8. Das Riemann-Integral

Integrierbarkeit. Im Folgenden sei X ein Banachraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to X$ eine beschränkte Funktion (d.h. es gibt ein $C \geq 0$ mit $\|f(t)\| \leq C$ für alle $t \in [a, b]$).

8.1. Definition. Für eine Zerlegung („Partition")

$$\mathcal{Z} = \{t_0 = a \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N = b\}$$

von $[a, b]$ definiert man die *Feinheit* $|\mathcal{Z}|$ durch

$$|\mathcal{Z}| = \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \ldots, N\}.$$

Zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ wähle $s_j \in [t_{j-1}, t_j], j = 1, \ldots, N$, setze $s = \{s_1, \ldots, s_N\}$.

Die "Riemannsche Zwischensumme zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit Zwischenpunkten $s_1, \ldots, s_N$" ist

$$\sigma(f, \mathcal{Z}, s) = \sum_{j=1}^{N} f(s_j)(t_j - t_{j-1}). \tag{1}$$

Wir nennen f (Riemann-) integrierbar, falls f beschränkt ist und ein Element $I \in X$ existiert, für das gilt

> Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $|\mathcal{Z}| < \delta$ gilt $\|I - \sigma(f, \mathcal{Z}, s)\| < \varepsilon$ unabhängig von der Wahl der s_j.

In diesem Fall nennen wir I das Integral von f und schreiben

$$I = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Offensichtlich spielt es keine Rolle, wenn man f in endlich vielen Punkten abändert: Der Beitrag zu (1) geht bei hoher Feinheit gegen 0.

Besteht das Intervall $[a, b]$ nur aus einem Punkt ($a = b$), so liefert die Konstruktion stets $I = 0$.

8.2. Satz.

(a) $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *ist Riemann-integrierbar, genau dann wenn* $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar sind; dann ist*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\, dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\, dt.$$

(b) $f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ *ist Riemann-integrierbar* $\Leftrightarrow$ $f_j : [a, b] \to \mathbb{K}$ *Riemann-integrierbar für* $j = 1, \ldots, n$. *In diesem Fall ist*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\, dt \right)$$

Beweis. (a) f beschränkt $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ beschränkt. Nun ist $\operatorname{Re} \sigma(f, \mathcal{Z}, s) = \sigma(\operatorname{Re} f, \mathcal{Z}, s)$ und $\operatorname{Im} \sigma(f, \mathcal{Z}, s) = \sigma(\operatorname{Im} f, \mathcal{Z}, s)$. Daraus folgt die Behauptung, weil

$$\begin{aligned} \max\{|\operatorname{Re} I - \sigma(\operatorname{Re} f, \mathcal{Z}, s)|, |\operatorname{Im} I - \sigma(\operatorname{Im} f, \mathcal{Z}, s)|\} &\leq |I - \sigma(f, \mathcal{Z}, s)| \\ &\leq |\operatorname{Re} I - \sigma(\operatorname{Re} f, \mathcal{Z}, s)| + |\operatorname{Im} I - \sigma(\operatorname{Im} f, \mathcal{Z}, s)| \end{aligned}$$

(b) Analog. $\lhd$

8.3. Satz. *Es seien* $f, g : [a, b] \to X$ *Riemann-integrierbar,* $c \in \mathbb{K}$.

(a) *$f + g : [a, b] \to X$ ist Riemann-integrierbar,*

$$\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

(b) *$cf : [a, b] \to X$ ist Riemann-integrierbar,*

$$\int_a^b cf(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt.$$

(c) *Ist $X = \mathbb{R}$ und $f \le g$, so ist*

$$\int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt.$$

Beweis. Folgt sofort aus der Definition über Zwischensummen. $\lhd$

8.4. Satz. *Es sei $f : [a, b] \to X$ stetig, X Banachraum. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Zum Beweis brauchen wir einen neuen Begriff:

8.5. Definition. Eine Funktion $f : U \to X$ (U Teilmenge eines normierten Raums Y) heißt *gleichmäßig stetig*, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(t) - f(t')\|_X < \varepsilon \text{ für alle } t, t' \text{ mit } \|t - t'\|_Y < \delta.$$

Dies unterscheidet sich von der üblichen Stetigkeitsdefinition dadurch, dass das δ nicht von der Wahl des t abhängt.

Dann gilt folgender Satz:

8.6. Satz. *Eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist gleichmäßig stetig.*

Bemerkung. Die Kompaktheit ist entscheidend: $t \mapsto 1/t$ auf $]0, 1[$ und $t \mapsto \sin(t^2)$ auf $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Es sei $F : K \to X$ stetig, K kompakte Teilmenge eines normierten Raums Y (z.B. $K = [a, b]$). Wäre F nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und Folgen (t_j), (t'_j) mit

$$(*) \quad \|t_j - t'_j\| \to 0 \quad \text{aber} \quad (**) \quad \|F(t_j) - F(t'_j)\| \ge \varepsilon.$$

Wegen der Kompaktheit haben (t_j), (t'_j) konvergente Teilfolgen (t_{j_l}), (t'_{j_l}); wegen $(*)$ haben diese denselben Grenzwert, etwa $t \in K$. Dann folgt aus der Stetigkeit von F, dass $F(t_{j_l}) \to F(t) \leftarrow F(t'_{j_l})$ im Widerspruch zu $(**)$. $\lhd$

Beweis von 8.4. *Schritt* 1. f ist beschränkt nach 6.9 und gleichmäßig stetig nach 8.6. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\|f(t) - f(t')\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{falls } |t - t'| < \delta.$$

Schritt 2. Es sei $\mathcal{Z}$ wie in Definition 8.1 eine Zerlegung der Feinheit $< \delta$ mit Zwischenstellen-Tupel s. Ist S' ein anderes Zwischenstellen-Tupel, so gilt

$$|\sigma(\mathcal{Z}, f, s) - \sigma(\mathcal{Z}, f, s')| \le \sum_{j=1}^N |f(s_j) - f(s'_j)|(t_j - t_{j-1})$$

$$< \quad \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Schritt 3. Es sei $\mathcal{Z}'$ eine weitere Zerlegung, die alle Zerlegungspunkte von $\mathcal{Z}$ enthält; s' sei ein Zwischenstellen-Tupel für $\mathcal{Z}'$. Wir denken uns die Zerlegungspunkte von $\mathcal{Z}'$ bei $\mathcal{Z}$ dazu, behalten jedoch auf den Intervallen $[t_{j-1}, t_j]$ den Zwischenwert s_j bei. Wie bei Schritt 2 schließen wir, dass $|\sigma(\mathcal{Z}, f, s) - \sigma(\mathcal{Z}', f, s')| < \varepsilon/2$.

Schritt 4. Sind nun $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ zwei Zerlegungen von $[a, b]$ mit Zwischenstellen-Tupeln $s^{(1)}$ und $s^{(2)}$, so betrachten wir die Zerlegung $\mathcal{Z}'$, die die Zerlegungspunkte beider Zerlegungen enthält und wählen ein beliebiges Zwischenstellen-Tupel s'. Nach Schritt 3:

$$\begin{aligned}
&|\sigma(\mathcal{Z}_1, f, s^{(1)}) - \sigma(\mathcal{Z}_2, f, s^{(2)})| \\
\leq\ & |\sigma(\mathcal{Z}_1, f, s^{(1)}) - \sigma(\mathcal{Z}', f, s')| + |\sigma(\mathcal{Z}', f, s') - \sigma(\mathcal{Z}_2, f, s^{(2)})| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Schritt 5. Nun wähle eine Folge $\varepsilon_n \to 0$ und zugehörige δ_n, sowie Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ mit $|\mathcal{Z}_n| < \delta_n$, Zwischenpunkte-Tupel $s^{(n)}$.

Dann gilt für $k, m \geq n$

$$\|\sigma(f, \mathcal{Z}_k, s^{(k)}) - \sigma(f, \mathcal{Z}_m, s^{(m)})\| < \varepsilon_n.$$

Die Folge $(\sigma(f, \mathcal{Z}_k, s^{(k)}))_{k=1}^{\infty}$ ist daher eine Cauchy-Folge in X, hat also (X ist ein Banachraum) einen Grenzwert, I. Aus Schritt 4 folgt, dass I nicht von der Wahl der Zerlegungsfolge abhängt. Also ist $I = \int_a^b f(t)\, dt$. ◁

8.7. Satz. *Es sei $a < b < c, f_1 : [a, b] \to X$ Riemann-integrierbar, $f_2 : [b, c] \to X$ Riemann-integrierbar. Definiere $f : [a, c] \to X$ durch*

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & a \leq t \leq b \\ f_2(t) & b < t \leq c \end{cases}.$$

Dann ist $f : [a, c] \to X$ Riemann-integrierbar und

$$\int_a^c f(t)\, dt = \int_a^b f_1(t)\, dt + \int_b^c f_2(t)\, dt.$$

Beweis. (Analog zum Beweis von Satz 8.4) Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Setze $I_1 = \int_a^b f_1(t)\, dt, I_2 = \int_b^c f_2(t)\, dt$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ von $[a, b]$ und $\mathcal{Z}_2$ von $[b, c]$ mit $|\mathcal{Z}_1|, |\mathcal{Z}_2| < \delta$ und beliebigen Zwischenpunkt-Tupeln $s^{(1)}, s^{(2)}$ gilt

$$\|I_j - \sigma(f_j, \mathcal{Z}_j, s^{(j)})\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad j = 1, 2. \tag{1}$$

Sei nun $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a, c]$ mit Zwischenpunkt-Tupel s. Wir fügen zu $\mathcal{Z}$ den Punkt b hinzu, nennen diese Zerlegung $\mathcal{Z}'$, wählen einen zusätzlichen Zwischenpunkt, nennen das neue Tupel s'.

Dann ist $\|\sigma(f, \mathcal{Z}, s) - \sigma(f, \mathcal{Z}', s')\| \leq 2 \max_{t \in [a,c]} \|f(t)\| \cdot |\mathcal{Z}|$. Ferner liefert $\mathcal{Z}'$ Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ von $[a, b]$ und $\mathcal{Z}_2$ von $[b, c]$ von mindestens gleicher Feinheit, und $\sigma(f, \mathcal{Z}', s') = \sigma(f_1, \mathcal{Z}_1, s^{(1)}) + \sigma(f_2, \mathcal{Z}_2, s^{(2)})$. Ist also $|\mathcal{Z}| < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{6 \max |f|}\}$, so ist

$$\begin{aligned}
&\|\sigma(f, \mathcal{Z}, s) - (I_1 + I_2)\| \\
\leq\ & \|\sigma(f, \mathcal{Z}, s) - \sigma(f, \mathcal{Z}', s')\| + \|\sigma(f_1, \mathcal{Z}_1, s^{(1)}) - I_1\| + \|\sigma(f_2, \mathcal{Z}_2, s^{(2)}) - I_2\| \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

◁

8.8. Definition und Folgerung. Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \to X$ stückweise stetig, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ gibt und stetige Funktionen $f_j : [t_{j-1}, t_j] \to X$, $j = 1, \ldots, N$, so dass f auf $]t_{j-1}, t_j[$ mit f_j übereinstimmt.

Der obige Satz zeigt, dass stückweise stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind.

8.9. Satz. *Es sei $f : [a,b] \to X$ stückweise stetig. Dann ist*

$$\| \int_a^b f(t)\,dt \| \le \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

Insbesondere ist $\| \int_a^b f(t)\,dt\| \le (b-a)\sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.[4]

Beweis. Beachte: $\|f\|$ ist stückweise stetig, also auch Riemann-integrierbar.
Die Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass

$$\|\sigma(f,\mathcal{Z},s)\| \le \sigma(\|f\|,\mathcal{Z},s)$$

für beliebige $\mathcal{Z}, s$. ◁

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

8.10. Definition. Ist $f : [a,b] \to X$ Riemann-integrierbar, $a < b$, so setze

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

8.11. Satz. *Es sei $f : [a,b] \to X$ stetig, $t_0 \in [a,b]$. Definiere $F : [a,b] \to X$ durch*

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(s)\,ds.$$

Dann ist F differenzierbar auf $[a,b]$ und

$$F'(t) = f(t).$$

Beweis. Sei $t_1 \in [a,b]$ fest. Dann ist für $t \ne t_1$

$$\begin{aligned} \frac{F(t)-F(t_1)}{t-t_1} - f(t_1) &= \frac{\int_{t_1}^t f(s)\,ds - f(t_1)(t-t_1)}{t-t_1} \\ &= \frac{\int_{t_1}^t f(s)-f(t_1)\,ds}{t-t_1}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von f in t_1 existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(s)-f(t_1)\| < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |s-t_1| < \delta.$$

Nach 8.9 ist

$$\| \int_{t_1}^t f(s) - f(t_1)\,ds \| < \varepsilon|t_1 - t|.$$

Also ist die Norm der rechten Seite von (1) $\le \varepsilon$ und $F'(t_1) = f(t_)$. ◁

8.12. Definition. Eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to X$ heißt Stammfunktion von $f : [a,b] \to X$, falls $F' = f$.

8.13. Satz. *Es sei $f : [a,b] \to X$ stetig und $F : [a,b] \to X$ eine Stammfunktion. Eine weitere Funktion $G : [a,b] \to X$ ist genau dann ebenfalls eine Stammfunktion, wenn $F - G$ konstant ist.*

[4] Die Aussage stimmt auch für Riemann-integrierbares f; der Beweis ist etwas komplizierter.

Beweis. „$\Leftarrow$" Ist $F - G = C$ konstant, so ist $G' = (G + C)' = F' = f$.
„$\Rightarrow$" Ist $G' = F' = f$, so ist $(F - G)' = 0$, also $F - G$ konstant nach 7.19(c). $\triangleleft$

8.14. Folgerungen. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Es sei $f : [a, b] \to X$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F(t)|_a^b.$$

Man schreibt diese Identität oft in der Form "$\int f(t)\,dt = F(t) + C$ " und nennt $\int f(t)\,dt$ das unbestimmte Integral.

Beweis. Definiere $F_0(t) = \int_a^t f(s)\,ds$. Dann ist F_0 Stammfunktion von f und

$$F_0(a) = 0, \quad F_0(b) = \int_a^b f(s)\,ds.$$

Ist F beliebige Stammfunktion, so ist $F(t) = F_0(t) + c$ für ein festes $c \in X$. Es folgt

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(s)\,ds.$$

$\triangleleft$

8.15. Beispiele.

(a) Sei $s \in \mathbb{R}, s \neq -1$. Dann gilt

$$\int_a^b t^s\,dt = \left.\frac{t^{s+1}}{s+1}\right|_a^b,$$

da $\frac{t^{s+1}}{s+1}$ Stammfunktion zu t^s. Dabei setzen wir voraus: Für $s = -2, -3, \ldots$ soll 0 nicht im Integrationsintervall liegen. Für $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ soll Integrationsintervall in $\mathbb{R}_+$ liegen, ansonsten ist t^s nicht definiert.

(b) Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln t|_a^b,$$

da $\ln t$ Stammfunktion zu $1/t$ auf $\mathbb{R}_+$ ist.

Für $a, b < 0$ gilt

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln(-t)|_a^b,$$

da $\ln(-t)$ Stammfunktion zu $1/t$ auf $\mathbb{R}_-$ ist.

(c)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin t\,dt &= -\cos t|_a^b, \quad \text{da} \quad \cos' = -\sin \\
\int_a^b \cos t\,dt &= \sin t|_a^b, \quad \text{da} \quad \sin' = \cos \\
\int_a^b e^t dt &= e^t|_a^b, \quad \text{da} \quad (e^t)' = e^t \\
\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \arcsin t|_a^b, \quad \text{da} \quad \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \le a \le b \le 1 \\
\int_a^b \frac{dt}{1+t^2} &= \arctan t|_a^b, \quad \text{da} \quad \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\
\int_a^b \frac{dt}{\cos^2 t} &= \tan t|_a^b, \quad \text{da} \quad \tan'(t) = \frac{1}{\cos^2 t};
\end{aligned}$$

hier setzen wir voraus, dass $\cos^2 t \neq 0$ im Integrationsintervall.

8.16. Beispiel.

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 2\pi & k = 0 \\ \frac{e^{2\pi k i}-1}{ik} & k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Speziell $= 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Beweis. Gilt, weil $(e^{ikt})' = ike^{ikt}$.

8.17. Satz. (Substitutionsregel). Es sei $f : [a, b] \to X$ stetig, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(s)\,ds.$$

Beweis. Sei F Stammfunktion zu f. Für $F \circ \varphi$ gilt nach der Kettenregel:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Also:

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F \circ \varphi)|_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(s)\,ds.$$

$\lhd$

8.18. Beispiel: Halbkreisfläche. Sei $-1 \le u \le v < 1$, $t = \sin x = \varphi(x)$, $a = \arcsin u$, $b = \arcsin v$.

$$\begin{aligned}
\int_u^v \sqrt{1-t^2}dt &= \int_{\arcsin u}^{\arcsin v} \sqrt{1-\sin^2 x}\ \cos x\,dx \quad (\text{mit} \quad \cos \ge 0!) \\
&= \int_{\arcsin u}^{\arcsin v} \cos^2 x\,dx. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix}+e^{-2ix}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$$

folgt

$$\int_u^v \sqrt{1-t^2}dt = \left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{\arcsin u}^{\arcsin v}.$$

Nun ist $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}$. Es folgt

$$\int_u^v \sqrt{1-t^2}dt = \left(\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t\right)\Big|_u^v.$$

Für $u = -1, v = +1$ folgt

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Dies ist die Fläche des Halbkreises vom Radius 1.

8.19. Satz. (Partielle Integration). Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = f(t)g(t)|_a^b - \int f'(t)g(t)\,dt.$$

Beweis. Setze $F = fg$. Dann ist $F' = f'g + fg'$, also

$$\int_a^b f'g + fg'\,dt = F|_a^b = fg|_a^b.$$

$\lhd$

8.20. Beispiel. $a, b > 0$

$$\int_a^b \ln t\,dt = \ln t \cdot t|_a^b - \int_a^b \frac{1}{t}\cdot t\,dt = t(\ln t - 1)|_a^b.$$

8.21. Integration rationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung. Es sei $f(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ eine rationale Funktion. Wir können annehmen, dass $\operatorname{grad} q > \operatorname{grad} p$ ist; sonst kann man ein Polynom abdividieren, und Polynome können wir bereits integrieren.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat $q(t)$ die Darstellung

$$q(t) = c(t-t_1)^{\rho_1}\dots(t-t_r)^{\rho_r}(t^2+A_1t+B_1)^{\sigma_1}\dots(t^2+A_st+B_s)^{\sigma_s}$$

mit $c \in \mathbb{R}, \rho_j \in \mathbb{N}, \sigma_j \in \mathbb{N}, t_j \in \mathbb{R}, A_j, B_j \in \mathbb{R}$. Dann findet man $a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
\frac{p(t)}{q(t)} = {} & \frac{a_{11}}{t-t_1} + \dots + \frac{a_{1\rho_1}}{(t-t_1)^{\rho_1}} \\
& + \dots \\
& + \frac{a_{r1}}{t-t_1} + \dots + \frac{a_{r\rho_r}}{(t-t_r)^{\rho_r}} \\
& + \frac{\alpha_{11}t+\beta_{11}}{t^2+A_1t+B_1} + \dots + \frac{\alpha_{1\sigma_1}t+\beta_{1\sigma_1}}{(t^2+A_1t+B_1)^{\sigma_1}} \\
& + \dots \\
& + \frac{\alpha_{s1}t+\beta_{s1}}{t^2+A_st+B_s} + \dots + \frac{\alpha_{s\sigma_s}t+\beta_{s\sigma_s}}{(t^2+A_st+B_s)^{\sigma_s}}
\end{aligned}$$

Man braucht also nur noch die Funktionen auf der rechten Seite integrieren zu können; diese sind tabelliert.

8.22. Uneigentliche Integrale.

(a) $f : [a,\infty[\to X$ sei Riemann-integrierbar auf allen abgeschlossenen Intervallen $[a,R], R \in \mathbb{R}$. Man nennt das Integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergent und setzt $\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(t)\,dt$, falls der Limes existiert.

Analog $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ für $f :]-\infty,a] \to X$.

(b) $f:]a,b] \to X$ sei Riemann-integrierbar auf allen abgeschlossenen Intervallen $[a+\varepsilon, b], \varepsilon > 0$. Man nennt das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergent und setzt $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(t)\,dt$, falls der Limes existiert.

Analog $\int_a^b f(t)\,dt$ für $f:[a,b[\to X$.

(c) $f:]a,b[\to X, a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}, b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}, a < b$ sei Riemann-integrierbar auf allen abgeschlossenen Intervallen $[\alpha,\beta]$ mit $a < \alpha \le \beta < b$. Man sagt, $\int_a^b f(t)\,dt$ sei konvergent und setzt $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\alpha\to a^+,\beta\to b^-}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, falls der Limes existiert.

Beachte: Wir sagen dass er existiert, falls es ein $I \in X$ gibt mit der Eigenschaft, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass $\|\int_\alpha^\beta f(t)dt - I\| < \varepsilon$, falls $a < \alpha < a+\delta$ und $b-\delta < \beta < b$.

8.23. Beispiel. Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^s\,dt$ existiert nicht für $s \ge -1$, jedoch für $s < -1$, denn:

$$\int_1^R t^s\,dt \ge \int_1^R 1/tdt = \ln R \to +\infty \qquad \text{für } s \ge -1,$$

während

$$\int_1^R t^s\,dt = \frac{1}{s+1}(R^{s+1}-1) \to -\frac{1}{s+1} \qquad \text{für } s < -1.$$

Ebenso existiert $\int_0^1 t^s\,dt$ für $s > -1$, aber nicht für $s \le -1$.

8.24. Beipiel. Für $x > 0$ setze $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Das Integral konvergiert:

(a) Die Ungleichung $t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$ liefert Konvergenz bei 0.

(b) Ferner gibt es ein t_0 mit $t^{x-1}e^{-t} \le \frac{1}{t^2}$ für alle $t \ge t_0$, da $t^{x+1}e^{-t} \to 0$ für $t \to \infty$ (de l'Hospital). Dies zeigt Konvergenz bei $+\infty$.

Es gilt

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt = -t^x e^{-t}|_\varepsilon^R + x\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Nun ist $\lim_{t\to 0} t^x e^{-t} = 0, \lim_{t\to\infty} t^x e^{-t} = 0$; es folgt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{(Funktionalgleichung der Gamma-Funktion)}.$$

Außerdem gilt $\Gamma(1) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty}(1-e^{-R}) = 1$.

Insbesondere ist also

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\dots 1\Gamma(1) = n!$$

Bemerkung: Stirlingsche Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ kann mit Hilfe der Eigenschaften der Γ-Funktion hergeleitet werden.