

1. TOPOLOGISCHE UND METRISCHE RÄUME, FORTSETZUNGSSATZ, SATZ VON BAIRE

Elementare Topologie. Offene Mengen haben Sie bereits im Zusammenhang mit Metriken und Normen kennen gelernt (falls nicht: wird gleich wiederholt). Für viele Sätze braucht man jedoch gar keine Metrik oder Norm; es genügt zu wissen, was offene Mengen sind.

1.1. Definition. Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge.

- (a) Eine Familie \mathcal{T} von Teilmengen von X heißt Topologie auf X , falls gilt:
 - (i) $X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$.
 - (ii) $U_j \in \mathcal{T}$ für alle $j \in J$, J beliebige Indexmenge $\Rightarrow U_j \in \mathcal{T}$.
 - (iii) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.
- (b) In diesem Fall heißt (X, \mathcal{T}) topologischer Raum, die Elemente von \mathcal{T} *offene Mengen*.
- (c) Eine Teilmenge V des topologischen Raums (X, \mathcal{T}) heißt Umgebung von $x \in X$, falls eine offene Menge U existiert mit $x \in U \subseteq V$. (Oft setzt man zusätzlich voraus, dass Umgebungen offen sind.)
- (d) $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.
- (e) Man spricht von einer Hausdorff-Topologie, falls verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen haben.
- (f) Eine Teilmenge \mathcal{T}' von \mathcal{T} heißt *Basis* für die Topologie \mathcal{T} , falls jede offene Menge abzählbare Vereinigung von Elementen von \mathcal{T}' ist.
- (g) Man spricht von einer lokalen Basis in $x \in X$, falls jede Umgebung von x ein Element von \mathcal{T}' enthält.
- (h) Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum (X, \mathcal{T}) heißt konvergent gegen $x \in X$, falls in jeder beliebigen Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. Man nennt x den Grenzwert der Folge und schreibt $x_n \rightarrow x$ oder $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

1.2. Lemma.

- (a) \emptyset und X sind stets abgeschlossen.
- (b) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (c) Die Vereinigung zweier (und damit endlich vieler) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. Bekannt. ◁

1.3. Lemma. Es sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Definiert man \mathcal{T}_Y als die Familie aller Durchschnitte $U \cap Y$, $U \in \mathcal{T}_X$, so liefert \mathcal{T}_Y eine Topologie auf Y .

Beweis. Axiome nachrechnen. ◁

1.4. Definition. Es seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung

$$f : X \rightarrow Y$$

heißt stetig in $x \in X$, falls gilt: Das Urbild jeder offenen Umgebung von $f(x)$ enthält eine offene Umgebung von x . Die Funktion f heißt stetig auf X , falls f stetig ist für alle $x \in X$.

1.5. Lemma. Mit obigen Bezeichnungen ist äquivalent:

- (a) f ist stetig auf X .
- (b) Das Urbild $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ jeder in Y offenen Menge V ist offen in X .
- (c) Das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder in Y abgeschlossenen Menge A ist abgeschlossen in X .

Beweis. Bekannt aus Analysis 1. ◁

1.6. Definition. X sei ein topologischer Raum, $M \subseteq X$.

- (a) Ein Element $x \in X$ heißt Berührungspunkt von M , falls in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt aus M liegt. Es heißt Randpunkt, falls in jeder Umgebung ein Element von M und eines von $M \setminus X$ liegt (schreibe: $x \in \partial M$).
- (b) \overline{M} = Menge aller Berührungspunkte von M heißt Abschluss von M .
- (c) M heißt dicht in X , falls $\overline{M} = X$.
- (d) X heißt separabel, falls eine abzählbare Teilmenge von X dicht in X liegt.

1.7. Beispiele.

- (a) \mathbb{Q}^n ist dicht in \mathbb{R}^n mit $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.
- (b) Die Menge \mathcal{P} aller Polynome ist dicht in $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$. Dieser Satz („Satz von Weierstraß“); wird in der Übung bewiesen.

Folglich sind \mathbb{R}^n und $C[a, b]$ separabel (betrachte Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$).

1.8. Lemma. X sei topologischer Raum, $M \subseteq X$.

- (a) \overline{M} ist abgeschlossen, $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.
- (b) Es ist $\overline{M} = M \cup \partial M$.
- (c) M abgeschlossen $\Leftrightarrow \overline{M} = M$.
- (d) \overline{M} ist kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält:
$$M = \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ M \subseteq A}} A.$$

Beweis. (a) Sei $x \in X \setminus \overline{M}$. Dann existiert eine offene Umgebung von x , die kein Element von M enthält. Angenommen, sie enthielte $y \in \overline{M}$. Dann enthielte sie auch eine Umgebung von y (da offen) und somit ein Element von M . Also ist $X \setminus \overline{M}$ offen, somit \overline{M} abgeschlossen.

Nach Definition ist $\overline{M} \subseteq \overline{(\overline{M})}$. Ist $x \in \overline{(\overline{M})}$, so enthält jede offene Umgebung von x ein Element $y \in \overline{M}$ und somit auch eine Umgebung von y und ein Element $z \in M$. Also ist $\overline{(\overline{M})} \subseteq \overline{M}$.

(b) Da jeder Randpunkt auch Berührungspunkt ist, gilt \supseteq . Ist andererseits $y \in \overline{M} \setminus M$ ein Berührungspunkt, so auch Randpunkt.

(c) „ \Leftarrow “ wegen (a).

„ \Rightarrow “ Ist $X \setminus M$ offen, so ist wie in (a) $(X \setminus M) \cap \overline{M} = \emptyset \Rightarrow \overline{M} \subseteq M$.

(d) folgt aus (c). ◁

1.9. Definition. (X, \mathcal{T}) sei ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt kompakt, wenn sie die Überdeckungseigenschaft hat, d.h. es gilt:

Ist $\{U_j : j \in J\}$ (J beliebige Indexmenge) eine Familie offener Mengen in X mit $\bigcup_{j \in J} U_j \supseteq A$ „offene Überdeckung von A “, so existieren $j_1, \dots, j_r \in J$ mit $\bigcup_{k=1}^r U_{j_k} \supseteq A$ „endliche Teilüberdeckung“. A heißt relativ kompakt, wenn \overline{A} kompakt ist.

1.10. Satz. (Heine-Borel). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ oder \mathbb{C}^n . Dann gilt

$$A \text{ kompakt} \Leftrightarrow A \text{ abgeschlossen und beschränkt.}$$

Bemerkung. In jedem Hausdorffraum sind kompakte Mengen abgeschlossen. Abgeschlossenheit und Beschränktheit langen allerdings i.Allg. nicht für Kompaktheit. Für einige Räume gibt es Charakterisierungen der Kompaktheit (\mapsto Arzelà-Ascoli (stetige Funktionen), Montel (holomorphe Funktionen), Kolmogorov (L^p -Funktionen), ...).

Beweis. Bekannt aus Analysis I. ◁

1.11. Lemma. X sei ein topologischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen in X . Dann ist A kompakt.

Beweis. Es sei $\{U_j : j \in J\}$ eine offene Überdeckung von A .

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j, \quad U_j \text{ offen.}$$

Dann ist $K \subseteq (X \setminus A) \cup \bigcup_{j \in J} U_j$ eine offene Überdeckung von K in X . Da K kompakt ist, existieren j_1, \dots, j_r mit $K \subseteq (X \setminus A) \cup \bigcup_{j=1}^r U_{j_r}$. Es folgt

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^r U_{j_k}.$$

◁

1.12. Lemma. X und Y seien topologische Räume, $K \subseteq X$ kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. Es sei $\{V_j, j \in J\}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Da f stetig ist, ist $\{f^{-1}(V_j) : j \in J\}$ offene Überdeckung von K . Daher existieren $j_1, \dots, j_r : K \subseteq \bigcup_{k=1}^r f^{-1}(V_{j_k})$. Es folgt (wegen $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$):

$$f(K) \subseteq \bigcup_{k=1}^r V_{j_k}.$$

1.13. Lemma. K sei ein kompakter topologischer Raum, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f Maximum und Minimum an.

Beweis. $f(K)$ ist kompakt, also abgeschlossen und beschränkt nach Heine-Borel, enthält daher Maximum und Minimum.

1.14. Definition.

(a) Es sei $X \neq \emptyset$ Menge. Eine Abbildung $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ heißt Halbmetrik oder Pseudometrik auf X , falls gilt

- (i) $\rho(x, x) = 0$.
- (ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
- (iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Man nennt ρ Metrik, falls zusätzlich gilt

- (iv) Ist $\rho(x, y) = 0$, so ist $x = y$.

Ist ρ eine (Halb-) Metrik, so heißt das Tupel (X, ρ) (halb-) metrischer Raum.

(b) Wir setzen $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

(c) $U \subseteq X$ heißt offen, falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Beispiel: Auf dem Raum $R([a, b])$ der Riemann-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, $a < b$, ist $\rho(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ eine Halbmetrik, jedoch keine Metrik.

1.15. Lemma. In halbmetrischen Räumen gilt – genau wie in metrischen Räumen

- (a) Für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt $x \in B(x, \varepsilon)$.
- (b) $B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2) = B(x, \varepsilon)$ für $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
- (c) Ist $y \in B(x, \varepsilon)$, so ist $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$, wobei $\delta = \varepsilon - \rho(x, y)$. Insbesondere ist $B(x, \varepsilon)$ offen.

1.16. Lemma. (X, ρ) sei ein halbmetrischer Raum. Dann hat die Familie der offenen Teilmengen von (X, ρ) die Eigenschaften einer Topologie.

Beweis. Wie in Analysis 2.

◁

1.17. Lemma. In einem halbmétrischen Raum ist \overline{M} die Menge aller Punkte von X , gegen die eine Folge aus M konvergiert.

Beweis. Ist $x_n \in M$ mit $x_n \rightarrow x$, so ist x Berührungspunkt (hier brauchen wir nicht die (Halb-)Metrik!). Ist x Berührungspunkt, so finden wir in $B(x, \frac{1}{k})$, $k = 1, 2, \dots$ ein Element $x_k \in M$. Dies liefert eine Folge, die gegen x konvergiert. \triangleleft

1.18. Bemerkung. In einem halbmétrischen (insbesondere also auch in einem topologischen) Raum kann eine Folge mehrere Grenzwerte haben (Beispiel: Riemann-Integral). In métrischen Räumen ist der Grenzwert bekanntlich eindeutig ($x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow y \Rightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$).

1.19. Lemma. (X, ρ_X) und (Y, ρ_Y) seien halbmétrische Räume, $x \in X$, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) f stetig in x .
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x' \in B(x, \delta) \Rightarrow f(x') \in B(f(x), \varepsilon)$.
- (iii) $(x_n \rightarrow x) \Rightarrow (f(x_n) \rightarrow f(x))$ (Folgenstetigkeit).

Beweis. Wie in Analysis 1. \triangleleft

1.20. Bemerkung. In topologischen Räumen liefert Stetigkeit die Folgenstetigkeit; aus 1.19(c) folgt aber i. Allg. nicht (a). Man erhält jedoch ein analoges Resultat, wenn man das Konzept der Netze statt Folgen benutzt.

1.21. Definition. Es sei M Teilmenge eines halbmétrischen Raumes (X, ρ) .

- (a) M heißt folgenkompakt, falls jede Folge $(x_k) \subseteq M$ eine Teilfolge hat, die gegen ein $x \in M$ konvergiert.
- (b) M heißt totalbeschränkt, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_r \in M$ gibt mit

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^r B(x_j, \varepsilon).$$

1.22. Satz. Für eine Teilmenge K eines métrischen Raums (X, ρ) sind äquivalent:

- (i) K ist kompakt.
- (ii) K ist folgenkompakt.
- (iii) K ist totalbeschränkt und vollständig.

Bemerkung. Es gibt topologische Räume die folgenkompakt, aber nicht kompakt sind und solche, die kompakt, aber nicht folgenkompakt sind, s. Steen und Seebach, Counterexamples in Topology, Items 43, 105.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Leicht und bekannt aus Analysis 2. (Zu jedem $x \in X$ gäbe es sonst eine Umgebung, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen. Diese Umgebungen überdecken X . Auswählen endlich vieler liefert den Widerspruch, dass die Folge nur endlich viele Glieder hat.)

(ii) \Rightarrow (iii). Da jede Folge eine konvergente Teilfolge hat, folgt sofort: K vollständig.

Annahme: K nicht totalbeschränkt: Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass K nicht durch endlich viele ε -Kugeln überdeckt werden kann. Wähle $x_1 \in K$ beliebig. Dann ist $K \not\subseteq B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow \exists x_2 \in K : \rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Weiter mit Induktion: Es seien x_1, \dots, x_k , gefunden mit

$$\rho(x_k, x_j) \geq \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, k-1.$$

Da $\bigcup_{j=1}^k B(x_j, \varepsilon) \not\supseteq K$, existiert x_{k+1} mit $\rho(x_{k+1}, x_j) \geq \varepsilon \forall j = 1, \dots, k$. Wir erhalten eine Folge ohne konvergente Teilfolge.

(iii) \Rightarrow (i) Angenommen, es gibt eine offene Überdeckung $U_i, i \in I$, von K ohne endliche Teilüberdeckung. Zu $\varepsilon = 2^{-n}$ wähle jeweils endlich viele Kugeln vom Radius 2^{-n} , die K überdecken.

Wir finden unter allen Kugeln vom Radius $1/2$ eine, B_1 , so dass $K \cap B_1$ von keiner endlichen Teilüberdeckung von U_i überdeckt wird. Induktiv seien Kugeln B_k , $k = 1, \dots, n$ vom Radius 2^{-k} so konstruiert, dass $K \cap B_k$ von keiner endlichen Teilüberdeckung von U_i überdeckt wird und $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$.

Induktionsschritt: Die obigen Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdecken auch $B_n \cap K$. Unter all denen, die mit B_n nichtleeren Schnitt haben, gibt es (mindestens) eine, B_{n+1} , so dass $B_{n+1} \cap K$ keine endliche Teilüberdeckung durch Mengen aus U_i hat.

Nun sei x_n der Mittelpunkt von B_n . Da B_k und B_{k+1} jeweils nichtleeren Schnitt haben, ist $\rho(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k} + 2^{-k-1} < 2^{-k+1}$. Es folgt, dass (x_k) Cauchy-Folge ist, somit nach Voraussetzung einen Grenzwert $x \in K$ hat. Dieser liegt in einer der Mengen U_i , etwa in U_{i_0} . Dann existiert auch eine Kugel $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Wähle n so groß, dass $2^{-n} < \varepsilon/2$ und $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ ist. Dann folgt $x \in B_n$, somit $B_n \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ im Widerspruch dazu, dass B_n keine endliche Teilüberdeckung durch die U_i hat. \triangleleft

1.23. Definition. Eine Folge (x_n) in einem halbmetrischen Raum (X, ρ) heißt Cauchy-Folge, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

(X, ρ) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge mindestens einen Grenzwert hat.

1.24. Beispiele.

- (a) \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n sind vollständig.
- (b) $C[a, b]$ ist vollständig mit $\|f\|_{\text{sup}}$.
- (c) Abgeschlossene Teilmengen vollständiger Räume sind vollständig: Ist X vollständig, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $(x_n) \subseteq A$ Cauchyfolge in A , so hat (x_n) einen Grenzwert $x \in X$. Weil A abgeschlossen ist, liegt x in A .

Der Fortsetzungssatz.

1.25. Definition. $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ seien halbmetrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt gleichmäßig stetig auf X , falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \text{falls } \rho_X(x, y) < \delta.$$

Der folgende Satz ist der erste wesentliche Satz der Funktionalanalysis:

1.26. Satz. (Fortsetzungssatz). (X, ρ_X) sei halbmetrischer Raum, (Y, ρ_Y) sei ein *vollständiger metrischer* Raum, $T \subseteq X$. Ferner sei

$$f : T \rightarrow Y \quad \text{gleichmäßig stetig.}$$

Dann gibt es genau eine stetige Abbildung

$$F : \overline{T} \rightarrow Y$$

mit $F|_T = f$. Diese Abbildung F ist gleichmäßig stetig.

Ferner gilt: Wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L\rho_X(x_1, x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in T,$$

so gilt auch

$$(1) \quad \rho_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq L\rho_X(x_1, x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \overline{T}.$$

Beweis. (a) *Eindeutigkeit* von F : Es seien F_1, F_2 stetige Fortsetzungen von f und $x \in \overline{T}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq T$ mit $x_n \rightarrow x$. Es folgt $F_1(x_n) \rightarrow F_1(x), F_2(x_n) \rightarrow F_2(x)$. Da $F_1(x_n) = f(x_n) = F_2(x_n)$ folgt (Eindeutigkeit des Grenzwertes in metrischen Räumen) $F_1(x) = F_2(x)$.

(b) *Existenz von F* : Es sei $x \in \overline{T}$, $x_n \in T$ mit $x_n \rightarrow x$. Zeige: $f(x_n)$ ist Cauchy-Folge: Da f gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon, \quad \text{falls } \rho_X(x_1, x_2) < \delta.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ vorgelegt, δ dazu gewählt, so wähle $K = K(\delta)$ so groß, dass $\rho_X(x_n, x) < \delta/2$ für alle $n \geq K$. Dann ist für $m, n \geq K$

$$\rho_X(x_n, x_m) \leq \rho_X(x_n, x) + \rho_X(x, x_m) < \delta,$$

daher

$$\rho_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Da Y vollständig ist, hat die Cauchy-Folge $(f(x_n))$ einen Grenzwert, $y \in Y$. Setze $F(x) = y$.

Wohldefiniert. Es sei (z_n) eine weitere Folge mit $z_n \rightarrow z$, $\varepsilon > 0$. Wähle δ wie oben und K mit

$$\rho_X(z_n, x) < \delta/2, \quad \rho_X(x_n, x) < \delta/2 \quad \text{für } n \geq K.$$

Dann gilt $\rho_X(z_n, x_m) < \delta$ für $n, m \geq K$, somit $\rho_Y(f(z_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq K$. Also $\lim f(z_n) = \lim f(x_n)$.

(c) *Gleichmäßige Stetigkeit von F* . Es sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon/3, \quad \text{falls } \rho_X(x_1, x_2) < 3\delta.$$

Sind also $x, x' \in \overline{T}$ mit $\rho_X(x, x') < \delta$, so existieren $x_1, x_2 \in T$ mit

$$\begin{aligned} \rho_X(x_1, x) &< \delta \quad \text{und} \quad \rho_Y(f(x_1), F(x)) < \varepsilon/3 \\ \rho_X(x_2, x') &< \delta \quad \text{und} \quad \rho_Y(f(x_2), F(x')) < \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Es folgt: $\rho_X(x_1, x_2) < 3\delta$, also $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon/3$ und

$$\rho_Y(F(x), F(x')) \leq \rho_Y(F(x), f(x_1)) + \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) + \rho_Y(f(x_2), F(x')) < \varepsilon.$$

(d) *Beweis der Zusatz Eigenschaft*: Es seien $x, x' \in \overline{T}$. Wähle Folgen $(x_n), (x'_n) \subseteq T$ mit $x_n \rightarrow x$, $x'_n \rightarrow x'$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\rho_Y(F(x), F(x')) \\ &\leq \rho_Y(F(x), f(x_n)) + \rho_Y(f(x_n), f(x'_n)) + \rho_Y(f(x'_n), F(x')) \\ &\leq \rho_Y(F(x), f(x_n)) + L\rho_X(x_n, x'_n) + \rho_Y(f(x'_n), F(x')) \\ &\leq \rho_Y(F(x), f(x_n)) + L\rho_X(x, x_n) + L\rho_X(x, x') + L\rho_X(x'_n, x') + \rho_Y(f(x'_n), F(x')) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} L\rho_X(x, x'). \end{aligned}$$

Der Satz von Baire.

1.27. Definition. Eine Teilmenge M eines topologischen Raums heißt nirgends dicht, falls \overline{M} keine offene Kugel ($\neq \emptyset$) enthält.

Beispiel: Die Cantormenge in \mathbb{R} .

Ein Unterraum niedrigerer Dimension.

1.28. Satz. (X, ρ) sei ein vollständiger metrischer Raum, $\emptyset \neq A_j \subseteq X$ abgeschlossene Mengen, $j = 1, 2, \dots$ mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $\text{diam } A_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ ($\text{diam } A_j = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A_j\}$). Dann existiert genau ein $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$.

Beweis. Bekannt. [Wähle $x_j \in A_j, j = 1, 2, \dots$. Dann ist (x_j) Cauchy-Folge, da $\rho(x_j, x_k) \leq \text{diam } A_j \rightarrow 0$ für $k \geq j$. Also existiert $x = \lim x_j$. Die Folge (x_j, x_{j+1}, \dots) liegt in A_j , und A_j ist abgeschlossen. Also liegt auch x in $A_j, j \in \mathbb{N}$. Angenommen, es gebe ein weiteres $\tilde{x} \in \bigcap A_j$. Dann ist für jedes $k : \rho(x, \tilde{x}) \leq \text{diam } A_k \rightarrow 0$, folglich $\rho(x, \tilde{x}) = 0$, somit $x = \tilde{x}$.] \triangleleft

1.29. Satz. (Baire). (X, ρ) sei ein vollständiger metrischer Raum, $A_j, j \in \mathbb{N}$ abgeschlossene, nirgends dichte Teilmengen von X . Dann enthält $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ keine nichtleere offene Teilmenge von X .

Da der Abschluss einer nirgends dichten Menge nirgends dicht ist, ist insbesondere X nicht als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen darstellbar.

Beweis. (Indirekt) Es sei U eine offene Menge in $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Für jedes j ist $X \setminus A_j$ offen. Da A_j nirgends dicht ist, ist

$$(1) \quad (X \setminus A_j) \cap U \neq \emptyset \quad (\text{sonst } U \subseteq A_j).$$

Also existiert $x_1 \in U, \varepsilon_1 > 0 : B(x_1, 2\varepsilon_1) \subseteq (X \setminus A_1) \cap U$. Mit demselben Argument (für $j = 2$ und $B(x_1, 2\varepsilon_1)$ in der Rolle von U) existiert $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1), \varepsilon_2 > 0$ mit $B(x_2, 2\varepsilon_2) \subseteq (X \setminus A_2) \cap B(x_1, \varepsilon_1)$. Insbesondere ist $\overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subseteq B(x_1, \varepsilon_1)$.

Iterativ finden wir eine Folge x_1, x_2, \dots , und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ (oBdA $\varepsilon_k \rightarrow 0$) mit

$$\begin{aligned} \overline{B(x_k, \varepsilon_k)} &\subseteq B(x_k, 2\varepsilon_k) \subseteq (X \setminus A_k) \cap B(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}) \text{ und} \\ \dots \overline{B(x_k, \varepsilon_k)} &\subseteq B(x_k, 2\varepsilon_k) \subseteq \dots \subseteq \overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subseteq U. \end{aligned}$$

Also haben wir mit

$$\overline{B_j} = \overline{B(x_j, \varepsilon_j)}$$

die Voraussetzungen von 1.28 erfüllt und finden genau ein x im Durchschnitt aller $\overline{B_j}$. Insbesondere ist dann $x \in U \subseteq \bigcup A_j$. Andererseits ist nach Konstruktion (s. (1)) $\overline{B_j} \cap A_j = \emptyset$ für alle j . Da $\overline{B_k} \subseteq \overline{B_j}$ für $k \geq j$ folgt, $x \notin A_j, j = 1, 2, \dots$. Es ergibt sich der Widerspruch $x \notin \bigcup A_j$. \triangleleft

1.30. Definition. Ein topologischer Raum heißt von 1. Kategorie, falls er abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist, ansonsten sagt man, er sei von 2. Kategorie.

1.31. Bemerkung.

- (1) Der Satz von Baire besagt: Vollständige metrische Räume sind von 2. Kategorie.
- (2) Schreibe $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ und versehe \mathbb{Q} mit der durch den Betrag induzierten Metrik. Setze $A_j = \{r_j\}$. Dann ist $A_j = \overline{A_j}$, A_j nirgends dicht, und $\mathbb{Q} = \bigcup A_j$. Somit ist \mathbb{Q} von 1. Kategorie.

1.32. Folgerung. Die Dimension eines Banachraums ist entweder endlich oder überabzählbar.

Beweis. Es sei $\{v_1, v_2, \dots\}$ eine Basis für den Banachraum X . Setze $A_j = \text{LH}\{v_1, \dots, v_j\}$. Dann sind alle A_j nirgends dicht: Für jedes $v \in A_j$ und $\lambda > 0$ ist $v + \lambda v_{j+1} \notin A_j$. Also enthält A_j keine offene Kugel. Andererseits ist $X = \bigcup A_j$. Widerspruch! \triangleleft