5. Beschränkte Operatoren im Hilbertraum

Im Folgenden sei H ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum.

Die Adjungierte.

5.1. Satz. *Zu jedem $A \in \mathcal{L}(H)$ existiert genau ein Operator $A^* \in \mathcal{L}(H)$ mit*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \forall\, x, y \in H. \tag{1}$$

Ferner gilt

(a) $(A^*)^* = A$.

(b) $\|A^*\| = \|A\|$.

(c) $(A+B)^* = A^* + B^*, (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*, (AB)^* = B^*A^*$ *für* $B \in \mathcal{L}(H)$.

(d) $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

Beweis. Zur Eindeutigkeit: Es gelte (1) für A_1^* und A_2^*. Dann ist $\langle x, (A_1^* - A_2^*)y\rangle = 0$ für alle $x, y \in H$. Es folgt $(A_1^* - A_2^*)y = 0$, somit $A_1^* = A_2^*$.
Existenz: Es sei $y \in H$. Dann definiert

$$x \mapsto \langle Ax, y\rangle$$

ein Element von $\mathcal{L}(H, \mathbb{K})$: Klar ist die Linearität; die Ungleichung $|\langle Ax, y\rangle| \le \|A\|\|x\|\|y\|$ liefert die Stetigkeit.
Nach dem Satz von Riesz (s. 4.9) finden wir ein eindeutiges $z \in H$ mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle$. Wir setzen $A^*y = z$. Dann gilt die gewünschte Relation (1). Man sieht leicht, dass A^* dadurch eine lineare Abbildung wird (dazu etwa: gilt $\langle Ax, y_j\rangle = \langle x, z_j\rangle$ für $j = 1, 2$, so ist $\langle Ax, y_1 + y_2\rangle = \langle x, z_1 + z_2\rangle$, somit $A^*(y_1 + y_2) = A^*y_1 + A^*y_2$.)
Die Abbildung A^* ist auch stetig, denn für $y \in H$ ist $\|A^*y\|^2 = |\langle A^*y, A^*y\rangle| = |\langle AA^*y, y\rangle| \le \|A\|\|A^*y\|\|y\|$. Wir schließen, dass $\|A^*y\| \le \|A\|\|y\|$ und deshalb $\|A^*\| \le \|A\|$.
(a) Es ist für alle x, y:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \overline{\langle A^*y, x\rangle} = \overline{\langle y, (A^*)^*x\rangle} = \langle (A^*)^*x, y\rangle,$$

somit $(A^*)^*x = Ax$ für jedes x.
(b) Wie oben gesehen: $\|A^*\| \le \|A\|$. Anwendung auf A^* liefert: $\|A\| = \|(A^*)^*\| \le \|A^*\|$.
(c) folgt sofort aus (1).
(d) Aus (a): $\|A^*A\| \le \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2$. Andererseits ist:

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \le \|A^*Ax\|\,\|x\|.$$

Dies liefert dass

$$\|A\|^2 = (\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|)^2 = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|^2 \le \sup_{\|x\|\le 1} (\|A^*Ax\|\,\|x\|),$$

und somit $\|A\|^2 \le \|A^*A\|$. ◁

5.2. Bemerkung. Für $A \in \mathcal{L}(H)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern} A &= (\operatorname{Bild} A^*)^\perp \\ \operatorname{Kern} A^* &= (\operatorname{Bild} A)^\perp. \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind weder $\operatorname{Bild} A$ noch $\operatorname{Bild} A^*$ abgeschlossen.

5.3. Satz. (Hellinger-Toeplitz). Es sei $A : H \to H$ linear mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Dann ist A stetig.

Beweis. (mit Graphensatz) Es gelte $x_n \to 0$ und $Ax_n \to z$. Dann gilt für alle $y \in H : \langle z, y\rangle = \lim\langle Ax_n, y\rangle = \lim\langle x_n, Ay\rangle = 0$. Folglich ist $z = 0$. ◁

5.4. Definition. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt

(a) selbstadjungiert, falls $A = A^*$.

(b) normal, falls $A^*A = AA^*$.

(c) positiv (schreibe $A \geq 0$), falls $A = A^*$ und $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$

Klar: Selbstadjungierte Operatoren sind normal. Dass die Bedingung in (c) sinnvoll ist, sehen wir gleich.

5.5. Lemma. *Es sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt*

$$A = A^* \;\Leftrightarrow\; \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \;\text{ für alle }\; x \in H.$$

Beweis. '$\Rightarrow$'. Ist $A = A^*$, so ist $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$.
'$\Leftarrow$'. Es ist $\langle (A - A^*)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \langle A^*x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \langle x, A^*x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \overline{\langle Ax, x\rangle} = 0$.
Der Operator $B = A - A^*$ erfüllt also $\langle Bx, x\rangle = 0$ für alle x. Jetzt Polarisation:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle B(x+y), x+y\rangle - \langle Bx, x\rangle - \langle By, y\rangle = \langle Bx, y\rangle + \langle By, x\rangle \text{ und} \\ 0 &= \langle B(x+iy), x+iy\rangle - \langle Bx, x\rangle - \langle By, y\rangle = -i\langle Bx, y\rangle + i\langle By, x\rangle. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\langle Bx, y\rangle = 0$ für alle y und somit $B = 0$. ◁

5.6. Satz. *Es sei $A \in \mathcal{L}(H)$.*

(a) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

(b) *Ist $A = A^*$, so ist $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1\}$.*

Beweis. (a) Zunächst ist nach Cauchy-Schwarz: $|\langle Ax, y\rangle| \leq \|Ax\|\,\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|$, und somit $\sup|\langle Ax, y\rangle| \leq \|A\|$. Nun sei $A \neq 0$ (sonst trivial). Ist $Ax \neq 0$, so ist für $y = Ax/\|Ax\|$: $\langle Ax, y\rangle = \|Ax\|$. Also ist

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y\|\leq 1} |\langle Ax, y\rangle| \geq \sup_{\|x\|\leq 1, Ax\neq 0} \|Ax\| = \|A\|.$$

(b) '$\geq$' Klar.
'$\leq$': Wir setzen $N = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle|$.
Nach (a) ist $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$. Wir können auf der rechten Seite auch schreiben $\sup\{\mathrm{Re}\,\langle Ax, y\rangle : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$, denn wir finden ein $c \in \mathbb{K}$ mit $|c| = 1$ und $\langle Ax, cy\rangle = \bar{c}\langle Ax, y\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Nun definieren wir $\psi : H \times H \to \mathbb{C}$ durch $\psi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$. Es gilt

(i) $\psi(x, y) = \overline{\psi(y, x)} \quad \forall x, y \in H$

(ii) $\psi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\,\psi(x, z) + \mu\,\psi(y, z) \qquad \forall x, y, z \in H, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Es folgt, dass

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\psi(x+y, x+y) - \psi(x-y, x-y)\right) + \frac{i}{4}\left(\psi(x+iy, x+iy) - \psi(x-iy, x-iy)\right).$$

(Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vereinfacht sich dies zu

$$\psi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\psi(x+y, x+y) - \psi(x-y, x-y)\right).\ )$$

Wegen der Selbstadjungiertheit gilt: $\psi(z, z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in H$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\langle Ax, y\rangle &= \mathrm{Re}\,\psi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\psi(x+y, x+y) - \psi(x-y, x-y)\right) \\ &\leq \frac{N}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \overset{\text{Parallelogrammg.}}{=} \frac{N}{4}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2). \end{aligned}$$

Somit ist $\|A\| \leq N$. ◁

5.7. Lemma. *$A \in \mathcal{L}(H)$ sei normal. Dann gilt*

(a) $\|A^*x\| = \|Ax\|$.

(b) *Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und existiert ein $c > 0$ so, dass*

(1) $$\|(\lambda I - A)x\| \geq c\|x\| \quad \text{für alle } x \in H,$$

so ist $(\lambda I - A)$ invertierbar, und $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Beweis. (a) $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, AA^*x\rangle = \|A^*x\|^2$.
(b) Der Operator $\lambda I - A$ ist ebenfalls normal. Nach (a) ist folglich

(2) $$\|(\lambda I - A)^*x\| \geq c\|x\|.$$

Zeige: Bild $(\lambda I - A)$ abgeschlossen. Dazu sei $y_n = (\lambda I - A)x_n$ eine Folge in Bild $(\lambda I - A)$ mit $y_n \to y \in H$.
Wegen (1) ist (x_n) Cauchy-Folge, hat also einen Grenzwert x. Wegen der Stetigkeit von $\lambda I - A$ gilt $(\lambda I - A)x = y$. Somit ist $y \in$ Bild $(\lambda I - A)$ und

$$H = \text{Bild}\,(\lambda I - A) \oplus \text{Bild}\,(\lambda I - A)^{\perp} = \text{Bild}\,(\lambda I - A) \oplus \text{Kern}\,(\lambda I - A)^*.$$

Andererseits: Kern $(\lambda I - A)^* = 0$ wegen (2). Daher ist $H =$ Bild $(\lambda I - A)$. Wegen (1) ist $\lambda I - A$ auch injektiv, also bijektiv. Die Stetigkeit von $(\lambda I - A)^{-1}$ ist automatisch nach 3.8. $\lhd$

Das Spektrum selbstadjungierter Operatoren.

5.8. Satz. *Es sei $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Setze*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle, \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \quad \textit{(beide sind reell nach 5.5).}$$

Dann gilt

(a) $\sigma(A) \subseteq [m, M]$.

(b) $m, M \in \sigma(A)$.

(c) $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ *(Spektralradius von A).*

Beweis. (a) Zeige zunächst $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$: Ist $\lambda \notin \mathbb{R}$, so ist $|\lambda - \overline{\lambda}| > 0$ und

$$\begin{aligned} 0 \leq |\lambda - \overline{\lambda}|\,\|x\|^2 &= |\langle(\lambda I - A)x, x\rangle - \langle(\lambda I - A)^*x, x\rangle| \\ &= |\langle(\lambda I - A)x, x\rangle - \langle x, (\lambda I - A)x\rangle| \\ &\leq 2\|(\lambda I - A)x\|\,\|x\|. \end{aligned}$$

Nach 5.7(b) folgt die Invertierbarkeit von $(\lambda I - A)$ in $\mathcal{L}(H)$. Daher ist $\lambda \notin \sigma(A)$.
Nun sei $\lambda = M + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Dann ist

$$\|(\lambda I - A)x\|\,\|x\| \geq \langle(\lambda I - A)x, x\rangle = \langle\lambda x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle \geq \varepsilon\|x\|^2.$$

Aus 5.7 folgt, dass $\lambda \in \rho(A)$.
Analog: $\lambda = m - \varepsilon$.
(b) Zur Vorbereitung zeige: Es sei $S = S^*$ und $\langle Sx, x\rangle \geq 0$ für alle x. Dann gilt $M_S := \sup_{\|x\|\leq 1}\langle Sx, x\rangle \overset{5.6}{=} \|S\|$ und $M_S \in \sigma(S)$.
Dazu wähle eine Folge (x_n) in H mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Sx_n, x_n\rangle \to M_S$. Dann gilt

$$\|Sx_n - M_Sx_n\|^2 = \|Sx_n\|^2 - 2\langle Sx_n, M_Sx_n\rangle + M_S^2 \leq M_S^2 - 2M_S\langle Sx_n, x_n\rangle + M_S^2 \to 0,$$

und $S - M_S$ ist nicht invertierbar (dann wäre $\|(S - M_S)x\| \geq c\|x\|$ für ein $c > 0$ und alle $x \in H$).
Zurück zu A: Betrachte $S = MI - A$. Dann ist $S = S^*$ und $\langle Sx, x\rangle = M\langle x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle \geq 0$. Ferner: $\sup\{\langle Sx, x\rangle : \|x\| = 1\} = M - m$. Somit ist $(M - m)I - S$ nicht invertierbar bzw. $A - mI$ nicht invertierbar.

Analog folgt für $S = A - mI$, dass $M \in \sigma(A)$.

(c) $\|A\| \overset{5.6}{=} \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1\} \overset{\text{Def.}}{=} \max\{|M|, |m|\} \overset{\text{(a),(b)}}{=} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. ◁

5.9. Folgerung. *Aus* 5.8(*a*) *folgt sofort: Ist* $A \geq 0$ *so ist* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

5.10. Beispiel. $H = \mathbb{C}^2, A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{L}(H)$. Dann ist $\sigma(A) = \{0\}$, aber $\|A\| = 1$, also

$$\|A\| > \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Beachte: Hier ist $A \neq A^*$.

Stetiger Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren.

5.11. Definition. Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren. Eine Abbildung $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt Algebrenhomomorphismus, falls für alle $a, b \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \psi(a+b) &= \psi(a) + \psi(b), \\ \psi(\lambda a) &= \lambda\psi(a), \\ \psi(ab) &= \psi(a)\psi(b). \end{aligned}$$

5.12. Definition und Lemma. Es sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome und $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins I über $\mathbb{C}$ (z.B. $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ für einen komplexen Hilbertraum). Für $A \in \mathcal{A}$ definiere

$$\psi_A : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$$

durch

$$p = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j \mapsto \sum_{j=0}^{n} c_j A^j =: \psi_A(p).$$

Diese Abbildung ist ein Algebrenhomomorphismus.
Ist $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ und $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$, so gilt weiterhin:

$$\psi_A(\overline{p}) = \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j A^j = \sum_{j=0}^{n} (c_j A^j)^* = \psi_A(p)^*.$$

Statt $\psi_A(p)$ schreibt man oft $p(A)$.

Beweis. Klar.

5.13. Spektralabbildungssatz für Polynome. *Mit den Bezeichnungen aus* 5.12 *gilt:*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)).$$

Beweis. '$\subseteq$': Es sei $\mu \in \sigma(p(A))$. Schreibe nach dem Fundamentalsatz der Algebra

$$\mu - p(z) = c \prod (z - \alpha_j) \text{ mit geeigneten } \alpha_j \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}.$$

Ist $c = 0$, so ist $p \equiv \mu$, also $p(A) = \mu I$, und nichts zu zeigen.
Ist $c \neq 0$, so ist für mindestens ein j der Faktor $A - \alpha_j$ nicht invertierbar, sonst wäre nämlich $\mu - p(A) = c \prod (A - \alpha_j)$ invertierbar. Also $\alpha_j \in \sigma(A)$ und $\mu - p(\alpha_j) = 0$, d.h. $\mu \in p(\sigma(A))$.
'$\supseteq$': Es sei $\mu \in p(\sigma(A))$, d.h. $\mu - p(s) = 0$ für ein $s \in \sigma(A)$. Schreibe $\mu - p$ wie oben. Für $c = 0$ ist nichts zu zeigen. Ist $c \neq 0$, so ist $s = \alpha_{j_0}$ für ein j_0, also $\alpha_{j_0} \in \sigma(A)$ und $A - \alpha_{j_0} I$ nicht invertierbar. Betrachte $\mu - p(A) = c \prod (A - \alpha_j I)$. Im Allgemeinen kann man aus der Nichtinvertierbarkeit eines Faktors nicht auf die Nichtinvertierbarkeit des Produkts schließen. In diesem Fall aber schon, denn die Faktoren vertauschen miteinander, und aus der Invertierbarkeit der Komposition $f \circ g$ folgt die Injektivität von g und die Surjektivität von f. Also ist $\mu \in \sigma(p(A))$. ◁

5.14. Lemma. *Es sei* $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$, H *ein* $\mathbb{C}$*-Hilbertraum. Dann gilt:*

$$\|p(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\{|p(t)| : t \in \sigma(A)\},$$

d.h. die Abbildung $p \mapsto p(A)$ *ist isometrisch bezüglich der Normen in* $C(\sigma(A), \mathbb{C})$ *und* $\mathcal{L}(H)$.

Beweis. Zunächst habe p reelle Koeffizienten. Dann ist $\overline{p} = p$, also $p(A) = p(A)^*$, vgl. 5.12. Es folgt aus 5.8:

$$\|p(A)\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(A))\} \overset{5.13}{=} \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Falls p komplexe Koeffizienten hat, so schreiben wir $p = u + iv$, wobei u und v reelle Koeffizienten haben. Dann ist

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\sigma(A)} |p(t)|^2 &= \sup_{t\in\sigma(A)} p(t)\overline{p(t)} = \sup_{t\in\sigma(A)} (u^2(t) + v^2(t)) = \|u^2(A) + v^2(A)\|_{\mathcal{L}(H)}\\ &= \|u(A) - iv(A))(u(A) + iv(A))\|_{\mathcal{L}(H)} = \|p(A)^*p(A)\|_{\mathcal{L}(H)} \overset{5.1(d)}{=} \|p(A)\|^2_{\mathcal{L}(H)}.\end{aligned}$$

◁f

5.15. Satz. *Es sei T eine nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann bilden die Polynome eine dichte Teilmenge von $(C(T,\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$.*

Beweis. Wurde für $T = [a, b]$ in der Übung bewiesen.

Im allgemeinen Fall wähle a, b so, dass $T \subseteq [a, b]$. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze (Übung) können wir f zu einer stetigen Funktion F auf $[a, b]$, fortsetzen. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom p mit $|F(t) - p(t)| \le \varepsilon$ auf $[a, b]$, erst recht $|f(t) - p(t)| \le \varepsilon$ auf T. ◁

5.16. Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren. *Es sei $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$, H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Dann gibt es einen Algebrenhomomorphismus*

$$\varphi_A : C(\sigma(A),\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H),$$

der die Abbildung ψ_A aus 5.12 fortsetzt. Es gilt darüber hinaus

(1) $$\varphi_A(1) = I$$

(2) $$\|\varphi_A(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f\|_{\sup}$$

(3) $$\varphi_A(\overline{f}) = \varphi_A(f)^*$$

(4) $$f \ge 0 \Rightarrow \varphi_A(f) \ge 0.$$

Statt $\varphi_A(f)$ schreibt man meist $f(A)$.

Beweis. Es sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome. Die Menge $\mathcal{P}|_{\sigma(A)}$ ist nach 5.15 dicht in $(C(\sigma(A),\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$. Wegen Lemma 5.14 ist die Abbildung

$$\psi_A : \mathcal{P}|_{\sigma(A)} \to \mathcal{L}(H)$$

stetig; $\mathcal{L}(H)$ ist Banachraum. Nach dem Fortsetzungssatz existiert also eine stetige Fortsetzung

$$\varphi_A : C(\sigma(A),\mathbb{C}) = \overline{\mathcal{P}|_{\sigma(A)}} \to \mathcal{L}(H).$$

Für $p_n \to f$ können wir setzen

(5) $$\varphi_A(f) = \lim \psi_A(p_n).$$

Nach dem Fortsetzungssatz ist φ_A linear. Sind $f, g \in C(\sigma(A))$, so wähle Polynomfolgen $(p_n), (q_n)$ mit $p_n \to f, q_n \to g$. Dann folgt $p_n q_n \to fg$ und somit

$$\varphi_A(fg) = \lim \psi_A(p_n q_n) \overset{5.12}{=} \lim \psi_A(p_n)\psi_A(q_n) = \varphi_A(f)\varphi_A(g).$$

Damit ist φ_A Algebrenhomomorphismus. Zu den restlichen Aussagen

(i) Es ist $\varphi_A(1) = \psi_A(1) = I$, da 1 Polynom.

(ii) Aus 5.14 folgt mit der Stetigkeit der Norm und (5)

$$\|\varphi_A(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim \|\psi_A(p_n)\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim \|p_n\|_{\sup} = \|f\|_{\sup}.$$

(iii) Nach (5) und 5.12 gilt wegen $\overline{p}_n \to \overline{f}$

$$\varphi_A(\overline{f}) = \lim \psi_A(\overline{p}_n) = \lim \psi_A(p_n)^* = \varphi_A(f)^*.$$

(iv) Für $f \geq 0$ folgt aus (3): $\varphi_A(f) = \varphi_A(\overline{f}) = \varphi_A(f)^*$. Ferner ist $f \geq 0$ auf $\sigma(A)$ und somit $\sqrt{f} \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$. Also ist

$$\varphi_A(f) = \varphi_A(\sqrt{f})\varphi_A(\sqrt{f}) \quad \text{und} \quad \varphi_A(\sqrt{f}) = \varphi_A(\sqrt{f})^*.$$

Es folgt

$$\langle \varphi_A(f)x, x\rangle = \langle \varphi_A(\sqrt{f})^* \varphi_A(\sqrt{f})x, x\rangle = \|\varphi_A(\sqrt{f})x\|^2 \geq 0.$$

5.17. Folgerung. Es sei $A = A^* \in \mathcal{L}(H), A \geq 0$. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die k-te Wurzel $A^{1/k} \in \mathcal{L}(H)$, denn nach 5.9 ist $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$, folglich ist $\sqrt[k]{t} \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$. Es gilt

$$(A^{1/k})^k = \varphi_A(\sqrt[k]{t}) \circ \ldots \circ \varphi_A(\sqrt[k]{t}) = \varphi_A((\sqrt[k]{t})^k) = \varphi_A(t) = A.$$

Ist sogar $\sigma(A) \subseteq (0, \infty)$, so existiert auch $\ln A$, da dann $\ln t \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$. Ferner gilt

$$\exp(\ln A) = A:$$

Betrachte die Funktionenfolge (f_n) definiert durch

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\ln^j t}{j!}.$$

Dann gilt $f_n \to \exp \circ \ln$ gleichmäßig auf $\sigma(A)$. Wegen $\exp \circ \ln(t) = t$ folgt

$$A = \varphi_A(t) = \lim \varphi_A(f_n) = \lim \sum_{j=0}^{n} \frac{\ln^j A}{j!} \overset{\text{Def.}}{=} \exp(\ln A).$$

Beachte: $\exp(\ln A)$ ist als Grenzwert der Reihe definiert!

5.18. Lemma. *Die positive Quadratwurzel aus einem positiven Operator ist eindeutig bestimmt: Es sei $B = \sqrt{A}$ die positive Quadratwurzel aus 5.16 und B' ein weiterer positiver Operator in $\mathcal{L}(H)$ mit $B'^2 = A$. Dann ist $B = B'$.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass jeder Operator $T \in \mathcal{L}(H)$, der mit A vertauscht, auch mit B vertauscht. Ist nämlich p_n eine Folge von Polynomen mit $p_n(t) \to \sqrt{t}$ gleichmäßig auf $\sigma(A)$, und ist $TA = AT$, so gilt $Tp_n(A) = p_n(A)T$ für jedes n, somit $TB = BT$.
In unserem Fall ist $B'A = B'B'^2 = B'^2B' = AB'$. Daher ist auch $B'B = BB'$ und

$$(B - B')B(B - B') + (B - B')B'(B - B') = (B^2 - B'^2)(B - B') = 0.$$

Nun sind beide Terme auf der linken Seite positiv. Aus Satz 5.6 ($\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Ax, x\rangle$) folgt, dass beide Null sind. Daher verschwindet auch ihre Differenz, nämlich $(B - B')^3$, und erst recht $(B - B')^4$. Nun ist $B - B'$ selbstadjungiert, also ist nach 5.1(d) $\|(B - B')\|^4 = \|(B - B')^4\| = 0$. Es folgt $B - B' = 0$. ◁

5.19. Spektralabbildungssatz. Ist $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$, H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$, so gilt:

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) = \text{ Wertebereich von } f.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen

$$g \in C(\sigma(A), \mathbb{C}) \text{ invertierbar auf } \sigma(A) \;\Leftrightarrow\; g(A) \text{ invertierbar in } \mathcal{L}(H).$$

„$\Rightarrow$“ Sei $h = 1/g \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$

$$I = \varphi_A(1) = \varphi_A(hg) = \begin{cases} \varphi_A(h)\varphi_A(g) & = & h(A)g(A) \\ \varphi_A(g)\varphi_A(h) & = & g(A)h(A) \end{cases}.$$

Also ist $g(A)$ invertierbar.
“$\Leftarrow$“ (Indirekt) Es sei $g(A)$ invertierbar, aber $g(z_0) = 0$.

Wähle eine Folge $h_n \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$ mit $\|h_n\|_{\sup} = 1$ und $\|h_n g\|_{\sup} \to 0$. Setze $A_n = \varphi_A(h_n)$. Dann ist $\|A_n\|_{\mathcal{L}(H)} = \|h_n\|_{\sup} = 1$, während $\|A_n g(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|h_n g\|_{\sup} \to 0$. Wegen der Invertierbarkeit von $g(A)$ folgt

$$1 = \|h_n\|_{\sup} = \|A_n\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A_n g(A) g(A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|A_n g(A)\|_{\mathcal{L}(H)} \|g(A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0.$$

Widerspruch! $\triangleleft$

5.20. Definition. $U \in \mathcal{L}(H)$ heißt partielle Isometrie, falls ein abgeschlossener Unterraum $M \leq H$ existiert, so dass

$$\|Um\| = \|m\| \ \forall\, m \in M \quad \text{und} \quad U(M^\perp) = 0.$$

Die Polarzerlegung.

5.21. Satz. *Es sei $A \in \mathcal{L}(H)$, H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Dann existiert eine partielle Isometrie $U \in \mathcal{L}(H)$ mit*

$$A = U\sqrt{A^*A}. \tag{1}$$

Ist A invertierbar, so ist U unitär (d. h. $UU^* = U^*U = I$).

Bemerkung:

- A^*A ist positiv und selbstadjungiert, daher existiert $\sqrt{A^*A}$.
- Statt $\sqrt{A^*A}$ schreibt man meist $|A|$.
- Vergleiche $z = re^{i\varphi} = e^{i\varphi}\sqrt{\bar{z}z}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. $B = \sqrt{A^*A}$ existiert nach 5.17 und ist selbstadjungiert nach 5.16(3). Definiere

$$U(Bx) = Ax, \quad x \in H.$$

Dann gilt (1).

Wohldefiniert? Wir haben $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle B^2x, x\rangle \overset{B=B^*}{=} \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2$. Ist also $Bx_1 = Bx_2$, so ist $B(x_1 - x_2) = 0$, somit $A(x_1 - x_2) = 0$ bzw. $Ax_1 = Ax_2$.

Außerdem: U ist Isometrie auf $M = \operatorname{Bild} B$, hat also nach dem Fortsetzungssatz eine isometrische Fortsetzung auf $\overline{M}$. Setze $U|_{M^\perp} = 0$. Damit ist U eine partielle Isometrie.

Ist zusätzlich A invertierbar, so ist A^*A invertierbar. Daher ist $\sqrt{A^*A}$ invertierbar nach dem Spektralsatz. Wegen $U = A\sqrt{A^*A}^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} U^* &= (\sqrt{A^*A}^{\,-1})A^* \\ U^*U &= \sqrt{A^*A}^{\,-1} A^*A \sqrt{A^*A}^{\,-1} = I. \end{aligned}$$

Ebenso $UU^* = I$. $\triangleleft$