=} (V\mathcal{G}(T^*))^\perp = \mathcal{G}(T)$. ◁

7.21. Folgerung. *Es sei $T_0 : \mathcal{D}(T_0) \to H$ linear, dicht definiert und abschließbar. Dann ist T_0^{**} der Abschluss von T_0.*

Beweis. Da $\overline{T}_0$ abgeschlossen und dicht definiert ist, ist $(\overline{T}_0)^{**} = \overline{T}_0$.
Andererseits ist

$$\mathcal{G}(\overline{T}_0^*) \overset{7.17}{=} (V\mathcal{G}(\overline{T}_0))^\perp = (V\overline{\mathcal{G}(T_0)})^\perp = (\overline{V\mathcal{G}(T_0)})^\perp = (V\mathcal{G}(T_0))^\perp \overset{7.17}{=} \mathcal{G}(T_0^*),$$

und somit $T_0^* = \overline{T}_0^*$, also auch $T_0^{**} = (\overline{T}_0)^{**}$. ◁

7.22. Definition. Ein symmetrischer Operator T heißt maximal symmetrisch, falls keine echte symmetrische Erweiterung von T existiert, d. h. falls gilt

$$T \subset S, \quad S \text{ symmetrisch } \Rightarrow T = S.$$

7.23. Satz. *Selbstadjungierte Operatoren sind maximal symmetrisch.*

Beweis. Es sei T selbstadjungiert, S symmetrisch und $T \subset S$. Dann gilt $S^* \subset T^*$ nach Definition 7.14, also

$$S \subset S^* \subset T^* = T \subset S \quad \Rightarrow \quad S = T.$$

7.24. Satz. *T sei symmetrisch in H (nicht notwendig dicht definiert). Dann gilt*

(a) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2, \ x \in \mathcal{D}(T)$.

(b) *T ist abgeschlossen* $\Leftrightarrow$ Bild$\,(T + iI)$ *abgeschlossen.*

(c) *$T + iI$ ist injektiv.*

(d) *Ist* Bild$\,(T + iI) = H$, *so ist T maximal symmetrisch.*

(e) *Obige Aussagen gelten auch mit $-i$ statt $+i$.*

Beweis. (a) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 + \langle ix, Tx\rangle + \langle Tx, ix\rangle$ (die letzten beiden Terme heben sich wegen der Symmetrie weg).
(b) $\varphi : Tx + ix \mapsto (x, Tx)$ liefert nach (a) eine Isometrie von Bild$\,(T + iI)$ auf $\mathcal{G}(T)$.
(c) folgt aus (a).
(d) Ist $T_1 \supset T$ mit $\mathcal{D}(T_1) > \mathcal{D}(T)$, so ist $\mathcal{D}(T_1 + iI) > \mathcal{D}(T + iI)$. Weil Bild$(T + iI) = H$ ist, folgt, dass $T_1 + iI$ nicht injektiv ist. Widerspruch zu (c).
(e) ist klar. ◁

7.25. Satz. *T sei dicht definiert und abgeschlossen. Setze $Q = I + T^*T$.*

(a) *$Q : \mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(T^*T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(T^*)\} \to H$ ist eine Bijektion.*

(b) *Q hat eine stetige Inverse $B \in \mathcal{L}(H)$, d.h. $QB = I_H$, $BQ = I_{\mathcal{D}(Q)}$.*

(c) *$B \geq 0$ und T^*T ist selbstadjungiert.*

(d) *Ist T' die Restriktion von T auf $\mathcal{D}(T^*T)$, so ist $\mathcal{G}(T')$ dicht in $\mathcal{G}(T)$.*

Beweis. (a) Ist $x \in \mathcal{D}(Q)$, so ist $Tx \in \mathcal{D}(T^*)$, somit

$$\langle x, x\rangle + \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, Qx\rangle. \tag{1}$$

Also ist Q injektiv.
Zum Nachweis der Surjektivität wähle $h \in H$. Dann existieren nach 7.18(c) eindeutig bestimmte Vektoren $Bh \in \mathcal{D}(T)$ und $Ch \in \mathcal{D}(T^*)$ mit:

$$(0, h) = (-TBh, Bh) + (Ch, T^*Ch). \tag{2}$$

Klar: Die Abbildungen $h \mapsto Bh$ und $h \mapsto Ch$ sind linear. Sie induzieren also (auf ganz H definierte) lineare Operatoren B und C. Die Summe auf der rechten Seite ist ferner orthogonal, so dass

$$\|h\|^2 = \|(-TBh, Bh)\|^2 + \|(Ch, T^*Ch)\|^2 \geq \|Bh\|^2 + \|Ch\|^2.$$

Damit ist $\|B\| \leq 1$ und $\|C\| \leq 1$.
Vergleich der Komponenten in (2) zeigt, dass einerseits

(3) $$Ch = TBh, \text{ also } C = TB, \text{ und insbesondere } Bh \in \mathcal{D}(Q),$$

andererseits

(4) $$h = Bh + T^*Ch \overset{C=TB}{=} Bh + T^*TBh = QBh.$$

(b) Wir wissen aus (3), dass $\operatorname{Bild} B \subseteq \mathcal{D}(Q)$. Ferner folgt aus (4), dass $QB = I_H$ ist. Da $Q : \mathcal{D}(Q) \to H$ bijektiv ist, können wir die Inverse Q^{-1} anwenden. Es folgt: $B = Q^{-1} : H \to \mathcal{D}(Q)$, also auch $BQ = I_{\mathcal{D}(Q)}$.
(c) Ist $h \in H$, so ist $h = Qx$ für ein $x \in \mathcal{D}(Q)$. Dann gilt

$$\langle Bh, h\rangle = \langle BQx, Qx\rangle = \langle x, Qx\rangle \overset{(1)}{\geq} 0.$$

Daraus folgt nicht nur, dass B selbstadjungiert ist (vgl. Lemma 5.5) sondern auch, dass $B \geq 0$. Als Inverse eines selbstadjungierten Operators ist nach Satz 7.19(b) dann Q selbstadjungiert und damit auch $T^*T = Q - I$.
(d) Da T abgeschlossen ist, ist $\mathcal{G}(T)$ als abgeschlossener Unterraum von $H \times H$ selbst ein Hilbertraum. Wäre $(z, Tz) \perp \mathcal{G}(T')$ in $\mathcal{G}(T)$, so wäre für jedes $x \in \mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(T^*T)$:

$$0 = \langle (z, Tz), (x, Tx)\rangle = \langle z, x\rangle + \langle Tz, Tx\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, T^*Tx\rangle = \langle z, Qx\rangle.$$

Nun ist aber $\operatorname{Bild} Q = H$. Daher ist $z = 0$. ◁

Die Cayley-Transformation.

7.26. Lemma. *Die Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{1\}, \quad \varphi(t) = \frac{t-i}{t+i}$$

ist bijektiv. Ihre Inverse ist

$$\varphi^{-1}(u) = i\,\frac{1+u}{1-u}.$$

Beweis. Wegen

$$\left|\frac{t-i}{t+i}\right|^2 = \frac{t-i}{t+i}\;\frac{t+i}{t-i} = 1$$

ist das Bild in S^1 enthalten. Offensichtlich liegt 1 nicht im Bild.
Man rechnet leicht nach, dass aus $u = \dfrac{t-i}{t+i}$ folgt, dass $t = i\,\dfrac{1+u}{1-u}$. Dabei ist

$$\bar{t} = t \Leftrightarrow i\,\frac{1+u}{1-u} = -i\,\frac{1+\overline{u}}{1-\overline{u}} \Leftrightarrow (1+u)(1-\overline{u}) = -(1-u)(1+\overline{u}) \Leftrightarrow u\overline{u} = 1.$$

◁

7.27. Cayley-Transformation beschränkter Operatoren. Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, so nennen wir

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1} = \varphi(T) \in \mathcal{L}(H)$$

(mit der Funktion φ aus 7.26) die Cayley-Transformierte von T. Dann gilt:

(a) U ist unitär

(b) $\sigma(U) \subseteq S^1 \setminus \{1\}$.

(c) Jeder unitäre Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ mit $1 \notin \sigma(U)$ ist von dieser Form.

Beweis. (a) Wegen der Selbstadjungiertheit ist

$$\begin{aligned} U^*U &= ((T-iI)(T+iI)^{-1})^*(T-iI)(T+iI)^{-1} \\ &= (T-iI)^{-1}(T+iI)(T-iI)^{-1}(T+iI)^{-1}. \end{aligned}$$

Da die beiden mittleren Faktoren kommutieren, ergibt sich I. Für UU^* analog.
(b) Nach dem Spektralabbildungssatz ist $\sigma(\varphi(T)) = \varphi(\sigma(T))$.
(c) Ist $U \in \mathcal{L}(H)$ mit $1 \notin \sigma(U)$ so setzen wir

$$T = i(I+U)(I-U)^{-1}.$$

Man rechnet wie oben nach, dass T selbstadjungiert ist und $\varphi(T) = U$. ◁

7.28. Fortsetzung der Cayley-Transformation. Es sei T symmetrisch, nicht notwendig dicht definiert. Nach 7.24 ist

$$\|Tx + ix\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 = \|Tx - ix\|^2.$$

Also können wir eine Isometrie U definieren durch

$$\mathcal{D}(U) = \mathrm{Bild}(T+iI), \quad U(Tx+ix) = Tx - ix$$

(wohldefiniert wegen der Injektivität von $T+iI$). Dann ist $\mathrm{Bild}\, U = \mathrm{Bild}(T-iI)$. Da die (algebraische) Inverse $(T+iI)^{-1}$ eine Bijektion von $\mathrm{Bild}(T+iI)$ auf $\mathcal{D}(T)$ liefert, können wir U auch schreiben

$$U = (T-iI)(T+iI)^{-1}.$$

Diesen Operator U nennen wir wieder Cayley-Transformierte.

7.29. Lemma. *Es sei $U : \mathcal{D}(U) \to H$ eine Isometrie, d.h. $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{D}(U)$. Dann gilt:*

(a) *Für $x, y \in \mathcal{D}(U)$ ist $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$.*

(b) *Ist $\mathrm{Bild}(I-U)$ dicht in H, so ist $I-U$ injektiv.*

(c) *Ist einer der Räume $\mathcal{D}(U)$, $\mathrm{Bild}\, U$ oder $\mathcal{G}(U)$ abgeschlossen, so auch die beiden anderen.*

Beweis. (a) Polarisationsidentität.
(b) Es sei $x \in \mathcal{D}(U)$ mit $(I-U)x = 0$. Dann ist $x = Ux$, und daher

$$\langle x, (I-U)y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Uy\rangle \overset{(a)}{=} \langle Ux, Uy\rangle - \langle x, Uy\rangle \overset{Ux=x}{=} 0.$$

Es folgt, dass $x \in (\mathrm{Bild}(I-U))^\perp = \{0\}$.
(c) Es sei $\mathcal{D}(U)$ abgeschlossen.
Abgeschlossenheit von $\mathrm{Bild}\, U$: Ist (y_n) Folge in $\mathrm{Bild}\, U$ mit $y_n \to y$ in H, so finden wir $x_n \in \mathcal{D}(U)$ mit $y_n = Ux_n$. Wegen der Isometrieeigenschaft ist (x_n) eine Cauchy-Folge, hat also einen Grenzwert x, der wiederum in $\mathcal{D}(U)$ liegt, da $\mathcal{D}(U)$ abgeschlossen ist. Es folgt, dass

$$(1) \qquad \|Ux - y_n\| = \|Ux - Ux_n\| = \|U(x-x_n)\| = \|x - x_n\| \to 0,$$

also $y = Ux$ in $\mathrm{Bild}\, U$.
Abgeschlossenheit von $\mathcal{G}(U)$: Es sei (x_n, y_n) Folge in $\mathcal{G}(U)$ mit $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in H. Wie oben ist $x \in \mathcal{D}(U)$ und wie in (1): $y = Ux$.
Andere Fälle analog. ◁

7.30. Satz. *Für $U \in \mathcal{L}(H)$ ist äquivalent:*

(a) *U ist unitär.*

(b) *$\mathrm{Bild}\, U = H$ und $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$.*

(c) *$\mathrm{Bild}\, U = H$ und $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in H$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) ist klar.
Gilt (c), so ist

$$\langle (U^*U - I)x, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle - \langle x, x\rangle = \|Ux\|^2 - \|x\|^2 = \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0, \quad x \in H.$$

Da dieser Ausdruck die Operatornorm abschätzt, vgl. Satz 5.6, ist $U^*U - I = 0$ bzw. $U^*U = I$. Da aus (c) sofort die Surjektivität und die Injektivität folgt, ist U invertierbar, und Multiplikation mit U^{-1} zeigt, dass $U^{-1} = U^*$. $\lhd$

7.31. Satz. *Es sei U die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators T. Dann gilt:*

(a) *U ist genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist.*

(b) Bild$(I - U) = \mathcal{D}(T)$, *$I - U$ ist injektiv, und T kann durch die Formel*

$$T = i(I + U)(I - U)^{-1}$$

rekonstruiert werden. Die Cayley-Transformationen verschiedener symmetrischer Operatoren sind daher verschieden.

(c) *U ist genau dann unitär, wenn T selbstadjungiert ist.*

Beweis. Nach Satz 7.24 ist T genau dann abgeschlossen, wenn Bild$(T + iI)$ abgeschlossen ist. Nach Lemma 7.29 ist U genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{D}(U)$ abgeschlossen ist. Da $\mathcal{D}(U) =$ Bild$(T + iI)$ ist, folgt die Behauptung.
(b) Wir erhalten eine Bijektion zwischen $\mathcal{D}(T)$ und $\mathcal{D}(U) =$ Bild$(T + iI)$ durch $x \mapsto Tx + ix$. Die Abbildung U bildet $Tx + ix$ auf $Tx - ix$ ab. Also ist

$$(I - U)(Tx + ix) = 2ix, \quad \text{und} \quad (I + U)(Tx + ix) = 2Tx.$$

Dies zeigt, dass $I - U$ injektiv ist und dass Bild$(I - U) = \mathcal{D}(T)$. Es folgt: $(I - U)^{-1}$ bildet $\mathcal{D}(T)$ (surjektiv) auf $\mathcal{D}(U)$ ab, und

$$2Tx = (I + U)(Tx + ix) = (I + U)(I - U)^{-1}(2ix), \quad x \in \mathcal{D}(T).$$

(c) '$\Leftarrow$' Ist T selbstadjungiert, so ist nach Satz 7.25

(1) $$\mathrm{Bild}(I + T^2) = \mathrm{Bild}(I + T^*T) = H.$$

Nun ist

(2) $$(T + iI)(T - iI) = I + T^2 = (T - iI)(T + iI)$$

(alle drei Operatoren haben Definitionsbereich $\mathcal{D}(T^2)$). Wir schließen mit (1), dass

(3) $$\mathcal{D}(U) = \mathrm{Bild}(T + iI) = H \text{ und}$$

(4) $$\mathrm{Bild}\, U = U(\mathcal{D}(U)) = U(\mathrm{Bild}(T + iI)) \overset{U=(T-iI)(T+iI)^{-1}}{=} \mathrm{Bild}(T - iI) = H$$

Somit ist U eine auf ganz H definierte Isometrie, insbesondere ist $U \in \mathcal{L}(H)$. Aus (4) folgt dann mit Satz 7.30, dass U unitär ist.
'$\Rightarrow$' Es sei U unitär. Dann ist U insbesondere beschränkt und normal. Nun ist für einen normalen beschränkten Operator A wegen der Identität $\langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle$

$$\mathrm{Kern}\, A = \mathrm{Kern}\, A^*A \overset{\text{normal}}{=} \mathrm{Kern}\, AA^* = \mathrm{Kern}\, A^*,$$

also

$$(\mathrm{Bild}(I - U))^\perp = \mathrm{Kern}(I - U^*) = \mathrm{Kern}(I - U) = \{0\}.$$

Es folgt: $\mathcal{D}(T) \overset{(b)}{=}$ Bild$(I - U)$ ist dicht in H. Daher ist T^* definiert. Wegen der Symmetrie von T ist $T \subset T^*$.

Um zu zeigen, dass $T^* \subset T$ gilt, wählen wir $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Da $\mathrm{Bild}(T+iI) = \mathcal{D}(U) = H$ ist, finden wir ein $y_0 \in \mathcal{D}(T)$ mit $(T^*+iI)y = (T+iI)y_0$. Nun ist $T \subset T^*$, also ergibt sich

$$(5) \qquad (T^*+iI)y = (T+iI)y_0 \stackrel{T\subseteq T^*}{=} (T^*+iI)y_0.$$

Wir setzen $y_1 = y - y_0$. Dann ist $y_1 \in \mathcal{D}(T^*)$, und für jedes $x \in \mathcal{D}(T)$ ist

$$\langle (T-iI)x, y_1\rangle = \langle x, (T^*+iI)y_1\rangle = \langle x, (T^*+iI)y - (T^*+iI)y_0\rangle \stackrel{(5)}{=} \langle x, 0\rangle = 0.$$

Daher ist $y_1 \in (\mathrm{Bild}(T-iI))^\perp = \{0\}$, somit $y_1 = 0$, somit $y = y_0 \in \mathcal{D}(T)$. $\lhd$

7.32. Folgerung. *Es seien U_1 und U_2 die Cayley-Transformierten symmetrischer Operatoren T_1 und T_2. Dann gilt*

$$U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow T_1 \subset T_2.$$

Beweis. '$\Leftarrow$' folgt sofort aus der Definition der Cayley-Transformierten.
'$\Rightarrow$' folgt aus Satz 7.31(b). $\lhd$

7.33. Satz. *Umgekehrt sei V ein unbeschränkter Operator mit $\|Vx\| = \|x\|$ für $x \in \mathcal{D}(V)$. Ist dann $I - V$ injektiv, so ist V die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $I - V : \mathcal{D}(V) \to \mathrm{Bild}(I-V)$ bijektiv. Wir können daher den unbeschränkten Operator S mit $\mathcal{D}(S) = \mathrm{Bild}(I-V)$ durch

$$S((I-V)z) = i(I+V)(z)$$

definieren. Weil V eine Isometrie ist, schließen wir mit Lemma 7.29(a) für $x = (I-V)z$ und $y = (I-V)w$:

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= \langle i(I+V)z, (I-V)w\rangle = i\langle z,w\rangle + i\langle Vz,w\rangle - i\langle z, Vw\rangle - i\langle Vz, Vw\rangle\\ &= i\langle Vz, w\rangle - i\langle z, Vw\rangle\\ &= \langle (I-V)z, i(I+V)w\rangle = \langle x, Sy\rangle.\end{aligned}$$

Somit ist S symmetrisch.
Ist V die Cayley-Transformierte von S? Ist $x = (I-V)z \in \mathcal{D}(S)$ für ein $z \in \mathcal{D}(V)$, so folgt:

$$(S-iI)x = i(I+V)z - i(I-V)z = 2iVz, \quad \text{und} \quad (S+iI)x = i(I+V)z + i(I-V)z = 2iz.$$

Wegen der zweiten Gleichung ist $\mathcal{D}(V) = \mathrm{Bild}(S+iI)$. Ferner sehen wir:

$$(S-iI)x \stackrel{1.\text{ Gl.}}{=} 2iVz \stackrel{2.\text{ Gl.}}{=} V(S+iI)x, \quad x \in \mathcal{D}(S),$$

also $V = (S-iI)(S+iI)^{-1}$. $\lhd$

Abgeschlossene, dicht definierte symmetrische Operatoren.

7.34. Lemma. *T sei abgeschlossen, symmetrisch und dicht definiert, U die Cayley-Tranformierte. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Bild}(T+iI)$ *und* $\mathrm{Bild}(T-iI)$ *sind abgeschlossen.*

(b) *U ist eine isometrische Bijektion von $\mathcal{D}(U) = \mathrm{Bild}(T+iI)$ nach $\mathrm{Bild}\, U = \mathrm{Bild}(T-iI)$.*

(c) *Ist U_1 eine (beliebige) isometrische Fortsetzung von U, so ist U_1 die Cayley-Transformierte einer symmetrischen Erweiterung von T.*

Beweis. (a) Folgt aus 7.24(b).
(b) Folgt sofort aus der Definition, vgl. 7.28.
(c) Nach Satz 7.33 genügt es zu zeigen, dass $I - U_1$ injektiv ist. Weil $\mathrm{Bild}(I-U_1) \supseteq \mathrm{Bild}(I-U) = \mathcal{D}(T)$ dicht in H ist, folgt dies aus Lemma 7.29(b). $\lhd$

7.35. Definition. T sei dicht definiert, abgeschlossen und symmetrisch. Dann heißen

$$\begin{aligned} n^+ &= \dim \operatorname{Bild}(T+iI)^\perp \quad \text{und} \\ n^- &= \dim \operatorname{Bild}(T-iI)^\perp \end{aligned}$$

die Defektindizes von T.

7.36. Satz. *T sei dicht definiert, abgeschlossen und symmetrisch.*

(a) *T ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ $n^+ = n^- = 0$.*

(b) *T ist maximal symmetrisch $\Leftrightarrow$ $n^+ = 0$ oder $n^- = 0$.*

(c) *T hat eine selbstadjungierte Fortsetzung $\Leftrightarrow$ $n^+ = n^-$.*

Beweis. (a) Nach Satz 7.31 ist T genau dann selbstadjungiert, wenn U unitär ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathcal{D}(U) = H = \operatorname{Bild} U$. Nach Lemma 7.34 bedeutet dies, dass beide Defektindizes Null sind.
(b) Dass einer der Defektindizes Null ist, heißt nach Lemma 7.34, dass $\mathcal{D}(U) = H$ oder $\operatorname{Bild} U = H$. In diesem Fall lässt sich U nicht isometrisch fortsetzen. Also hat nach Lemma 7.34 und Folgerung 7.32 auch T keine symmetrische Fortsetzung.
Sind andererseits beide Defektindizes positiv, so kann man eine Fortsetzung U_1 von U definieren: Man wählt $x_0 \in \operatorname{Bild}(T+iI)^\perp = \mathcal{D}(U)^\perp$ und $y_0 \in \operatorname{Bild}(I-iI)^\perp = \operatorname{Bild} U^\perp$ mit $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$ und definiert $\mathcal{D}(U_1) = \mathcal{D}(U) \oplus LH(x_0)$, $U_1(x \oplus cx_0) = Ux \oplus cy_0$. Diese Fortsetzung ist isometrisch, daher ist sie die Cayley-Transformierte einer symmetrischen Erweiterung von T.
(c) Sind beide Defektindizes gleich, so bastelt man wie im Beweis von (b) eine isometrische Fortsetzung von U, indem man eine ONB von $\mathcal{D}(U)^\perp$ auf eine ONB von $\operatorname{Bild} U^\perp$ abbildet.

Hat umgekehrt T eine selbstadjungierte Fortsetzung, so hat U nach Folgerung 7.32 und Satz 7.31(c) eine Fortsetzung zu einer unitären Abbildung U_1. Weil $U_1(\mathcal{D}(U)^\perp) \subseteq \operatorname{Bild} U^\perp$ ist, folgt, dass die Defektindizes gleich sind. $\triangleleft$

7.37. Beispiel. Es sei $V : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ der Rechtsshift-Operator:

$$V(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Dann ist offensichtlich V eine Isometrie. Ferner: $V - I$ ist injektiv, denn ist $Vx = x$, so ist $x_1 = 0$, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$, $\ldots$, also $x = 0$.

Nach Satz 7.33 ist V die Cayley-Transformierte eines symmetrischen Operators T. Nun ist

$$\begin{aligned} n^+(T) &= \dim(\operatorname{Bild}(T+iI))^\perp = \dim \mathcal{D}(V)^\perp = \dim H^\perp = 0, \\ n^-(T) &= \dim(\operatorname{Bild}(T-iI))^\perp = \dim(\operatorname{Bild} V)^\perp = 1. \end{aligned}$$

Daher ist T maximal symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert.

7.38. Satz. *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators ist reell.*

Beweis. Sei $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}, y \neq 0$. Schreibe

$$T - \lambda I = y\left(\frac{T - xI}{y} - iI\right).$$

Nun ist $T_0 = \frac{1}{y}(T - xI)$ selbstadjungiert. Nach Satz 7.24 ist $T_0 - iI$ injektiv. Ferner ist nach Lemma 7.24(a) das Bild von $T_0 - iI$ abgeschlossen, somit $T_0 - iI$ nach Satz 7.36 surjektiv. Nach Satz 7.19 ist die Inverse beschränkt. $\triangleleft$

7.39. Satz. *Ist T dicht definiert, abgeschlossen und symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert, so enthält das Spektrum mindestens eine Halbebene von $\mathbb{C}$. Genauer:*

(i) *Ist $n^+(T) = 0, n^-(T) > 0$, so ist die untere Halbebene $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ die Resolvente und die abgeschlossene obere Halbebene $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ das Spektrum von T.*

(ii) *Ist $n^+(T) > 0, n^-(T) = 0$, so ist die obere Halbebene $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ die Resolvente und die abgeschlossene untere Halbebene $\{\operatorname{Im} z \le 0\}$ das Spektrum von T.*

(iii) *Ist $n^+(T) > 0, n^-(T) > 0$, so ist das Spektrum ganz $\mathbb{C}$.*

Insbesondere sehen wir: Existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass sowohl $T + \lambda I$ als auch $T + \overline{\lambda} I$ invertierbar sind, so ist T selbstadjungiert. Noch spezieller folgt die Selbstadjungiertheit, falls die Resolvente ein Element von $\mathbb{R}$ enthält.

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \neq 0$. Wie in 7.24(b) sieht man, dass $T - zI$ injektiv ist und abgeschlossenes Bild hat. Wir setzen $V_z = (\operatorname{Bild}(T - zI))^\perp$ und definieren $T_z : \mathcal{D}(T) \oplus V_z \to H$ durch $T_z(x, v) = (T - z)x + v$. Dann ist T_z invertierbar, somit auch $T_z + cI$, falls $|c|$ hinreichend klein ist, da die Resolventenmenge offen ist, s. 7.12. Folglich ist für z' in einer Umgebung von z der Operator $T - z'I$ genau dann invertierbar, wenn $\dim V_z = 0$, d.h. wenn $T - zI$ invertierbar ist. Das bedeutet, dass in einer Umgebung jedes Punktes entweder alle Punkte invertierbar sind oder alle nicht invertierbar sind.

Sind nun z_0 und z_1 zwei Punkte in derselben (offenen) Halbebene von $\mathbb{C}$, so liegt die Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z_1 ebenfalls in der Halbebene. Für jeden Punkt z' auf der Strecke können wir das obige Argument anwenden. Weil die Strecke kompakt ist, wird sie von endlich vielen dieser Umgebungen überdeckt. Daher ist $T - z'I$ entweder für alle z' auf der Strecke invertierbar oder für keines. Folglich gehören entweder alle Punkt der Halbebene zur Resolvente oder alle zum Spektrum.

Ist $n^+(T) = 0$, so ist $T + iI$ invertierbar als Folgerung aus Satz 7.24 (s. Beweis von Satz 7.38). Also gehört $-i$ zur Resolvente und somit auch die gesamte untere Halbebene. Ist $n^+(T) \neq 0$, so ist $T + iI$ nicht invertierbar, also liegt $-i$ und damit die gesamte untere Halbebene im Spektrum.

Analog für $n^-(T)$. Wegen der Abgeschlossenheit des Spektrums ist die reelle Achse darin stets enthalten. $\lhd$

Die Friedrichs-Erweiterung.

7.40. Definition. Ein symmetrischer Operator T heißt halbbeschränkt, falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\langle Tx, x\rangle \ge c\|x\|^2 \text{ oder } \langle Tx, x\rangle \le c\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(T).$$

7.41. Satz. *Jeder dicht definierte, halbbeschränkte und symmetrische Operator T hat eine selbstadjungierte Erweiterung T_F (Friedrichs-Erweiterung). Diese ist ebenfalls halbbeschränkt mit derselben Konstante.*

Beweis. Indem man ggf. statt T den Operator $\pm T + \lambda I$ für ein $\lambda > 0$ betrachtet, kann man annehmen, dass $\langle Tx, x\rangle \ge \|x\|^2$ gilt. Durch

$$[x, y] = \langle Tx, y\rangle \tag{1}$$

wird dann auf $\mathcal{D}(T)$ eine positiv definite Sesquilinearform und somit auch eine Norm $|||x||| = [x, x]^{1/2}$ definiert. Wir bezeichnen mit H_T die Vervollständigung von $\mathcal{D}(T)$ bezüglich dieser Norm. Ein Element von H_T ist dann eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen von Elementen in $\mathcal{D}(T)$ bzgl. der Norm $|||\cdot|||$. Dabei liegen zwei Cauchy-Folgen (x_n), (y_n) in derselben Klasse, falls $|||x_n - y_n||| \to 0$. Jede solche Cauchy-Folge (x_n) ist auch eine Cauchy-Folge bzgl. der Norm von H und hat somit einen Grenzwert $z \in H$. Ist (y_n) eine Cauchy-Folge in derselben Äquivalenzklasse, so hat sie denselben Grenzwert. Daher erhalten wir die Identifikation

$$H_T = \{z \in H : \text{Es gibt eine Cauchy-Folge } (x_n) \text{ bzgl. } |||\cdot||| \text{ mit } x_n \to z \text{ in } (H, \|\cdot\|)\}.$$

Nun können wir die Sesquilinearform $[\cdot,\cdot]$ auf H_T fortsetzen durch $[z, w] = \lim[x_n, y_n]$, falls (x_n) eine Cauchy-Folge mit $x_n \to z$ und (y_n) eine Cauchy-Folge mir $y_n \to w$ ist. Der Grenzwert existiert und ist unabhängig von der Wahl der Cauchy-Folge, weil

$$[x, y] \le |||x|||\ |||y|||, \quad x, y \in \mathcal{D}(T).$$

Auch diese Fortsetzung ist positiv definit, und H_T ist damit nach Konstruktion ein Hilbertraum, der $\mathcal{D}(T)$ enthält.
Weil T symmetrisch ist, ist $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T^*)$. Wir definieren T_F durch

$$\mathcal{D}(T_F) = H_T \cap \mathcal{D}(T^*), \quad T_F z = T^* z.$$

Behauptung: T_F ist symmetrisch. Sind (x_n), (y_n) Cauchy-Folgen in $\mathcal{D}(T)$ bzgl. $\|\!|\cdot|\!\|$, die in der Norm von H gegen Elemente z, w in $H_T \cap \mathcal{D}(T^*)$ konvergieren, so gilt

$$\begin{aligned}
\langle T_F z, w\rangle &\overset{\|\cdot\|\text{-Kvgz}}{=} \lim_m \langle T_F z, y_m\rangle \overset{\text{Dfn}}{=} \lim_m \langle T^* z, y_m\rangle = \lim \langle z, T y_m\rangle = \lim_m \overline{[y_m, z]} = \overline{[w, z]} \\
&= [z, w] = \lim_n [x_n, w] = \lim_n \langle T x_n, w\rangle = \lim_n \langle x_n, T^* w\rangle = \lim_n \langle x_n, T_F w\rangle = \langle z, T_F w\rangle,
\end{aligned}$$

wie behauptet.
Insbesondere folgt hier für $w = z$:

$$\langle T_F z, z\rangle = [z, z] \geq \|z\|^2, \quad z \in \mathcal{D}(T_F) \tag{2}$$

so dass die Friedrichs-Erweiterung T_F dieselbe Schranke hat wie der Ausgangsoperator.
Wieso ist T_F selbstadjungiert? Die Ungleichung

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|\,\|y\| \leq \|\!|x|\!\|\|y\|$$

zeigt, dass für festes $y \in H$ die Abbildung $x \mapsto \langle x, y\rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf H_T ist. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert also ein $z \in H_T$, so dass $\langle x, y\rangle = [x, z]$. Ist speziell $x \in \mathcal{D}(T)$, so schließen wir, dass

$$\langle x, y\rangle = [x, z] = \langle T x, z\rangle.$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit nach Definition der Fortsetzung des $[\cdot,\cdot]$-Skalarprodukts. Damit liegt z in $\mathcal{D}(T^*)$ (was wir eigentlich schon wissen) und $y = T^* z = T_F z$. Daher ist T_F surjektiv. Da T_F wegen (2) ohnehin injektiv ist, ist T_F invertierbar. Damit liegt 0 in der Resolvente von T_F, und aus Satz (7.39) folgt die Selbstadjungiertheit. $\lhd$