Topologische Vektorräume. Wir betrachten in der Funktionalanalysis nur Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

2.1. Definition.

(a) Sind $(X, \mathscr{T}_X), (Y, \mathscr{T}_Y)$ topologische Räume, so erhalten wir auf kanonische Weise eine Topologie auf $X \times Y$: $U \subseteq X \times Y$ heißt offen, falls zu jedem $(x, y) \in U$ offene Umgebungen U_x von x in X und U_y von y in Y existieren mit $U_x \times U_y \subseteq U$. (Zeige: Dies ist tatsächlich eine Topologie.)

(b) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum X heißt topologischer Vektorraum, falls X topologischer Raum ist und die Abbildungen

$$\begin{aligned} X \times X \to X, &\qquad (v, w) \mapsto v + w \\ \mathbb{K} \times X \to X, &\qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v \end{aligned}$$

stetig sind.

2.2. Bemerkung. Man kann zusätzlich fordern, dass jeder Punkt von X eine abgeschlossene Menge ist. Dann ist X automatisch ein Hausdorffraum, s. Rudin, Def. 1.6 und Theorem 1.12.

Halbnormen und Normen. Im Folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

2.3. Definition. X sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty[$ (auch $\| \cdot \| : X \to [0, \infty[$) heißt Halbnorm auf X, falls für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$

(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Wir nennen p eine Norm, falls $p(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. X, versehen mit der (Halb-)Norm p heißt (halb-)normiert. Schreibe (X, p).

2.4. Bemerkung.

(i) (X, p) sei (halb-)normierter Raum. Dann ist durch $\rho(x, y) = p(x - y)$ eine (Halb-)Metrik auf X definiert:

$$\begin{aligned} \rho(x, x) &= p(0) = 0 \quad \text{wegen} \quad 2.3(1) \\ \rho(x, y) &= p(x - y) = |-1| p(y - x) = \rho(y, x) \\ \rho(x, z) &= p(x - z) \leq p(x - y) + p(y - z) = \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

für beliebige $x, y, z \in X$. Ist X normiert, so ist

$$\rho(x, y) = p(x - y) \neq 0 \quad \text{für alle } x \neq y.$$

(ii) Sind (X, p) und (Y, q) (halb-)normierte Räume, so wird $X \times Y$ zu einem (halb-)normierten Raum mit

$$r(x, y) = p(x) + q(y).$$

Sind p, q Normen, so auch r.

Eine Menge $U \subseteq X \times Y$ ist genau dann offen, wenn gilt

$$\forall\, (x, y) \in U\, \exists \varepsilon_x, \varepsilon_y > 0 : B(x, \varepsilon_x) \times B(y, \varepsilon_y) \subseteq U.$$

2.5. Satz. *In einem halbnormierten Raum X sind die Operationen*

$$(x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad (\lambda, x) \mapsto (\lambda x) \quad \lambda \in \mathbb{K}, x, y \in X$$

stetig, d. h. ein halbnormierter Raum ist ein topologischer Vektorraum.

Beweis. Nach 1.19 genügt es zu zeigen, dass aus $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \times X$ bzw. aus $x_n \to x$ in X und $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$ folgt

$$x_n + y_n \to x + y, \quad \lambda_n x_n \to \lambda x.$$

Dies ist klar, weil im ersten Fall gilt $p(x_n - x) \to 0$ und $p(y_n - y) \to 0$ und daher

$$\begin{array}{rcl} p((x_n + y_n) - (x + y)) & \leq & p(x_n - x) + p(y_n - y) \to 0; \text{ im zweiten Fall gilt} \\ p(\lambda_n x_n - \lambda x) & \leq & p(\lambda_n(x_n - x)) + p((\lambda_n - \lambda)x) \\ & = & \underbrace{|\lambda_n|}_{\text{beschränkt}} \underbrace{p(x_n - x)}_{\to 0} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\to 0} \underbrace{p(x)}_{\text{beschränkt}} \to 0. \end{array}$$

◁

2.6. Definition. Ein halbnormierter Vektorraum (X, p) heißt vollständig, falls X als halbmetrischer Raum mit der Halbmetrik

$$\rho(x, y) = p(x - y)$$

vollständig ist.

Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

2.7. Beispiel.

(a) Ist K ein kompakter topologischer Raum, so ist der Raum $(C(K), \|\cdot\|_{\sup})$ aller auf K stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen ein Banachraum (der Beweis ist derselbe wie für $C([a, b])$).

(b) Auf $C([0, 1])$ kann man eine weitere Norm definieren durch

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Damit ist $C([0, 1])$ normiert, aber nicht vollständig:

Es sei $f_k \in C([0, 1])$ gegeben durch $f_k(t) = \begin{cases} k & 0 \leq t \leq k^{-2} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{sonst} \end{cases}$.

f_k ist Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_1$, hat jedoch keinen Grenzwert in $C([0, 1])$. (Wieso?)

(c) Ist Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, so ist $\mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit der Norm $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}$ ein Banachraum.

(d) $l^p(\mathbb{Z}^k), 1 \leq p \leq \infty$ und $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, Ω Maßraum, sind Banachräume.

2.8. Lemma. *Sind (X, p) und (Y, q) Banachräume, so wird $X \times Y$ mit der Norm $r(x, y) = p(x) + q(y)$ ein Banachraum.*

Beweis. Ist $((x_n, y_n))$ eine Cauchyfolge in $X \times Y$, so gilt $p(x_k - x_l) \leq r((x_k, y_k) - (x_l, y_l)) \overset{k,l\to\infty}{\to} 0$. Daher ist (x_k) eine Cauchyfolge, ebenso (y_k). Aus der Vollständigkeit von X und Y folgt die Existenz von Grenzwerten $x \in X$ und $y \in Y$. Dann gilt $r((x, y) - (x_n, y_n)) \leq p(x - x_n) + q(y - y_n) \to 0$. ◁

2.9. Satz. *$(X, p), (Y, q)$ seien halbnormierte Räume, $T \in \operatorname{Hom}(X, Y)$. Dann sind äquivalent:*

(1) *T ist stetig.*

(2) *T ist stetig in 0.*

(3) *T ist beschränkt, d.h. $\exists K \geq 0 : q(Tx) \leq Kp(x)$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) trivial. (3) $\Rightarrow$ (1): Wegen $q(Tx_1 - Tx_2) \leq Kp(x_1 - x_2)$ ist T stetig (sogar gleichmäßig).

(2) $\Rightarrow$ (3): Zunächst folgende Beobachtung: Ist T stetig in 0 und $p(x) = 0$, so ist $q(Tx) = 0$ (das folgt sofort aus der $\varepsilon - \delta$-Charakterisierung der Stetigkeit, weil $p(x - 0) = 0$ und somit $q(Tx - T0) < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$). Für $p(x) = 0$ ist also nichts zu zeigen.

Nun nehmen wir an, es gebe kein solches K. Dann existiert zu jedem n ein x_n mit $p(x_n) = 1$ und
$$q(Tx_n) \geq n = n\,p(x_n).$$
Setze $y_n = x_n/n$. Dann gilt $p(y_n) = 1/n$, also $y_n \to 0$, aber $Ty_n \not\to 0$, da $q(Ty_n) \geq 1$. Widerspruch! $\triangleleft$

2.10. Lemma. *(X, p) sei ein halbnormierter Raum, U Unterraum von X. Dann ist auch $\overline{U}$ Unterraum von X.*

Beweis. Klar $\overline{U} \neq \emptyset$. Seien $u \in \overline{U}, \lambda \in \mathbb{K}$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subseteq U$ mit $u_n \to u$. Es folgt $\lambda u_n \to \lambda u$, folglich ist $\lambda u \in \overline{U}$ nach 1.8(d). Ebenso: Sind $u, v \in \overline{U}, u_n \to u, v_n \to v$ mit $u_n, v_n \in U$, dann gilt $u_n + v_n \to u + v$; also ist $u + v \in \overline{U}$. $\triangleleft$

2.11. Satz. *Es sei (X, p) ein halbnormierter Raum, Y ein Banachraum, $U \leq X$, $S \in \mathrm{Hom}\,(U, Y)$. Ferner existiere ein $L \geq 0$ mit*

(1) $$\|Sx\|_Y \leq Lp(x), \quad x \in U.$$

Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{S} \in \mathrm{Hom}\,(\overline{U}, Y)$ mit $\tilde{S}x = Sx$ für alle $x \in U$; es gilt $\|\tilde{S}x\|_Y \leq Lp(x)$, $x \in \overline{U}$.

Beweis. Aus (1) folgt
$$\|Sx_1 - Sx_2\|_Y = \|S(x_1 - x_2)\|_Y \leq Lp(x_1 - x_2).$$
Also ist S gleichmäßig stetig. Nach dem Fortsetzungssatz 1.26 existiert genau eine Fortsetzung $\tilde{S}$ von S auf $\overline{U}$. Es ist $\tilde{S}(x) = \lim Sx_k$ für jede beliebige Folge $x_k \to x$.

Zeige: $\tilde{S}$ ist linear. Dazu seien $x, x' \in \overline{U}, (x_n), (x'_n) \subseteq U, x_n \to x, x'_n \to x'$. Dann gilt $(x_n + x'_n) \to x + x', \lambda x_n \to \lambda x$. Daher ist $\tilde{S}(x + x') = \lim S(x_n + x'_n) = \lim Sx_n + \lim Sx'_n = \tilde{S}x + \tilde{S}x'$, $\tilde{S}(\lambda x) = \lim S(\lambda x_n) = \lambda \lim Sx_n = \lambda \tilde{S}x$.

Nach dem Fortsetzungssatz gilt
$$\|\tilde{S}x - \tilde{S}x'\|_Y \leq Lp(x - x').$$
Für $x' = 0$ folgt die Zusatzbedingung. $\triangleleft$

Systeme von Halbnormen.

2.12. Definition. Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathscr{P}$ eine Familie von Halbnormen auf X, die separierend ist, d.h. zu jedem $0 \neq x \in X$ existiert ein $p \in \mathscr{P}$ mit $p(x) \neq 0$. Für beliebiges $p \in \mathscr{P}$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir
$$V(p, \varepsilon) = \{y \in X : p(y) < \varepsilon\}$$
und nennen eine Teilmenge U von X offen, falls zu jedem $x \in U$ endlich viele $p_1, \ldots, p_N$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ existieren, so dass
$$x + (V(p_1, \varepsilon_1) \cap \ldots \cap V(p_N, \varepsilon_N)) \subseteq U.$$
Dies liefert die sog. von $\mathscr{P}$ erzeugte Topologie.

2.13. Satz. *Es sei $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ ein abzählbares separierendes System von Halbnormen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Wir definieren eine Metrik d durch*
$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)}.$$
Dann stimmt die von $\mathscr{P}$ erzeugte Topologie mit der von d erzeugten überein, d.h. eine Menge ist genau dann offen im Sinn von Definition 2.12, wenn sie offen bezüglich d ist.

Eine Folge (x_k) ist genau dann konvergent gegen $x \in X$, wenn $p_j(x - x_k) \to 0$ für jedes j.

Beweis. Übung $\triangleleft$

2.14. Definition. Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum X mit einem abzählbaren separierenden System von Halbnormen, der in der erzeugten Topologie vollständig ist, nennt man einen *Fréchet-Raum.*

Alternativ definiert man einen Fréchet-Raum als einen topologischen Vektorraum mit einer Topologie, die von einer vollständigen, translationsinvarianten Metrik d (d.h. $d(x,y) = d(x+z, y+z)$) erzeugt wird, die ferner eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen hat (das nennt man auch einen lokalkonvexen Raum. Es ist klar, dass die obige Definition diese liefert, für die Umkehrung muss man etwas arbeiten.

2.15. Beispiel.

(a) Ist X eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$, so ist $C^\infty(X)$ ein Fréchetraum. Man wählt eine Ausschöpfung $X = \bigcup K_j$ von X durch kompakte Mengen $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ und setzt $p_j(f) = \|f\|_{\sup,K_j}$, $j = 1, 2, \ldots$.

(b) Der Raum der schnellfallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Fréchetraum mit den Halbnormen $p_j(f) = \max_{|\alpha|+|\beta|\le j} \|x^\alpha D_x^\beta f\|_{\sup}$.

(c) Ist Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, so bilden die holomorphen Funktionen auf Ω einen Fréchetraum mit den Halbnormen $_j$ analog wie bei C^∞ definiert für eine Ausschöpfung durch kompakte Mengen.

Normierte Algebren. Das Spektrum beschränkter Operatoren.

2.16. Definition. (X, p), (Y, q) seien normierte Räume.

(a) $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichne die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y.

(b) Für $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ setze $\|A\| := \sup\{\frac{q(Ax)}{p(x)} : x \neq 0\}$.

2.17. Lemma. *(X, p) und (Y, q) seien normierte Räume. Dann ist*

$$\sup_{x\neq 0} \frac{q(Ax)}{p(x)} = \sup_{p(x)\le 1} q(Ax) = \sup_{p(x)=1} q(Ax).$$

Beweis. Bezeichnen wir die drei Suprema mit s_1, s_2 und s_3. Für $x \neq 0$ setze $y = x/p(x)$. Dann ist $p(y) = 1$ und $q(Ax)/p(x) = q(Ay)$, also $s_1 \le s_3 \le s_2$. Andererseits ist $s_2 \le \sup_{p(y)\le 1} \frac{q(Ay)}{p(y)} \le s_1$. Es folgt $s_1 = s_2 = s_3$. $\lhd$

2.18. Lemma. *(X, p), (Y, q) seien normierte Räume. Für $A, B \in \mathcal{L}(X, Y), \lambda \in \mathbb{K}$ definiere*

$$\begin{aligned} A + B \in \mathcal{L}(X, Y) \quad &\text{durch} \quad (A + B)(x) = Ax + Bx \\ \lambda A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad &\text{durch} \quad (\lambda A)(x) = \lambda(Ax). \end{aligned}$$

Dann wird $\mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|\cdot\|$ zu einem normierten Raum.

Beweis.

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{q(\lambda Ax)}{p(x)} = \sup_{x\neq 0} |\lambda| \frac{q(Ax)}{p(x)} = |\lambda|\|A\| \\ \frac{q((A+B)x)}{p(x)} &\le \frac{q(Ax)}{p(x)} + \frac{q(Bx)}{p(x)} \le \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Es folgt $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$. $\lhd$

2.19. Lemma. *(X, p), (Y, q), (Z, r) seien normierte Räume. Ist $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ und $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist $AB \in \mathcal{L}(X, Z)$ mit $\|AB\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.*

Beweis. Es ist

$$\frac{r(ABx)}{p(x)} \le \frac{\|A\|\, q(Bx)}{p(x)} \le \|A\|\, \|B\|$$

und daher $\|AB\| \le \|A\|\, \|B\|$. $\lhd$

2.20. Definition. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{A}$ heißt Algebra, falls gilt

(1) Auf $\mathcal{A}$ ist eine Multiplikation
$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$
definiert, wobei für alle $A, B, C \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(2) $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativgesetz).

(3) $A(B + C) = AB + AC$ (Distributivgesetz).

(4) $(A + B)C = AC + BC$ (Distributivgesetz).

(5) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

$\mathcal{A}$ heißt Algebra mit Eins (oder unitale Algebra), falls es ein Element $I \in \mathcal{A}$ gibt mit $AI = IA = A$.

$\mathcal{A}$ heißt normierte Algebra, falls $\mathcal{A}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum normiert ist und $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$ gilt.

$\mathcal{A}$ heißt normierte Algebra mit Eins, falls zusätzlich $I \in \mathcal{A}$ existiert mit $IA = I = A$ und $\|I\| = 1$.

$\mathcal{A}$ heißt Banachalgebra (mit Eins), falls $\mathcal{A}$ zusätzlich als $\mathbb{K}$-Vektorraum vollständig ist.

2.21. Beispiel.

(a) Es sei K ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $C(K)$ mit der punktweisen Multiplikation und der Supremumsnorm eine Banachalgebra mit Eins (die Eins ist die konstante Funktion 1).

(b) Ist X ein normierter Raum, so ist $\mathcal{L}(X)$ eine normierte Algebra. Ferner gilt:

2.22. Lemma. *Ist X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X, Y)$ mit der Operatornorm ein Banachraum. Insbesondere gilt also :*

(i) $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ *ein Banachraum, falls X normiert (nicht notwendig vollständig)ist.*

(ii) *Ist X Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X)$ Banachalgebra mit Eins.*

Beweis. Es sei $(A_n) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ eine Cauchyfolge, d.h.
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 : \|A_n - A_m\| < \varepsilon \, \forall \, n, m \ge n_0.$$
Dann ist $\|A_n x\|$ eine Cauchy-Folge in Y für jedes $x \in X$, da
$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \, \|x\|.$$
Da Y vollständig ist, existiert
$$Ax = \lim A_n x.$$
Aus den Grenzwertsätzen folgt die Linearität von A.
Ferner konvergiert A_n gegen A, denn für $m, n \ge n_0$ gilt
$$\|Ax - A_m x\| = \lim \|A_n x - A_m x\| \le \varepsilon \|x\|, \text{ d.h. } \|A_m - A\| \le \varepsilon.$$
Weiterhin ist $\|Ax\| \le \|Ax - A_m x\| + \|A_m x\| \le (\varepsilon + \|A_m\|)\|x\|$; somit ist A beschränkt. $\triangleleft$

Der folgende Satz ist fundamental für Invertierbarkeit in unitalen Banachalgebren:

2.23. Satz. *$\mathcal{A}$ sei Banach-Algebra mit Eins.*

(a) *Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $\|A\| < 1$, so ist $I - A$ invertierbar. Es gilt $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ (Neumannsche Reihe) und*
$$\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

(b) *Die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ ist offen; es gilt: Ist $A \in \mathcal{A}$ invertierbar und $B \in \mathcal{A}$ mit $\|B - A\| < 1/\|A^{-1}\|$, so ist B invertierbar und*

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2 \frac{\|B - A\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|B - A\|}.$$

Die Inversion ist also stetig auf der Gruppe.

Beweis. (a) Zeige: $S_n := \sum_{k=0}^n A^k$ ist Cauchy-Folge.

$$\|S_n - S_m\| \leq \| \sum_{k=m+1}^{n} A^k \| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \leq \frac{\|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|} \to 0.$$

Setze $S := \lim S_n$. Dann gilt $S(I - A) = (I - A)S = I$, weil

$$S_n(I - A) = (I + A + \ldots + A^n)(I - A) = I - A^{n+1} = (I - A)S_n.$$

(b) Schreibe $B = A - (A - B) = A(I - A^{-1}(A - B))$. Nach Voraussetzung ist

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A - B\| < 1;$$

folglich ist $I - A^{-1}(A - B)$ nach (a) invertierbar, somit auch B. Ferner gilt

$$B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1}(A - B))^k A^{-1},$$

also

$$B^{-1} - A^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (A^{-1}(A - B))^k A^{-1} = A^{-1}(A - B) \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1}(A - B))^k A^{-1}$$

und

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A - B\| \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \, \|A - B\|} \|A^{-1}\|.$$

◁

2.24. Definition. Es sei $\mathcal{A}$ Banach-Algebra mit Eins über $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existiert nicht}\} \quad \text{heißt Spektrum von } A \\ \rho(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existiert}\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \quad \text{heißt Resolvente von } A. \end{aligned}$$

2.25. Bemerkung. Im endlich-dimensionalen Fall definiert man das Spektrum als die Menge der Eigenwerte, d.h. als $\{\lambda : \exists x \neq 0 \text{ mit } Ax = \lambda x\}$.
Dies ist im unendlich-dimensionalen Fall i.Allg. eine kleinere Menge.

2.26. Beispiel. Auf $C([0,1])$ betrachte den Operator A, der mit der Funktion $g(t) = t$ multipliziert: $(Af)(t) = tf(t)$. Dann ist $\sigma(A) = [0,1]$, aber A hat keine Eigenwerte (wieso?).

Ein leichter, aber wichtiger Satz zur Struktur des Spektrums:

2.27. Satz. *$\mathcal{A}$ sei eine Banach-Algebra mit Eins über $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $\sigma(A)$ kompakt. Später wird gezeigt: $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Beweis. (a) Für $|\lambda| > \|A\|$ ist $\lambda I - A$ invertierbar, da $\lambda I - A = \lambda(I - \lambda^{-1}A)$ und $\|\lambda^{-1}A\| = \|A\|/|\lambda| < 1$. Folglich ist $\sigma(A)$ beschränkt.
Nach 2.23(b) ist $\rho(A)$ offen, also $\sigma(A)$ abgeschlossen. Nach dem Satz von Heine-Borel ist also $\sigma(A)$ kompakt.

Die Sätze von Hahn-Banach.

2.28. Definition. Ist X topologischer Vektorraum, so heißt $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ der Dualraum zu X. Nach 2.22: Ist X normiert, so ist X' ein Banachraum.

2.29. Definition. Eine Menge E mit einer Relation $\leq$ heißt halbgeordnet, falls gilt

(i) Für jedes $a \in E$ gilt $a \leq a$ (Reflexivität).

(ii) Sind $a, b \in E$ und gilt $a \leq b$ und $b \leq a$, so ist $a = b$ (Antisymmetrie).

(iii) Sind $a, b, c \in E$ und gilt $a \leq b$ und $b \leq c$, so gilt $a \leq c$ (Transitivität).

Gilt sogar

(iv) Für jede Wahl von $a, b \in E$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$, so heißt E geordnet und $\leq$ Ordnungsrelation.

Ist $\emptyset \neq A \subseteq E$, so heißt $S \in E$ obere Schranke für A, falls $a \leq S$ für alle $a \in A$.

Ein Element $m \in E$ heißt maximal, falls kein $x \in E$ existiert mit $m \leq x$ und $m \neq x$.

Beispiel. E Menge, $\mathcal{P}(E)$ Potenzmenge, halbgeordnet bezüglich „$\subseteq$“.

2.30. „Lemma von Zorn“. Es sei E halbgeordnet, und jede geordnete Teilmenge habe eine obere Schranke. Dann hat E ein maximales Element.

Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wahlordnungssatz. Vergleiche etwa Dugundj: *Topology*. Wir benutzen es hier ohne Beweis.

2.31. Satz. (Hahn-Banach: Fortsetzung). Es sei (X, p) ein halbnormierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, M Unterraum von X. Ferner sei $l : M \to \mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit $\operatorname{Re} l(m) \leq p(m)$ für jedes $m \in M$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{K}$ von l mit

$$\operatorname{Re} L(x) \leq p(x), \quad x \in X. \tag{1}$$

Bemerkung. Hier muss p keine Halbnorm sein. Es langt, dass $p : M \to \mathbb{R}$ (nicht notwendig $\mathbb{R}_{\geq 0}$!) abbildet und

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad x \in X, \lambda \geq 0.$

Das ist für Anwendungen interessant, und wir werden nur diese sog. Sublinearität verwenden.

Beweis. Zunächst sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist $\operatorname{Re} l = l$ und $\operatorname{Re} L = L$. Wir definieren

$$E = \{(G, l_G) : M \leq G \leq X, l_G \text{ Fortsetzung von } l, l_G(g) \leq p(g) \text{ für alle } g \in G\}.$$

Auf E definiere die Halbordnung

$$(G_1, l_{G_1}) \leq (G_2, l_{G_2}) \quad \text{falls} \quad (G_1 \leq G_2 \text{ und } l_{G_2} \text{ Fortsetzung von } l_{G_1}).$$

Es sei $\mathcal{L}$ geordnete Menge in E. Setze

$$G_{\mathcal{L}} = \bigcup_{(G, l_G) \in \mathcal{L}} G \quad \text{und} \quad l_{G_{\mathcal{L}}}(x) = l_G(x) \quad \text{falls} \quad x \in G.$$

Damit gilt $l_{G_{\mathcal{L}}}(x) \leq p(x)$ für $x \in G_{\mathcal{L}}$ und $(G_{\mathcal{L}}, l_{G_{\mathcal{L}}})$ ist obere Schranke für $\mathcal{L}$. Nach Zorn hat also E ein maximales Element (B, l_B).

Zeige: $B = X$ indirekt: Angenommen, es gebe ein x_0 in $X \setminus B$. Dann konstruieren wir eine Fortsetzung $\tilde{l}$ von l_B auf $\operatorname{LH}\{x_0\} \oplus B$ wie folgt:

Es seien $z, z' \in B$. Dann gilt nach Annahme:

$$l_B(z) + l_B(z') = l_B(z + z') \overset{\text{Ann.}}{\leq} p(z + z') \leq p(z + x_0) + p(z' - x_0).$$

Folglich gilt:

$$l_B(z') - p(z' - x_0) \leq p(z + x_0) - l_B(z).$$

Da '$\leq$' stabil ist unter Supremum und Infimum, existiert ein γ in $\mathbb{R}$ mit

$$\sup_{z'\in B} l_B(z') - p(z'-x_0) \leq \gamma \leq \inf_{z\in B} p(z+x_0) - l_B(z).$$

Wir setzen dann

$$\tilde{l}(\lambda x_0 + z) = \lambda\gamma + l_B(z), \quad \lambda \in \mathbb{R}, z \in B.$$

Damit ist $\tilde{l}$ eine lineare Fortsetzung von l_B. Wir zeigen, dass auch für $\tilde{l}$ Eigenschaft (1) gilt, d.h.

$$\tilde{l}(\lambda x_0 + z) \leq p(\lambda x_0 + z) \text{ für alle } z \in B, \text{ bzw.}$$

$$\lambda\gamma + l_B(z) \leq p(\lambda x_0 + z).$$

Dazu: Für $\lambda > 0$ folgt aus $\gamma \leq p\left(x_0 + \frac{z}{\lambda}\right) - l_B\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, dass $\tilde{l}(\lambda x_0 + z) = \lambda\gamma + l_B(z) \leq p(\lambda x_0 + z)$.
Für $\lambda < 0$ setze $\mu = -\lambda > 0$. Dann folgt aus

$$l_B\left(\frac{z}{\mu}\right) - p\left(\frac{z}{\mu} - x_0\right) \leq \gamma, \text{ dass}$$

$$\lambda\gamma + l_B(z) = -\mu\gamma + \mu l_B\left(\frac{z}{\mu}\right) \leq \mu p\left(\frac{z}{\mu} - x_0\right) = p(z + \lambda x_0).$$

Damit haben wir l_B auf einen größeren Unterraum fortgesetzt. Widerspruch!
Den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ führt man mit dem folgenden Lemma auf den reellen Fall zurück. (Ende des Beweises nach dem Beweis von 2.32.) $\triangleleft$

2.32. Lemma. *X sei $\mathbb{C}$-Vektorraum (also auch $\mathbb{R}$-Vektorraum).*

(a) *Sei $l : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear. Dann können wir l schreiben in der Form $l(x) = l_1(x) + il_2(x)$ (Zerlegung in Real- und Imaginärteil), und es gilt*

$$\begin{array}{rcl} l_1, l_2 & & \text{sind } \mathbb{R}-\text{linear} \\ l_1(ix) & = & -l_2(x) \\ l_2(ix) & = & l_1(x). \end{array}$$

(b) *Ist $u : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear, so können wir durch*

$$l(x) = u(x) - iu(ix)$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung definieren.

Beweis. (a) $l_1(ix) + il_2(ix) = l(ix) = il(x) = il_1(ix) - l_2(x)$
(b) Mit der Definition gilt $l(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = i(u(x) - iu(ix))$. $\triangleleft$

Zum Abschluss des Beweises des Satzes von Hahn-Banach für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerlege l nach 2.32(a) in Real- und Imaginärteil, setze den Realteil fort und konstruiere dazu den Imaginärteil nach 2.32(b).

2.33. Satz. *$(X, \|\cdot\|_X)$ sei ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $M \leq X$. Wir machen M zu einem normierten Raum durch $\|m\|_M = \|m\|_X$. Dann gilt: Jedes $l \in \mathcal{L}(M, \mathbb{K})$ läßt sich normgleich auf X fortsetzen.*

Beweis. Definiere $p : X \to \mathbb{R}$ durch $p(x) = \|l\|\,\|x\|_X$. Damit wird p eine Halbnorm; es gilt $|l(x)| \leq p(x)$ für jedes $x \in M$. Nach Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $L : X \to \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re} L(x) \leq p(x) = \|l\|\,\|x\|_X$. Nun gilt für geeignetes $\varphi \in [0, 2\pi)$:

$$|L(x)| = e^{i\varphi}L(x) = L(e^{i\varphi}x) \overset{\text{reell}}{=} \operatorname{Re} L(e^{i\varphi}x) \leq p(e^{i\varphi}x) = p(x) = \|l\|\|x\|.$$

Also ist $\|L\| \leq \|l\|$; es gilt „=“, da Fortsetzung. $\triangleleft$

2.34. Schreibweise. Ist X normierter Raum, $l \in X'$, so schreibt man statt $l(x)$ oft $\langle l, x\rangle$. Die Abbildung
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \to \mathbb{K}$$
ist bilinear (klar) und stetig, da
$$|\langle l, x\rangle| \leq \|l\|_{X'} \|x\|_X.$$

2.35. Satz. *X sei ein normierter Raum.*

(a) *Zu jedem $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existiert $u \in X'$ mit $\|u\|_{X'} = 1, u(x_0) = \|x_0\|$.*

(b) *Für jedes $x_0 \in X$ gilt*
$$\|x_0\| = \sup\{|\langle u, x_0\rangle| : u \in X', \|u\| \leq 1\}.$$

Beweis. (a) Setze $M = LH\{x_0\}$, definiere $l : M \to \mathbb{K}$ durch $l(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|$. Dann ist $|l(x)| = \|x\|$, also $\|l\| = 1$. Daher existiert eine Fortsetzung mit Norm 1.
(b) Nach (a) gilt $\|x_0\| \leq \sup_{\|u\|_{X'} \leq 1} |\langle u, x_0\rangle|$. Andererseits ist $|\langle u, x_0\rangle| \leq \|u\|_{X'}\|x_0\|$, also folgt Gleichheit. $\lhd$

2.36. Definition.

(a) Wir nennen eine Teilmenge M eines Vektorraums konvex, falls mit m_1 und m_2 auch $\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2$ für $0 < \lambda < 1$ zu M gehören.

(b) Zu einer beliebigen Teilmenge M eines $\mathbb{K}$-Vektorraums X definiert man das Minkowski-Funktional $p_M : X \to [0, \infty]$ durch
$$p_M(x) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in M\}.$$

(c) Man nennt eine Teilmenge M absorbierend, falls $p_M(x)$ stets endlich ist.

2.37. Lemma. *Wir verwenden die Bezeichnungen von 2.36*

(a) *Ist $B(0, \varepsilon) \subseteq M$ für ein $\varepsilon > 0$, so ist $p_M(x) \leq \|x\|/\varepsilon$.*

(b) *Ist M offen und konvex mit $0 \in M$, so ist $M = p_M^{-1}([0, 1))$.*

(c) *Unter den Voraussetzungen von (b) gilt zusätzlich $p_M(cx) = cp_M(x)$ für $c \geq 0$ und $p_M(x + y) \leq p_M(x) + p_M(y)$ (Sublinearität).*

Beweis. (a) Klar.
(b) Ist $x \in M$, so ist wegen der Offenheit auch $(1 + \varepsilon)x \in M$ für geeignetes $\varepsilon > 0$. Damit ist $p_M(x) \leq 1/(1+\varepsilon) < 1$. Ist umgekehrt $x \in X$ mit $p_M(x) < 1$, so existiert ein $\lambda < 1$ mit $x/\lambda \in M$. Da 0 in M liegt, folgt aus der Konvexität, dass $\lambda x/\lambda + (1-\lambda)0 = x \in M$ liegt.
(c) Klar ist die erste Identität. Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wir finden dann $\lambda, \mu > 0$ so, dass $\lambda \leq p_M(x) + \varepsilon$ und $x/\lambda \in M$ sowie $\mu \leq p_M(y) + \varepsilon$ und $y/\mu \in M$. Aus der Konvexität von M folgt, dass
$$M \ni \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{y}{\mu} = \frac{x + y}{\lambda + \mu}.$$
Daher ist $p_M(x + y) \leq \lambda + \mu \leq p_M(x) + p_M(y) + 2\varepsilon$. $\lhd$

2.38. Satz. *Ist X ein normierter Raum und $V \subseteq X$ offen und konvex mit $0 \notin V$, so existiert ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < 0$ für alle $x \in V$.*

Beweis. Wie beim Beweis des Satzes von Hahn-Banach können wir uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken.

Wir wählen einen beliebigen Punkt $w \in V$ und setzen $U = \{v - w : v \in V\}$. Dann ist U offen und konvex. Ferner ist $0 \in U$ und $-w \notin U$ (sonst wäre $0 \in V$). Auf $W = LH(w)$ definieren wir nun ein Funktional l durch

$$l(\lambda w) = -\lambda p_U(-w). \tag{1}$$

Wir überzeugen uns, dass

$$l(z) \le p_U(z), \quad z \in W:$$

Für $\lambda \ge 0$ folgt dies sofort aus der Definition, da $p_U \ge 0$. Für $\lambda < 0$ ist

$$l(\lambda w) = -\lambda p_U(-w) = p_U(\lambda w).$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert also eine Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$ von l auf X mit $L(x) \le p_U(x)$ für alle x.

Weil 0 ein innerer Punkt von U ist, wissen wir aus Lemma 2.37(a), dass $p_U(x) \le C\|x\|$ für geeignetes $C > 0$. Es folgt, dass

$$|L(x)| = \max\{L(x), L(-x)\} \le \max\{p_U(x), p_U(-x)\} \le C\|x\|.$$

Daher ist L sogar stetig.

Wir zeigen nun noch, dass $L(v) < 0$ für alle $v \in V$. Dazu schreiben wir $v \in V$ in der Form $v = u + w$ für ein $u \in U$. Wir beobachten, dass nach Lemma 2.37 gilt $L(w) = -p_U(-w) \le -1$, da $-w \notin U$ und somit $p_U(-w) \ge 1$, während $L(u) \le p_U(u) < 1$. Damit ist

$$L(v) = L(u + w) = L(u) + L(w) < 0,$$

und $x' := L$ liefert das Gewünschte. $\lhd$

2.39. Satz. Hahn-Banach: Trennung konvexer Mengen *Es seien V_1 und V_2 disjunkte konvexe Teilmengen eines normierten Raums X; V_1 sei offen. Dann gibt es ein Funktional $x' \in X'$ mit*

$$\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2), \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

Beweis. Wir setzen

$$V = \{v_1 - v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}.$$

Dann ist V konvex (klar) und offen, da $V = \bigcup_{v_2 \in V_2} V_1 - v_2$ eine Vereinigung offener Mengen ist. Ferner ist $0 \notin V$, da $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Nach Satz 2.38 finden wir ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(v) < 0$ für alle $v \in V$. Es liefert das Gewünschte. $\lhd$

Das Spektrum beschränkter Operatoren (Fortsetzung).

2.40. Bemerkung. Wir benötigen einen Satz aus der Funktionentheorie: Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Man nennt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (oder allgemeiner $f : \Omega \to X$, X halbnormierter Raum) holomorph, falls für jedes $z_0 \in \Omega$ die Ableitung

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Schreibe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \in \mathcal{H}(\Omega, X)$.

Ist Ω einfach zusammenhängend und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ. Dies ist analog dazu, dass das Integral eines Vektorfelds über einen geschlossenen Weg verschwindet, wenn das Vektorfeld ein Potential hat.

2.41. Lemma. *Es sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins I über $\mathbb{C}$, $x \in \mathcal{A}$. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to \mathcal{A}, \quad f(\lambda) = (\lambda I - x)^{-1},$$

komplex differenzierbar, d. h. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \sigma(x), \mathcal{A})$. Für jedes $x' \in \mathcal{A}'$ ist die durch

$$g(\lambda) = \langle x', (\lambda I - x)^{-1} \rangle$$

definierte Funktion ein Element von $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \sigma(x))$.

Beachte: $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ ist offen in $\mathbb{C}$.

Beweis. Es seien $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Die Identität $u^{-1} - v^{-1} = -u^{-1}(u-v)v^{-1}$ liefert

$$(\lambda I - x)^{-1} - (\lambda_0 I - x)^{-1} = -(\lambda - \lambda_0)(\lambda I - x)^{-1}(\lambda_0 I - x)^{-1}.$$

Es folgt

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda I - x)^{-1}(\lambda_0 I - x)^{-1} = -(\lambda_0 I - x)^{-2}$$

wegen der Stetigkeit der Inversion (2.23(b)).
Die Aussage für g folgt genauso. ◁

2.42. Satz. *Es sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement I, $x \in \mathcal{A}$. Dann ist $\sigma(x) \neq \emptyset$.*
Beachte. *(i) Anwendung auf Matrizen liefert den Fundamentalsatz der Algebra.*
(ii) Stimmt nicht für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, wie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ zeigt.

Beweis. Annahme: $\sigma(x) = \emptyset$. Dann ist für jedes $x' \in \mathcal{A}'$ die Funktion $\lambda \mapsto \langle x', (\lambda I - x)^{-1} \rangle$ holomorph auf $\mathbb{C}$. Nach Cauchy ist

$$\int_{S(r,0)} \langle x', (\lambda I - x)^{-1} \rangle \, d\lambda = 0 \tag{1}$$

für alle $r > 0$.
Andererseits existiert nach Hahn-Banach ein $x' \in \mathcal{A}'$ mit $\langle x', I \rangle = 1$. Für $|\lambda| > \|x\|$ gilt dann

$$(\lambda I - x)^{-1} = \lambda^{-1}(I - x/\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda^k}$$

nach 2.23. Also gilt für $|r| > \|x\|$:

$$\begin{aligned} \int_{S(r,0)} \langle x', (\lambda I - x)^{-1} \rangle \, d\lambda &= \int_{S(r,0)} \langle x', \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lambda^{k+1}} \rangle \, d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle x', x^k \rangle \underbrace{\int_{S(r,0)} \lambda^{-k-1} \, d\lambda}_{= \begin{cases} 2\pi i & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} = \underbrace{\langle x', I \rangle}_{=1} 2\pi i \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (1). ◁

2.43. Satz. (Gelfand-Mazur). $\mathcal{A}$ sei eine Banachalgebra mit Eins und zusätzlich Divisionsalgebra (d. h. zu jedem $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ existiert das Inverse x^{-1}). Dann ist $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.

Beweis. Es sei $x \in \mathcal{A}$. Nach 2.42 existiert mindestens ein Element $\lambda_x \in \sigma(x)$. Dann hat $\lambda_x I - x$ keine Inverse und ist also nach Voraussetzung $= 0$. Damit ist $\sigma(x) = \{\lambda_x\}$ und $x = \lambda_x I$, d. h. $\mathcal{A} = LH\{I\} \cong \mathbb{C}$.
Wegen Axiom 2.20(5) ist der Isomorphismus ein Algebraisomorphismus: Ist $x = \lambda_x I$, $y = \lambda_y I$, so ist $xy = (\lambda_x I)(\lambda_y I) = \lambda_x \lambda_y I$, d. h. $\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y$. ◁