4. Hilberträume

4.1. Definition. H sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $H \times H \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften: Für beliebige $x, y, z \in H, \alpha \in \mathbb{K}$

(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $(= \langle y, x\rangle$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R})$.

(ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

(iv) $\langle x, x\rangle > 0$, falls $x \neq 0$.

Es folgt sofort $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,\ \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$.

4.2. Bemerkung.

(a) Durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ist eine Norm auf H definiert.

(b) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ zeigt die Stetigkeit des Skalarprodukts.

(c) Es gilt die Parallelogrammgleichung $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

4.3. Beispiele.

(a) $\mathbb{C}^n$ trägt das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j\overline{y}_j$.

(b) $l^2(\mathbb{Z})$ trägt das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\overline{y}_j$.

(c) $L^2(\Omega)$ trägt das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

4.4. Definition. H sei ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $M, N \subseteq H$.

(i) M heißt orthogonal zu N, falls $\langle m, n\rangle = 0$ für alle $m \in M, n \in N$.

(ii) $M^\perp = \{x \in H : \langle x, m\rangle = 0$ für alle $m \in M\}$.

4.5. Bemerkung.

(a) $M \subseteq H$. Dann ist $M^\perp$ als Durchschnitt abgeschlossener Unterräume (nämlich der Kerne der Abbildungen $x \mapsto \langle x, m\rangle$) abgeschlossen.

(b) $M \subseteq N \subseteq H \ \Rightarrow\ M^\perp \geq N^\perp$.

(c) Aus $M \subseteq \overline{M}$ folgt $\overline{M}^\perp \subseteq M^\perp$. Ist anderseits $x \perp M$, so ist auch $x \perp \overline{M}$. Somit $\overline{M}^\perp = M^\perp$.

4.6. Definition. Es sei H ein Vektorraum mit Skalarprodukt. H heißt Hilbertraum, falls H bezüglich der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vollständig ist.

4.7. Satz. *Es sei M ein Unterraum des Hilbertraums H. Dann gilt*

(a) $H = M \oplus M^\perp$, *falls M abgeschlossen ist. Ferner gilt dann: Ist $x = m + n$ mit $m \in M$ und $n \in M^\perp$, so ist m das eindeutig bestimmte Element von M, für das die Abbildung $m \mapsto \|x - m\|$ minimal wird.*

(b) $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

(c) *Es sei $\{0\} \neq M$ zusätzlich abgeschlossen. Definiere $P : H \to H, x \mapsto m_x$, wobei $x = m_x + n_x$, $m_x \in M, n_x \in M^\perp$. Dann ist*

(1) $$\|x - Px\| = \inf_{z\in M} \|x - z\|.$$

Ferner ist $P \in \mathcal{L}(H)$ mit $P^2 = P$, $\|P\| = 1$. Für alle $x, y \in H$ gilt $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ (orthogonale Projektion)

$$\mathrm{Kern}\, P = (\mathrm{Bild}\, P)^\perp.$$

Beweis. (a) Es sei $x \notin M$. Wir setzen $d = \inf\{\|x-z\| : z \in M\}$. Dann existiert eine Folge (m_j) in M mit $\|x-m_j\| \to d$.
1. Schritt. Wir zeigen, dass (m_j) eine Cauchy-Folge ist: Nach der Parallelogrammgleichung (oder durch Nachrechnen) ist

$$\begin{aligned} 0 &\le \|m_j - m_k\|^2 = \|(m_j - x) - (m_k - x)\|^2 \\ &= 2\underbrace{\|m_j - x\|^2}_{\to d^2} + 2\underbrace{\|m_k - x\|^2}_{\to d^2} - \|(m_j - x) + (m_k - x)\|^2. \end{aligned}$$

Nun ist $\|(m_j - x) + (m_k - x)\|^2 = 4\|\frac{1}{2}(m_j + m_k) - x\|^2 \ge 4d^2$, da $\frac{1}{2}(m_j + m_k) \in M$. Es folgt

$$0 \le \limsup_{j,k\to\infty} \|m_j - m_k\|^2 \le 0.$$

2. Schritt. Da M abgeschlossen und H vollständig ist, existiert ein $m \in M$ mit $m_j \to m$, $\|x - m\| = d$. Da $x \notin M$, ist $d > 0$.
3. Schritt. Zeige: $\langle x - m, m'\rangle = 0\ \forall\ m' \in M$: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(t) &= \|x - m + tm'\|^2 = \langle x - m + tm', x - m + tm'\rangle \\ &= \|x - m\|^2 + t\langle m', x - m\rangle + t\langle x - m, m'\rangle + t^2\|m'\|^2. \end{aligned}$$

Dann ist $f(t) \ge d^2$, f ist stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(t) &= \langle m', x - m\rangle + \langle x - m, m'\rangle + 2t\|m'\|^2 \\ &= 2\mathrm{Re}\,\langle m', x - m\rangle + 2t\|m'\|^2. \end{aligned}$$

In 0 hat f lokales Minimum, also ist $f'(0) = 0$. Es folgt, dass $\mathrm{Re}\,\langle m', x - m\rangle = 0$. Analog: $\mathrm{Im}\,\langle m', x - m\rangle = 0$ (mit $g(t) = \|x - m + itm'\|^2$).
4. Schritt. Schreibe $x = m + (x - m)$. Dann ist $m \in M, x - m \in M^\perp$. Folglich gilt $H = M + M^\perp$. Die Summe ist direkt: Ist $x \in M \cap M^\perp$, so ist $\langle x, x\rangle = 0$, somit $x = 0$. Also ist $H = M \oplus M^\perp$.
5. Schritt. Annahme: Es gibt m_1, m_2 so, dass $\|x - m_1\| = \|x - m_2\| = \min$. Dann ist nach Schritt 3: $x - m_j \in M^\perp$, also $m_1 - m_2 = (x - m_2) - (x - m_1) \in M \cap M^\perp = \{0\}$.
(b) Klar ist, dass $M \subseteq (M^\perp)^\perp$. Da $(M^\perp)^\perp$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{M} \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Umgekehrt sei $z \in (M^\perp)^\perp$. Schreibe $z = m + n$ mit $m \in \overline{M}$ und $n \in \overline{M}^\perp \overset{4.5(c)}{=} M^\perp$. Es folgt, dass $\langle z, n\rangle = 0$ und somit $0 = \langle z, n\rangle = \langle m + n, n\rangle = \langle n, n\rangle$. Daher ist $n = 0$ und $z = m \in \overline{M}$.
(c) Aus (a) wissen wir, dass (1) gilt. Ist $x \in M$, so ist $m_x = x$, also ist $P^2 = P$. Klar: P ist linear.
P ist stetig: Ist $x = m + (x - m)$ mit $x - m \in M^\perp$, so ist

$$\|x\|^2 = \langle m + (x - m), m + (x - m)\rangle = \|m\|^2 + \|x - m\|^2,$$

also ist $\|Px\| = \|m\| \le \|x\|$.
Für $0 \ne x \in M$ gilt $Px = x$, also ist $\|P\| = 1$. Nun seien $x, y \in H, x = m_x + n_x, \varphi = m_y + n_y$ mit $m_x, m_y \in M, n_x, n_y \in N$. Dann ist

$$\langle Px, y\rangle = \langle m_x, m_y + n_y\rangle = \langle m_x, m_y\rangle = \langle m_x + n_x, m_y\rangle = \langle x, Py\rangle.$$

Daraus folgt sofort: $x \in \mathrm{Kern}\,P \;\Leftrightarrow\; x \perp \mathrm{Bild}\,P$.

4.8. Lemma. *Q sei ein Projektor auf dem Hilbertraum H, d. h. $Q \in \mathcal{L}(H)$ mit $Q^2 = Q$. Setze $M = \{x \in H : Qx = x\}$. Dann gilt*

(a) *M abgeschlossen.*
(b) $M = \mathrm{Bild}\,Q = \mathrm{Kern}\,(I - Q)$.
(c) $H = \mathrm{Bild}\,Q \oplus \mathrm{Kern}\,Q$.

(d) *Gilt ferner*

(1) $$\langle Qx, y\rangle = \langle x, Qy\rangle \quad (\textit{Orthogonalität von } Q),$$

so ist $\operatorname{Bild} Q \perp \operatorname{Kern} Q$.

Beweis. (a) Ist $x_n \to x$ eine Folge in M, so gilt wegen der Stetigkeit $Qx_n \to Qx$. Da $Qx_n = x_n$ ist, folgt $x = Qx$. (b), (c) und (d) ebenfalls leicht. $\triangleleft$

4.9. Satz. (Riesz) *H sei ein Hilbertraum.*

(a) *Zu jeder stetigen Linearform $u \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ existiert genau ein $y_u \in H$ mit*

$$u(x) = \langle x, y_u\rangle, \quad x \in H.$$

(b) *Es sei $\theta : H \to H'$ definiert durch*

$$(\theta y)(x) = \langle x, y\rangle.$$

Dann gilt: θ ist bijektiv und anti-linear, d. h.

$$\begin{aligned} \theta(y_1 + y_2) &= \theta(y_1) + \theta(y_2) \\ \theta(\lambda y) &= \overline{\lambda}\theta(y) \end{aligned}$$

für alle $y, y_1, y_2 \in H, \lambda \in \mathbb{K}$. Ferner ist $\|\theta y\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{K})} = \|y\|_H$.

Beweis. (a) *Existenz.* Ist $u = 0$, so wähle $y_u = 0$.
Es sei also $u \neq 0$. Dann ist $N = \operatorname{Kern} u < H$ und abgeschlossen. Nach 4.7 ist $H = N \oplus N^\perp$. Wähle $y \in N^\perp$ mit $u(y) = 1$. Dann gilt für beliebiges $x \in H$

$$x = (x - u(x)y) + u(x)y \in N \oplus N^\perp.$$

Somit ist $\dim N^\perp = 1$.
Setze $y_u = \frac{y}{\langle y,y\rangle}$. Dann gilt

$$\langle x, y_u\rangle = \langle x, \frac{y}{\langle y, y\rangle}\rangle = \langle x - u(x)y + u(x)y, \frac{y}{\langle y, y\rangle)}\rangle = u(x)\langle y, \frac{y}{\langle y, y\rangle}\rangle = u(x).$$

Damit haben wir y_u gefunden.
Eindeutigkeit. Sei $z \in H$ ein beliebiges Element mit

$$\langle x, y_u\rangle = u(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in H.$$

Dann ist $\langle x, y_u - z\rangle = 0\ \forall x \in H$, somit $y_u = z$.
(b) Die Antilinearität folgt sofort aus der Definition. Aus (a) folgt die Bijektivität. Schließlich ist $\|\theta(y)\| = \sup\{|\langle x, y\rangle| : \|x\| \leq 1\} \leq \|y\|$. Für $x = y/\|y\|$ folgt Gleichheit. $\triangleleft$

4.10. Definition. Es sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle, \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Ferner sei $E_\Lambda = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq H$.

(a) E_Λ heißt Orthogonalsystem, falls $\langle e_\lambda, e_{\lambda'}\rangle = 0$ für alle $\lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda' \neq \lambda$.

(b) E_Λ heißt Orthonormalsystem, falls zusätzlich $\langle e_\lambda, e_\lambda\rangle = 1$.

(c) Ist E_Λ Orthonormalsystem und $x \in H$, so heißt $\langle x, e_\lambda\rangle$ λ-ter Fourier-Koeffizient von x.

Bemerkung. Ein Orthonormalsystem besteht aus linear unabhängigen Vektoren: Für $e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n} \in E_\Lambda$ gilt

$$\left\|\sum_{j=1}^n \mu_j e_{\lambda_j}\right\|^2 = \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2.$$

4.11. Satz. *Es sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein Orthonormalsystem, $x \in H$. Dann gilt*

(a) $x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j} \perp e_{\lambda_k}$ *für alle* $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n} \in E_\Lambda$.

(b) $\|x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle x, e_{\lambda_j}\rangle|^2$ *für alle* $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n} \in E_\Lambda$.

(c) $\sum_{j=1}^n |\langle x, e_{\lambda_j}\rangle|^2 \le \|x\|^2$.

(d) *Für höchstens abzählbar viele* λ *gilt* $\langle x, e_\lambda\rangle \neq 0$, *und*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle x, e_\lambda\rangle|^2 \le \|x\|^2 \qquad \text{(Besselsche Ungleichung).}$$

(e) *Die Funktion*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K} &\to [0,\infty) \\ \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \|x - \sum \alpha_j e_{\lambda_j}\|^2 \end{aligned}$$

wird genau für $\alpha_j = \langle x, e_{\lambda_j}\rangle$ *minimal: Es gilt*

$$\Big\|x - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_{\lambda_j}\Big\|^2 = \Big\|x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}\Big\|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle x, e_{\lambda_j}\rangle - \alpha_j|^2 \tag{1}$$

d. h. die Fourierkoeffizienten liefern die bestmögliche Approximation.

Beweis. (a) ist klar. (b) folgt aus (a), (c) aus (b).
(d) Setze $\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda : |\langle x, e_\lambda\rangle| \ge 1/k\}$. Wegen (c) ist Λ_k endlich. Somit ist $\{\lambda \in \Lambda : |\langle x, e_\lambda\rangle| \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^\infty \Lambda_k$ abzählbar. Also ist $\sum_{\lambda\in\Lambda} = \sum_{0\neq\lambda'\in\Lambda}$ eine gewöhnliche Reihe. Die Besselsche Ungleichung folgt aus (c).
(e) Identität (1) folgt, indem man (b) auf $y = x - \sum \alpha_j e_{\lambda_j}$ anwendet und beachtet, dass

$$\sum_{j=1}^n \langle y, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^n \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j} - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^n (\langle x, e_{\lambda_j}\rangle - \alpha_j) e_{\lambda_j}; \text{ somit}$$

$$y - \sum_{j=1}^n \langle y, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j} = x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}.$$

Dann folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \Big\|x - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_{\lambda_j}\Big\|^2 &\overset{\text{def}}{=} \|y\|^2 \overset{(b)}{=} \|y - \sum_{j=1}^n \langle y, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}\|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle y, e_{\lambda_j}\rangle|^2 \\ &= \|x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}\|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle x, e_{\lambda_j}\rangle - \alpha_j|^2 \end{aligned}$$

◁

4.12. Bemerkung. H sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein Orthonormalsystem. Ferner sei $\{e_{\lambda_j} : j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Teilmenge, $\alpha \in l^2(\mathbb{N})$.

(a) Dann ist $s_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_{\lambda_j}$ eine Cauchy-Folge in H, da $\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |\alpha_j|^2$ für $n \ge m$. Die Konvergenz ist invariant unter Umsummierung.

(b) Im allgemeinen ist $\sum \|\langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}\|$ nicht konvergent.

4.13. Satz. *H sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist äquivalent*

(a) $LH\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *ist dicht in* H.

(b) *Für alle* $x \in H$ *gilt* $\sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda = x$.

(c) *Für alle $x, y \in H$ gilt $\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x, e_\lambda\rangle\overline{\langle y, e_\lambda\rangle} = \langle x, y\rangle$.*

(d) *Für alle $x \in H$ gilt $\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_\lambda\rangle|^2$.*

Ist H ein Hilbertraum, so kommt hinzu:

(e) *$\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ist eine maximale orthonormale Menge, d.h. ist $x \perp e_\lambda$ für alle λ, so ist $x = 0$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Es gibt nur abzählbar viele e_{λ_j} mit $\langle x, e_{\lambda_j}\rangle \neq 0$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existieren dann $\alpha_{jk} \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, n_k$, so dass für $k = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\Big\|x - \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk} e_{\lambda_j}\Big\| < \frac{1}{k}.$$

Aus 4.11(e) folgt, dass dann

$$\Big\|x - \sum_{j=1}^{n_k} \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}\Big\|^2 \le \Big\|x - \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_{jk} e_{\lambda_j}\Big\|^2 < \frac{1}{k^2},$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Gilt $x = \sum \langle x, e_\lambda\rangle e_\lambda$, so können nur abzählbar viele $\langle x, e_{\lambda_j}\rangle$ ungleich Null sein. Damit gilt $\sum_{j=1}^N \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j} \to x$.
(b) $\Rightarrow$ (c) klar
(c) $\Rightarrow$ (d) klar
(d) $\Rightarrow$ (b): Da nur abzählbar viele $\langle x, e_{\lambda_j}\rangle$ ungleich Null sind, folgt aus 4.11(b)

$$\|x - \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_{\lambda_j}\rangle e_{\lambda_j}\| = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |\langle x, e_{\lambda_j}\rangle|^2 \to 0.$$

(e) $\Leftrightarrow$ (a) Für $M = LH\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ gilt im Hilbertraum: $M^\perp = \{0\}$, genau dann, wenn $\overline{M} = H$. Stets folgt (e) aus (c). $\triangleleft$

4.14. Definition. Ist H ein Hilbertraum und ist eine der äquivalenten Eigenschaften aus 4.13 erfüllt, so heißt $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Orthonormalbasis.

Beachte. Eine Orthonormalbasis ist im allgemeinen keine Basis im Sinne der linearen Algebra.

4.15. Beispiele für Orthonormalbasen. (Bei geeigneter Wahl der Konstanten c_j)

(a) $H = L^2([0, 2\pi]^k), e_j(t) = c_j e^{ijt}, j \in \mathbb{Z}^k, t \in [0, 2\pi]^k$ (trigonometrische Polynome).

(b) $H = L^2[-1, 1], p_j(t) = c_j \frac{d^j}{dt^j}(t^2 - 1)^j, j \in \mathbb{N}_0$ (Legendre-Polynome).

(c) $H = L^2(\mathbb{R}), \psi_j(t) = e^{x^2/2} \frac{d^j}{dx^j} e^{-x^2/2}, j \in \mathbb{N}_0$ (Hermite-Funktionen).

4.16. Bemerkung. Jeder Hilbertraum hat eine Orthonormalbasis (Lemma von Zorn) und ist damit isomorph zu $\ell^2(\Lambda)$, wobei Λ die Indexmenge der Orthonormalbasis ist.