Anhang A. Abbildungen

A.1. Abbildungen. Es seien X, Y nichtleere Mengen. Eine Abbildung oder Funktion f von X nach Y (geschrieben: $f : X \to Y$) ist eine Vorschrift[5], die jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man nennt $f(x)$ das Bild von x unter f oder den Funktionswert von f an der Stelle x. Umgekehrt heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ ein Urbild von y unter f. Manchmal schreibt man auch $x \mapsto f(x)$, um auszudrücken, dass x auf $f(x)$ abgebildet wird.

Einige Bezeichnungen:

(a) Für $A \subseteq X$ heißt

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{f(x) : x \in A\} && \text{Bild von } A \text{ unter } f, \text{ und} \\ f(X) &= \{f(x) : x \in X\} && \text{heißt Bild von } f. \end{aligned}$$

(b) Für $B \subseteq Y$ heißt

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\} \qquad \text{Urbild von } B \text{ unter } f.$$

(c) f heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$, d. h., falls zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.

(d) f heißt injektiv, falls für $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, oder, mit anderen Worten, falls die Bilder *verschiedener* Punkte verschieden sind.

(e) f heißt bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

(f) Ist $g : Y \to Z$ eine weitere Abbildung, so definiert man die Komposition $g \circ f : X \to Z$ durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

(g) Für jede Menge X ist durch $x \mapsto x$ die sogenannte identische Abbildung auf X oder Identität auf X definiert. Man schreibt I, I_X, id oder id_X.

A.2. Satz. *Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$ Abbildungen. Dann gilt*

(a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(b) *Sind f, g beide injektiv, so auch $g \circ f$. Sind beide surjektiv, so auch $g \circ f$.*

(c) *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv; ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.*

Beweis. (a) Für beliebige $x \in X$ gilt, $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g) \circ f(x)$

(b) $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \overset{g\,\mathrm{inj}}{\Longrightarrow} f(x) = f(y) \overset{f\,\mathrm{inj}}{\Longrightarrow} x = y$ für beliebige $x, y \in X$. Ferner

$$g \circ f(X) = \{g(f(x)) : x \in X\} \overset{f(X)=Y}{=} \{g(y) : y \in Y\} = Z.$$

(c) Klar: Ist f nicht injektiv, so auch nicht $g \circ f$. Ist g nicht surjektiv, so auch nicht $g \circ f$. $\triangleleft$

A.3. Satz. *Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so existiert eine Abbildung $g : Y \to X$, die sogenannte Umkehrabbildung oder Inverse zu f, mit*

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y, \qquad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Man schreibt auch $g = f^{-1}$. Aus A.2(c) folgt, dass auch g bijektiv ist.

Beweis. Sei $y \in Y$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wegen der Injektivität von f ist dieses x eindeutig. Setze $g(y) = x$. Dann ist $y = f(x) = f(g(y))$. Da y beliebig war, ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Andererseits: $x = g(y) = g(f(x))$. Da dies für jedes x in $f^{-1}(Y) = X$ gilt, ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$. $\triangleleft$

[5] *Vorschrift* ist keine mathematisch saubere Formulierung. Wie könnte man dies exakt definieren?

A.4. Beispiel. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sei definiert durch $f(x) = x^2$. Dann ist f injektiv: Ist $0 < x < y$, so ist $0 < x^2 < y^2$, also $f(x) \neq f(y)$ für $x \neq y$.

Die Surjektivität von f folgt aus 1.29. Man sieht auch, dass

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

A.5. Definition. Sei M eine Menge.

(a) Wir sagen, M habe n Elemente, $n \in \mathbb{N}_0$, falls es eine bijektive Abbildung (Bijektion) $f : M \to \{1, \ldots, n\}$ gibt. Schreibe: $|M| = n$.

(b) M heißt abzählbar unendlich, falls es eine Bijektion

$$f : M \to \mathbb{N}$$

oder, äquivalent, eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to M$ gibt.

A.6. Beispiel.

(a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich. Definiere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & x \text{ ungerade} \\ -\dfrac{x}{2} & x \text{ gerade} \end{cases}$$

Man zeigt leicht, dass f bijektiv ist.

(b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Dazu langt es zu zeigen, dass $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} =: \mathbb{Q}_+$ abzählbar ist (dann weiter wie in (a)).

Schreibe die Elemente von $\mathbb{Q}_+$ in dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \to & 2 & & 3 & \to & 4 & & 5 & \to & 6 & & 7 \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{6}{2} & & \frac{7}{2} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3} & & \frac{7}{3} \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{6}{4} & & \frac{7}{4} \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \frac{6}{5} & & \frac{7}{5}
\end{array}\quad .$$

Wir erhalten damit die provisorische Aufzaählung $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \ldots$. Darin können wir die mehrfach vorkommenden Elemente streichen (nämlich $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \ldots$).

A.7. Bemerkung. $\mathbb{R}$ ist *nicht* abzählbar.

Nicht einmal die Zahlen in $]0, 1]$ sind abzählbar: Man kann jedes $x \in\,]0, 1]$ in eindeutiger Weise als nichtabbrechende Dezimalzahl schreiben: $x = z_1 z_2 \ldots$ mit Ziffern $z_1, z_2, \ldots$ in $\{0, 1, \ldots, 9\}$, wobei unendlich viele $\neq 0$ sind. (Hier schreiben wir beispielsweise $0,5 = 0,499\ldots$.) Umgekehrt liefert jede solche Dezimalzahl ein Element von $]0, 1]$

Nehmen wir an, es gäbe eine Abzählung von $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, z_{1,1} z_{1,2} z_{1,3} \ldots \\ x_2 &= 0, z_{2,1} z_{2,2} z_{2,3} \ldots \\ x_3 &= 0, z_{3,1} z_{3,2} z_{3,3} \ldots \vdots \end{aligned}$$

Dann können wir eine Zahl x als Dezimalzahl $x = z_1 z_2 \dots$ definieren, wobei wir $z_j = 1$ setzen, falls $z_{j,j} \neq 1$ and $z_j = 2$, falls $z_{j,j} = 1$. Dann ist x eine Zahl in $\mathbb{R}$, die nicht in der Aufzählung enthalten ist.

A.8. Bemerkung.

(a) Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ einer der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Aussagen gelten stets für beide Fälle.

(b) $\mathbb{K}^n$ ist die Menge aller n-Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_j \in \mathbb{K}$ für $j = 1, \dots, n$. Für $x, y \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1 \dots, y_n)$ und $k \in \mathbb{K}$ definiert man

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_2, \dots, x_n + y_n); \\ k \cdot x &= (kx_1, \dots, kx_n). \end{aligned}$$

Beispiel $(1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (5, 7, 9)$ und $3 \cdot (1, 2, 3) = (3, 6, 9)$. Schreibe kx statt $k \cdot x$.