3. Gleichmässige Beschränktheit. Satz von der offenen Abbildung. Graphensatz.

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

3.1. Lemma. *X sei ein vollständiger metrischer Raum, $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Ferner gelte*

$$\forall\, x \in X\, \exists\, C_x : f(x) \leq C_x\ \forall\, f \in F.$$

Dann existieren eine offene Kugel $U \subseteq X$ und ein $C > 0$

$$f(x) \leq C \quad \textit{für alle } x \in U, f \in F.$$

Beweis. Setze $A_n := \{x \in X : f(x) \leq n\ \forall\, f \in F\}$. Dann gilt $A_n = \overline{A}_n$ (Durchschnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen) und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Nach dem Satz von Baire folgt, dass mindestens ein A_n eine offene Kugel enthält. ◁

3.2. Satz. (Banach-Steinhaus, Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). X sei ein Banachraum, Y ein normierter Raum. Ferner sei $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ eine Familie von punktweise beschränkten Elementen, d.h.

$$\forall\, x \in X\, \exists\, C_x : \|A_\lambda x\|_Y \leq C_x\ \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

Dann existiert $C > 0$ mit $\|A_\lambda\| \leq C$ für alle $\lambda \in \Lambda$, d. h. $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ist gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Setze $f_\lambda(x) = \|A_\lambda x\|$, $\lambda \in \Lambda$. Dann erfüllt $F = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ die Voraussetzung von 3.1. Daher existieren $\varepsilon > 0, x_0 \in X, C > 0 : \|A_\lambda x\| \leq C$ für alle $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Sei nun $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1, 0 < \delta < \varepsilon$. Dann gilt

$$\|A_\lambda x\| = \frac{1}{\delta}\|A_\lambda(\delta x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|A_\lambda(\delta x + x_0)\| + \frac{1}{\delta}\|A_\lambda x_0\| \leq \frac{1}{\delta}C + \frac{1}{\delta}C = \frac{2}{\delta}C.$$

Also $\|A_\lambda\| \leq \frac{2}{\delta}C$ unabhängig von λ. ◁

3.3. Bemerkung. Der Satz von Banach-Steinhaus gilt nicht mehr, wenn X nicht vollständig ist. Betrachte den Raum φ der finiten Folgen

$$\varphi = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_j = 0 \text{ für } j \geq j_0(x)\} \leq l^2$$

mit der l^2-Norm.

Definiere $A_j x = (0, 0, \ldots, 0, j x_j, j x_{j+1}, \ldots)$. Da jedes x nur endlich viele Glieder $\neq 0$ hat, etwa j_0

$$A_j x = 0 \quad j \geq j_0,$$

somit $\|A_j x\| \leq \max\{\|A_1 x\|, \ldots, \|A_{j_0} x\|\} =: C_x < \infty$. Aber: $\|A_j\| = j$ nicht beschränkt für $j \to \infty$.

3.4. Folgerung. "schwach beschränkt ⇒ stark beschränkt". Es sei X ein normierter Raum, nicht notwendig vollständig, $\emptyset \neq M \subseteq X$. Ferner gelte: $\forall\, x' \in X'\, \exists\, C_{x'} : \sup_{x \in M} |\langle x', x\rangle| \leq C_{x'}$. („$M$ schwach beschränkt“). Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|x\| \leq C\ \forall\, x \in M \quad (\text{„}M \text{ stark beschränkt“}).$$

Beweis. X' ist ein Banachraum. Zu $x \in M$ definiere $A_x : X' \to \mathbb{C}$ durch $A_x x' = \langle x', x\rangle$.

Dann ist nach Annahme $|A_x x'| \leq C_{x'}$, also $\{A_x : x \in M\}$ eine punktweise beschränkte Familie in $\mathcal{L}(X', \mathbb{C})$. Nach Banach-Steinhaus ist $\{A_x\}$ gleichmäßig beschränkt:

$$\exists\, C > 0 : \quad \|A_x x'\| \leq C\|x'\|.$$

Es folgt mit 2.35(b)

$$\|x\| = \sup\{|\langle x', x\rangle| : \|x'\| \leq 1\} = \sup\{\|A_x x'\| : \|x'\| \leq 1\} \leq C.$$

◁

3.5. Folgerung. Es sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$. Für alle $x \in X$ und alle $y' \in Y'$ existiere ein $C_{xy'}$ mit

$$\sup\{|\langle y', A_\lambda x\rangle| : \lambda \in \Lambda\} \leq C_{xy'}.$$

Dann existiert $C \geq 0$ mit $\|A_\lambda\| \leq C \,\forall\, \lambda \in \Lambda$. „Schwach beschränkte Familien linearer Abbildungen sind stark beschränkt".

Beweis. Zunächst sei x fest. Dann definiere die Familie

$$\{B^x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{L}(Y', \mathbb{C})$$

durch

$$B^x_\lambda(y') = \langle y', A_\lambda x\rangle.$$

Nach Voraussetzung ist $|B^x_\lambda(y')| \leq C_{xy'}$; nach Banach-Steinhaus (Y' ist vollständig) existiert also ein C_x mit $\|B^x_\lambda\| \leq C_x$. Andererseits ist

$$\|B^x_\lambda\| = \sup_{\|y'\|\leq 1} |\langle y', A_\lambda x\rangle| \overset{2.35}{=} \|A_\lambda x\|.$$

Nochmalige Anwendung von Banach-Steinhaus liefert die Behauptung. $\lhd$

Der Satz von der offenen Abbildung.

3.6. Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt offen, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

3.7. Satz. (Satz von der offenen Abbildung). X, Y seien Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist A offen.

Beweis. 1. *Schritt.* Wir zeigen: Für jedes $\delta > 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$B(0, \varepsilon) \subseteq \overline{A(B(0, \delta))}$$

gilt (d. h. $\overline{A(B(0, \delta))}$ enthält eine offene Menge).
Dazu: Für jedes $x \in X$ gilt $x \in nB(0, \delta)$, falls $n > \|x\|/\delta$. Also

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB(0, \delta).$$

Nun ist A surjektiv, also

$$Y = AX = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nB(0, \delta)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(B(0, \delta)).$$

Erst recht: $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{A(B(0, \delta))}$.
Nach dem Satz von Baire existiert ein n_0 so dass $n_0\overline{AB(0, \delta)}$ eine offene Menge enthält. Folglich enthält $\overline{AB(0, \delta)}$ eine offene Menge

$$\Rightarrow \;\exists\, y \in \overline{AB(0, \delta)}, \varepsilon_1 > 0 : y + B(0, \varepsilon_1) \subseteq \overline{AB(0, \delta)}.$$

Nun gilt auch $-y \in \overline{AB(0, \delta)}$. Also folgt

$$B(0, \varepsilon_1) \subseteq -y + \overline{AB(0, \delta)} \subseteq \overline{AB(0, \delta)} + \overline{AB(0, \delta)} \subseteq \overline{AB(0, 2\delta)}.$$

Mit $\varepsilon = \varepsilon_1/2$ folgt die Behauptung.
2. *Schritt.* Es seien $r_n > 0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} r_n := r < r'$. Nach Schritt 1 finden wir eine Folge $s_n > 0$ (o.B.d.A. $s_n \to 0$ monoton) mit

$$B(0, s_n) \subseteq \overline{AB(0, r_n)}. \tag{1}$$

Wir zeigen nun: $B(0, s_1) \subseteq AB(0, r')$.

Dazu: Wähle $y_0 \in B(0, s_1)$. Dann finden wir nach (1) ein $x_1 \in B(0, r_1)$ so, dass

$$y_0 - Ax_1 \in B(0, s_2).$$

Da $B(0, s_2) \subseteq \overline{AB(0, r_2)}$ ist, finden wir genauso ein $x_2 \in B(0, r_2)$ mit

$$(y_0 - Ax_1) - Ax_2 \subseteq B(0, s_3).$$

Vollständige Induktion liefert uns eine Folge (x_n) mit $x_n \in B(0, r_n)$ und

$$y_0 - A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \in B(0, s_{n+1}). \tag{2}$$

Nun ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} r_j < r'.$$

Wegen der Vollständigkeit von X existiert $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$, und $\|x\| \leq \sum \|x_j\| \leq \sum r_j = r < r'$. Somit ist $x \in B(0, r')$. Aus (2) folgt, dass $y_0 - Ax = 0$, also $y_0 = Ax$ gilt.

3. *Schritt.* Nun sei $U \subseteq X$ offen. Wir zeigen, dass AU offen ist.

Dazu wählen wir ein $y \in AU$. Wegen der Surjektivität finden wir ein x in X mit $Ax = y$. Da U offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $x + B(0, \delta) = B(x, \delta) \subseteq U$. Wir finden also ein $s > 0$ so, dass $B(0, s) \subseteq AB(0, \delta)$ und somit

$$B(y, s) = y + B(0, s) \subseteq A(x + B(0, \delta)) = AB(x, \delta).$$

3.8. Satz. („Automatische Stetigkeit der Inversen"). Es seien X, Y Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ist A bijektiv, so ist A^{-1} stetig.

Beweis. Das Urbild jeder offenen Menge unter A^{-1} ist das Bild einer offenen Menge unter A, also offen. ◁

3.9. Folgerung. (Vergleichbare Normen auf Banachräumen sind äquivalent).

Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Es gelte

(1) $\exists\, C > 0 : \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ (man sagt $\|\cdot\|_1$ sei schwächer als $\|\cdot\|_2$).

(2) X ist bezüglich $\|\cdot\|_1$ und bezüglich $\|\cdot\|_2$ vollständig.

Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d. h. es existieren $c, C > 0$ mit

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2.$$

Beweis. Wende 3.8 an auf $\mathrm{id} : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$. ◁

3.10. Definition. X, Y seien beliebige Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

der Graph von f.

3.11. Bemerkung. Sind X, Y normierte Räume, und ist $A : X \to Y$ linear, so ist $G(A)$ ein Unterraum von $X \times Y$. Wir versehen ihn mit der Norm $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Der Graphensatz.

3.12. Satz. (Graphensatz). X, Y seien Banachräume, $A : X \to Y$ linear. Dann ist äquivalent:

(1) $G(A)$ abgeschlossen in $X \times Y$ (vgl. 3.11).

(2) Aus $\{x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in $Y\}$ folgt $Ax = y$.

(3) Aus $\{x_n \to 0$ in X und $Ax_n \to y$ in $Y\}$ folgt $y = 0$.

(4) A stetig.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) klar, (2) $\Rightarrow$ (3) klar.

(3) $\Rightarrow$ (2): $x_n \to x \;\Rightarrow\; x_n - x \to 0$. Aus $Ax_n \to y$ folgt $A(x_n - x) \to y - Ax$. Nach Voraussetzung: $y - Ax = 0$. Also ist $y = Ax$.

(4) $\Rightarrow$ (3) klar.

(1) $\Rightarrow$ (4) $G(A) \subseteq X \times Y$ ist abgeschlossener Unterraum, also Banachraum. Definiere $\pi : G(A) \to X$ durch $(x, Ax) \mapsto x$. Klar: π ist bijektiv, linear und stetig. Nach dem Satz von der automatischen Stetigkeit der Inversen ist π^{-1} ebenfalls stetig und linear. Die Abbildung $P : G(A) \to Y$ definiert durch $P(x, Ax) \mapsto Ax$ ist ebenfalls stetig ($\|P\| \leq 1!$).

Es folgt: Die Abbildung $A = P\pi^{-1} : x \overset{\pi^{-1}}{\mapsto} (x, Ax) \overset{P}{\mapsto} Ax$ ist stetig. $\triangleleft$

3.13. Bemerkung. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftarrow$ (4) gelten auch *ohne* Vollständigkeit von X, Y.

3.14. Folgerung. X sei ein Banachraum, Y ein normierter Raum. $Z \leq Y$ sei ein Unterraum mit einer Norm $\|\cdot\|_Z$ die stärker ist als $\|\cdot\|_Y$, und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ sei vollständig.

Dann gilt: Ist $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und ist $Ax \in Z$ für jedes $x \in X$, so ist $A \in \mathcal{L}(X, Z)$.

Beweis. (mit Graphensatz) Es gelte $x_n \to 0$ in X und $Ax_n \to z$ in Z. Dann gilt auch $x_n \to 0$ in X und $Ax_n \to z$ in Y. Wegen $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ folgt: $z = 0$. $\triangleleft$

3.15. Bemerkung. Der Satz von der offenen Abbildung und der Graphensatz gelten für Fréchet-Räume, s. Definition 2.14.

3.16. Beispiel. Es sei $X = Y = \varphi =$ der Raum der finiten Folgen mit der l^2-Norm. Ferner sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ eine Folge mit $\lambda_j \neq 0, \lambda_j \to 0$. Wir definieren eine lineare Abbildung $A : \varphi \to \varphi$ durch

$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots).$$

Dann ist A stetig, linear und bijektiv, aber A^{-1} ist nicht stetig, da $A^{-1} e_k = \lambda_k^{-1} e_k$.