Der Satz von Taylor. Es sei D ein Intervall, X ein Banachraum und $f : D \to X$ eine Funktion.

9.1. Satz. Taylorsche Formel. Ist f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, so gilt für $a, x \in D$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Beweis. Durch Induktion nach n.

(1) Induktionsanfang: $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(2) Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

Nach Induktionsannahme ist

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= -\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right)dt \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Dies ist der $(n+1)$-te Entwicklungsterm plus R_{n+2}. Hier haben wir Satz 8.19 leicht erweitert auf Produkte skalarer Funktionen mit X-wertigen Funktionen. $\triangleleft$

9.2. Folgerung. Ist f $(n+1)$-mal differenzierbar mit $f^{(n+1)}(t) \equiv 0$ für alle $t \in D$, so ist f ein Polynom vom Grad $\le n$.

Beweis. $R_{n+1} \equiv 0$. $\triangleleft$

9.3. Folgerung. Es sei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $a \le x \in D$ (für $x < a$ analog). Dann gilt

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right\| \le \sup_{a\le\xi\le x} \|f^{(n+1)}(\xi)\| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Beweis. Es sei $a < x$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|R_{n+1}(x)\| &\le \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \|f^{(n+1)}(t)\|\,dt \\ &\le \sup_{a\le\xi\le x} \|f^{(n+1)}(\xi)\| \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Analog für $x < a$. $\triangleleft$

9.4. Beispiel: $f(t) = \sqrt{t}$. Wir berechnen näherungsweise $\sqrt{1,2}$, also den Wert von f an der Stelle $x = 1,2$, ausgehend von den bekannten Werten von f und seinen Ableitungen in $a = 1$.

Hier ist $a = 1$, $x = 1,2$, $f'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$, $f''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$, $f'''(t) = \frac{3}{8}t^{-5/2}$ und

$$|R_{n+1}(1,2)| \le \sup_{1\le\xi\le 1,2} |f^{(n+1)}(\xi)| \frac{0,2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nullte Näherung ($n = 0$): $\sqrt{1,2} = 1 + R_1$ mit $R_1 = \sup \frac{1}{2}\sqrt{\xi}^{\,-1} \cdot 0,2$, also (mit der Abschätzung $\sqrt{\xi}^{\,-1} < 1$): $|R_0| < 0,1$.
Erste Näherung ($n = 1$): $\sqrt{1,2} = 1 + 0,2/2 + R_2 = 1,1 + R_2$, wobei $|R_2| \le \frac{1}{4}\sup_{1\le\xi\le 1,2} \xi^{-3/2}\frac{0,2^2}{2} \le 0,2^2/8 = 0,005$.
Zweite Näherung ($n = 2$): $\sqrt{1,2} = 1 + 0,2/2 - 0,2^2/8 + R_3$, wobei $|R_3| \le \frac{3}{8}\sup_{1\le\xi\le 1,2} \xi^{-5/2}\frac{0,2^3}{6}$. Somit $\sqrt{1,2} = 1 + 0,1 - 0,04/8 + R_3 = 1,095 + R_3$ mit $|R_3| \le 0,008/16 = 0,0005$.

(Der wahre Wert ist $1,09544512\ldots$.)

Frage: Wird der Fehler beliebig klein, wenn wir N groß wählen?

Funktionenfolgen. Es seien D eine beliebige Menge und X ein normierter Raum.

9.5. Definition. Für jedes $k = 1, 2, \ldots$ sei $f_k : D \to X$ eine Funktion. Man nennt $(f_k)_k$ eine Funktionenfolge.

(a) Die Folge (f_k) heißt punktweise konvergent gegen die Funktion $f : D \to X$, falls für jedes $t \in D$ gilt

$$f_k(t) \to f(t), \quad k \to \infty.$$

(b) Die Folge (f_k) heißt gleichmäßig konvergent gegen $f : D \to X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert mit

$$\|f_k(t) - f(t)\|_X < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in D, k \ge N.$$

9.6. Beispiele.

(a) $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(t) = \frac{1}{k}\sin(kt)$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 (Nullfunktion), denn

$$\left|\frac{1}{k}\sin kt - 0\right| \le \frac{1}{k} < \varepsilon \quad \text{für alle } k \ge \frac{1}{\varepsilon} \text{ unabh. von } t.$$

(b) $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(t) = t^k$. Definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & t = 1 \end{cases}.$$

Dann konvergiert (f_k) punktweise gegen f, aber nicht gleichmäßig:

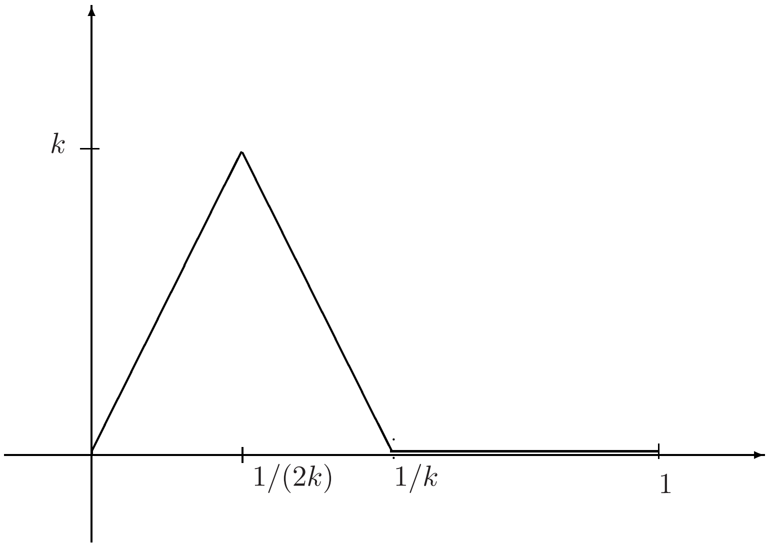
(i) für $0 \le t < 1$ gilt $f_k(t) = t^k \to 0 \; k \to \infty$

(ii) für $t = 1$ gilt $f_k(t) = 1^k = 1 \; \forall k$,

also haben wir punktweise Konvergenz.

Die Konvergenz ist *nicht* gleichmäßig, denn für $t_k = \frac{1}{\sqrt[k]{2}}$ gilt $f_k(t_k) = \frac{1}{2}$, d. h. $|f_k(t_k) - f(t_k)| = \frac{1}{2} \not\to 0$.

(c) $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei die durch folgende Skizze definierte Funktion



Die Folge ist punktweise konvergent gegen Null, denn zu jedem $t > 0$ existiert ein N mit $\frac{1}{N} < t$. Dann ist $f_k(t) = 0$ für alle $k \geq N$. Ferner ist stets $f_k(0) = 0$.

Sie ist nicht gleichmäßig konvergent gegen Null, da $f(1/(2k)) = k \not\to 0$.

9.7. Definition/Erinnerung. Es sei D Teilmenge eines normierten Raums, X ein normierter Raum und $f : D \to X$ eine Funktion. Wir setzen

$$\|f\| = \sup\{\|f(t)\|_X : t \in D\} \in [0, \infty].$$

(i) Ist $D = [a,b]$ und $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$, so ist dies genau die Supremumsnorm aus Beispiel 6.10.

(ii) f ist genau dann beschränkt, wenn $\|f\| < \infty$. Dies ist beispielsweise immer der Fall, wenn D zusätzlich kompakt und f stetig ist, denn die stetige Funktion $t \mapsto \|f(t)\|_X$ nimmt dann auf D ihr Maximum an.

(iii) Die Bedingung für gleichmäßige Konvergenz von (f_k) gegen f läßt sich so formulieren:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \|f_k - f\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$

9.8. Satz. *Es sei D Teilmenge eines normierten Raums und $f_k : D \to X$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : D \to X$ konvergieren. Dann ist f stetig.*

„Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig“

Bemerkung. Liegt nur punktweise Konvergenz vor, so braucht die Grenzfunktion nicht stetig zu sein (vgl. 9.6(b)).

Beweis. Es sei $t_0 \in D$. Zeige: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(t) - f(t_0)\|_X < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad \|t - t_0\|_D < \delta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein N so, dass für jedes $t \in D$ gilt $\|f_N(t) - f(t)\|_X < \varepsilon/3$. Da f_N stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\|f_N(t) - f_N(t_0)\|_X < \varepsilon/3$, falls falls $\|t - t_0\|_D < \delta$. Dann folgt für $\|t - t_0\|_D < \delta$

$$\|f(t) - f(t_0)\|_X \leq \|f(t) - f_N(t)\|_X + \|f_N(t) - f_N(t_0)\|_X + \|f_N(t_0) - f(t_0)\|_X < \varepsilon.$$

$\triangleleft$

9.9. Folgerung. *Ist D kompakte Teilmenge eines normierten Raums, z.B. $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, und X ein Banachraum, z.B. $X = \mathbb{R}$. Dann ist $C(D, X)$ ein Banachraum:* Es sei (f_k) eine Cauchy-Folge in $C(D, X)$. Dann ist für jedes $t \in D$ die Folge $(f_k(t))$ eine Cauchy-Folge in X. Wir erhalten die Funktion $f : D \to X$ durch $f(t) = \lim f_k(t)$.

Behauptung. (f_k) konvergiert gleichmäßig gegen f: Ist ε vorgelegt, so wähle k_0 so groß, dass $\|f_k - f_m\| < \varepsilon/2$ für $k, m \geq k_0$. Dann folgt aus der Stetigkeit der Normfunktion für $k \geq k_0$, $t \in D$:

$$\|f_k(t) - f(t)\|_X = \|f_k(t) - \lim f_m(t)\|_X = \lim \|f_k(t) - f_m(t)\|_X \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Nach Satz 9.8 ist f als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig.

9.10. Satz: Vertauschbarkeit von Limes und Integral bei gleichmäßiger Konvergenz. Es sei $f_k : [a, b] \to X$, $k = 1, 2, \ldots$, eine Folge stetiger Funktionen mit Werten in einem Banachraum X, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gilt

$$\lim \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Beweis. Nach 9.8 ist f wieder stetig, also integrierbar, da X ein Banachraum ist. Ferner:

$$\| \int_a^b f_k(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt\| \leq \int_a^b \|f_k(t) - f(t)\|\, dt \leq (b - a)\|f_k - f\|_{\sup} \to 0$$

$\lhd$

9.11. Bemerkung. Satz 9.10 ist im allgemeinen falsch, wenn die Konvergenz nur punktweise vorliegt: Im Beispiel 9.6(c) ist $\int_0^1 f_k(t)\, dt = 1/2$, aber $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$.

9.12. Satz. *Es seien $f_k : [a, b] \to X$ stetig differenzierbare Funktionen mit Werten in dem Banachraum X. In wenigstens einem Punkt $t_0 \in [a, b]$ konvergiere die Folge $(f_k(t_0))$. Die Folge der Ableitungen $f_k' : [a, b] \to X$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion g. Dann gilt*

(a) *(f_k) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to X$*

(b) *f ist stetig differenzierbar und $f' = g$.*

Beweis. Es ist $f_k(t) = f_k(t_0) + \int_{t_0}^t f_k'(s)\, ds$, $t \in [a, b]$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Nach 9.10 konvergiert $\int_{t_0}^t f_k'(s)\, ds$ gegen $\int_{t_0}^t g(s)\, ds$, g ist stetig nach 9.8.

Wir setzen

$$f(t) = \underbrace{\lim f_k(t_0)}_{=:c} + \int_{t_0}^t g(s)\, ds. \tag{1}$$

Dann gilt für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \|f(t) - f_k(t)\|_X &\leq \|c - f_k(t_0)\|_X + \int_{t_0}^t \|g(s) - f_k'(s)\|_X\, ds \\ &\leq \|c - f_k(t_0)\|_X + |b - a|\, \|g - f_k'\| \overset{N\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

(analog für $t < t_0$). Daher konvergiert (f_k) gleichmäßig gegen f. Aus (1) folgt, dass f differenzierbar ist und $f' = g$. $\lhd$

9.13. Satz. (Konvergenzkriterium von Weierstraß). Es sei X ein Banachraum und $f_k : D \to X$ eine Folge von Funktionen mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$.

Dann ist für jedes $t \in D$ die Reihe $F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ absolut konvergent, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen F.

Beweis. Für jedes t ist $\|f_k(t)\|_X \le \|f_k\|$, also konvergiert $F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ absolut nach dem Majorantenkriterium. Gleichmäßige Konvergenz: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\| < \varepsilon$. Dann folgt für $K \ge N$

$$\|\sum_{k=1}^{K} f_k(t) - F(t)\|_X = \|\sum_{k=K+1}^{\infty} f_k(t)\|_X \le \sum_{k=K+1}^{\infty} \|f_k\| < \varepsilon.$$

$\lhd$

Potenzreihen. In diesem Abschnitt sei X ein Banachraum und $D \subseteq \mathbb{C}$.

9.14. Definition. Es sei (x_k) eine Folge in X und $a \in \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to X$ der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (z-a)^k$$

heißt Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a. Die Reihe konvergiert trivialerweise für $z = a$. Es gilt jedoch mehr:

9.15. Satz. *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (z-a)^k$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kugel $\overline{B(a,\rho)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \le \rho\}$ *mit* $\rho < r = \left(\limsup \sqrt[k]{\|x_k\|}\right)^{-1}$.

Man nennt $r = \left(\limsup \sqrt[k]{\|x_k\|}\right)^{-1} \in [0,\infty]$ *den Konvergenzradius der Potenzreihe.*

Klar: Für ein z *mit* $|z-a| > r$ *ist die Reihe für* $f(z)$ *nicht konvergent.*

Beweis. Setze $f_k(z) = x_k(z-a)^k$. Dann ist auf $B(a,\rho)$

$$\|f_k\| = \sup\{\|x_k\|\,|z-a|^k : |z-a| \le \rho\} = \|x_k\|\rho^k.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert also $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|$, falls $\limsup \sqrt[k]{\|x_k\|}\rho < 1$. Aus dem Weierstraß-Kriterium folgt dann die absolute und gleichmäßige Konvergenz. $\lhd$

9.16. Satz. *Es sei* (x_k) *eine Folge in* X *und* $a \in \mathbb{C}$*; die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k(z-a)^k$ *konvergiere für ein* $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \ne a$*. Dann gilt für jedes* ρ *mit* $\rho < |z_0 - a|$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (z-a)^k$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\overline{B(a,\rho)}$.

Die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k x_k (z-a)^{k-1}$$

konvergiert ebenfalls absolut und und gleichmäßig auf $\overline{B(a,\rho)}$.

Beweis. Setze $f_k(z) := x_k(z-a)^k$, so dass $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$. Da $f(z_0)$ nach Annahme konvergiert, existiert ein $M > 0$ mit $\|f_k(z_0)\|_X \le M$ für alle k. Für $z \in \overline{B(a,\rho)}$ gilt dann

$$\|f_k(z)\|_X = \|x_k(z-a)^k\|_X = \|f_k(z_0)\|_X \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^k.$$

Setze $\theta = \rho/|z_0-a| \in [0,1[$ (beachte $\rho < |z_0-a|$). Dann gilt auf $\overline{B(a,\rho)}$: $\|f_k\| \le M\theta^k$ und

$$\sum_{k=0}^\infty \|f_k\| \le \sum_{k=0}^\infty M\theta^k = M\frac{1}{1-\theta}.$$

Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert $\sum f_k$ absolut und gleichmäßig.

Nun setze $g_k(z) = kx_k(z-a)^{k-1}$. Wie oben ist auf $\overline{B(a,\rho)}$

$$\|g_k\| = k\|x_k\|_X|z_0-a|^k \sup \frac{|z-a|^{k-1}}{|z_0-a|^{k-1}}\frac{1}{|z_0-a|} \le k\frac{M}{|z_0-a|}\theta^{k-1}.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^\infty \|g_k\|$, und der Satz von Weierstraß liefert die Behauptung. ◁

9.17. Folgerung. Für a in $\mathbb{R}$ sei $f(t) = \sum_{k=0}^\infty x_k(t-a)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$ und Werten in dem Banachraum X. Dann ist f differenzierbar auf dem Intervall $D =]a-r, a+r[$, und

$$f'(t) = \sum_{k=1}^\infty kx_k(t-a)^{k-1}.$$

Dies folgt sofort aus 9.12, da $\frac{d}{dt}x_k(t-a)^k = kx_k(t-a)^{k-1}$ und da die zugehörige Reihe nach 9.16 gleichmäßig auf $[a-\rho, a+\rho]$ für $\rho < r$ konvergiert.

Auf die Ableitung können wir denselben Schluss anwenden, da sie den gleichen Konvergenzradius hat (weil $\limsup \sqrt[k]{k\|x_k\|_X} = \limsup \sqrt[k]{\|x_k\|_X}$). So sehen wir, dass $f : D \to X$ beliebig oft differenzierbar ist mit

$$f^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^\infty k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)x_k(t-a)^{k-n}.$$

Insbesondere erhalten wir, indem wir $t = a$ setzen:

$$x_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \tag{1}$$

Die Koeffizienten x_k können also aus den Ableitungen in a wiedergewonnen werden.

9.18. Bemerkung. Man kann hier sogar zeigen, dass für $|z_0 - a| < r$ der Limes des komplexen Differenzenquotienten

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

existiert; dies ist eine stärkere Eigenschaft als reelle Differenzierbarkeit („Holomorphie“).

9.19. Beispiel.

$$\sum_{k=1}^\infty kt^k = t\sum_{k=0}^\infty kt^{k-1} = t\frac{d}{dt}(\sum_{k=0}^\infty t^k) = t\left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

9.20. Folgerung. Identitätssatz für Potenzreihen. Es sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (t-a)^k$$

eine Potenzreihendarstellung von f. Ist

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k (t-a)^k$$

eine weitere Potenzreihendarstellung und haben beide positiven Konvergenzradius, so gilt $x_k = y_k$ für alle k nach 9.17(1).

Taylorreihen.

9.21. Definition. D sei ein Intervall in $\mathbb{R}$, $f : D \to X$ beliebig oft differenzierbar, $a \in D$. Dann heißt

$$T_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$$

die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt a.

9.22. Folgerung. Nach 9.17 ist die Taylor-Reihe einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion die Potenzreihe selbst.

9.23. Beispiel. Die Taylorreihe von $\exp, \sin, \cos$ sind die uns bekannten Reihen.

9.24. Beispiel. $f(t) = \ln(1+t)$. Für $|t| < 1$ gilt

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k.$$

Die Summe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[-c, c]$ für jedes $c \in]0,1[$. Also ist

$$\begin{aligned} f(t) = f(t) - \underbrace{f(0)}_{=0} &= \int_0^t \frac{1}{1+s} ds = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s^k \, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} t^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k. \end{aligned}$$

Bemerkung. Man kann zeigen (Abelscher Grenzwertsatz), dass die Formel auch noch für $t = +1$ gilt:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \qquad \text{(alternierende harmonische Reihe).}$$

9.25. Satz: Binomialreihe. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $|t| < 1$

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k. \tag{1}$$

Dabei ist

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j} \qquad (= 1 \text{ falls } k = 0)$$

definiert. Dies ergänzt die uns bekannte Definition, denn für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ergibt das Produkt für $k \geq \alpha + 1$ stets 0.

Beachte: Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ sind alle $\binom{\alpha}{k}$ von Null verschieden.

Beweis. Setze $f(t) = (1+t)^\alpha$. Differentiation liefert $f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+t)^{\alpha-k}$. Also ist (1) die Taylorreihe für f.

Konvergiert diese Reihe? Ja, nach dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}t^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}t^k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| |t| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} |t| < 1.$$

Stellt aber die Taylor-Reihe wirklich die Funktion dar?

Betrachte das Restglied

$$\begin{aligned} R_{n+1}(t) &= \frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds \\ &= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^t (t-s)^n(1+s)^{\alpha-n-1}\,ds \end{aligned}$$

Fall 1: $0 \le t < 1$. Setze $C = \max\{1, (1+t)^\alpha\}$. Dann gilt für $0 \le s \le t$

$$0 \le (1+s)^{\alpha-n-1} \le (1+s)^\alpha \le C$$

und somit

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(t)| &\le (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| C \left|\int_0^t (t-s)^n\,ds\right| \\ &\le C\binom{\alpha}{n+1}t^{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0, \quad \text{falls} \quad |t|<1, \end{aligned}$$

da die Reihe $\sum\binom{\alpha}{n}t^n$ konvergiert.

Fall 2: $-1 < t < 0$. Dann ist (weil für $0 \le s \le |t|$ gilt $|t+s| = -t-s = |t|-s$)

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(t)| &= (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \left|\int_0^t (t-s)^n(1+s)^{\alpha-n-1}\,ds\right| \\ &= (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \left|\int_0^{|t|} (t+s)^n(1-s)^{\alpha-n-1}\,ds\right| \\ &= (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \int_0^{|t|} (|t|-s)^n(1-s)^{\alpha-n-1}\,ds \\ &= |\alpha|\,\left|\binom{\alpha-1}{n}\right| \int_0^{|t|}\left(\frac{|t|-s}{1-s}\right)^n(1-s)^{\alpha-1}\,ds. \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{d}{ds}\left(\frac{|t|-s}{1-s}\right) = \frac{-(1-s)+(|t|-s)}{(1-s)^2} = \frac{|t|-1}{(1-s)^2} < 0$ für $0 < s < |t|$, also ist diese Funktion monoton fallend. Sie nimmt also in $s=0$ den größten Wert an, und

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(t)| &\le |\alpha|\,\left|\binom{\alpha-1}{n}\right| \int_0^{|t|} |t|^n(1-s)^{\alpha-1}\,dt \\ &= C'\left|\binom{\alpha-1}{n}\right| |t|^n, \end{aligned}$$

wobei $C' = |\alpha|\,\int_0^{|t|}(1-s)^{\alpha-1}\,dt$ unabhängig von n ist. Nun folgt aus der Konvergenz von $\sum\binom{\alpha-1}{n}t^n$, dass $R_{n+1}(t)\to 0$. $\triangleleft$

9.26. Beispiel.

(a) $\alpha = -1$: Hier ist $\binom{-1}{k} = (-1)^k$.
Die geometrische Reihe $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$ ist also Spezialfall der Exponentialreihe.

(b) $\alpha = \frac{1}{2}$: Hier ist $\binom{1/2}{0} = 1$, $\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$, $\binom{1/2}{2} = \frac{1/2(-1/2)}{1\cdot 2} = -\frac{1}{8}$, $\binom{1/2}{3} = \frac{1/2(-1/2)(-3/2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{16}$, $\binom{1/2}{4} = \frac{1/2(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{16}\cdot\frac{-5/2}{4} = -\frac{5}{128}$.
Also
$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \dots.$$

9.27. Beispiel: Kinetische Energie eines relativistischen Teilchens. Ein Teilchen habe die Masse m. Nach Einstein hat es dann die Gesamtenergie $E = mc^2$. Die Masse wiederum hängt von der Geschwindigkeit v des Teilchens ab; es gilt
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$
wobei m_0 die Ruhemasse ist. In Ruhe hat das Teilchen die Energie $E_0 = m_0c^2$. Die kinetische Energie ist die Differenz $E_{kin} = E - E_0$. Da $v < c$ ist schließen wir aus der Binomialreihenentwicklung ($\alpha = -1/2$):
$$\begin{aligned} E_{kin} &= mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{2}(v/c)^2 + \frac{3}{8}(v/c)^4 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0v^2(v/c)^4 + \dots. \end{aligned}$$
Die erste relativistische Korrektur zur klassischen kinetischen Energie ist also $\frac{3}{8}m_0v^2(v/c)^4$.

9.28. Warnendes Beispiel: Taylorreihe $\neq$ Funktion.
$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$
Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k$. Es folgt: $T_f = 0$ ist konvergent, aber $T_f(t) \neq f(t)$ falls $t \neq 0$.