6. Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit

Offene und abgeschlossene Mengen. Im Folgenden sei X Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums mit Norm $\|\cdot\|$.

6.1. Definition.

(a) Eine Teilmenge U von X heißt offen in X, falls für jedes $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x_0, \varepsilon) \subseteq U$.

(b) $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen in X, falls $X \setminus A$ offen ist.

ACHTUNG: "Offen" und "abgeschlossen" sind keine Gegensätze!
Ob eine Menge offen oder abgeschlossen ist, hängt auch davon ab, in welchem Raum X man sie betrachtet.

6.2. Satz.

(a) *Die Mengen X (= ganzer Raum) und $\emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.*

(b) *Vereinigungen beliebig vieler offener Mengen sind offen.*

(c) *Durchschnitte beliebig vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

(d) *Der Durchschnitt* endlich *vieler offener Mengen ist offen.*

(e) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

(f) *Die Mengen $B(x, \varepsilon), x \in X, \varepsilon > 0$ sind offen.*

Beweis.

(a) Für jedes $s \in X$ ist $B(x, 1) \subseteq X$. Daher ist X offen und $\emptyset$ abgeschlossen. Für $\emptyset$ ist bei Offenheit nichts zu zeigen, also ist $\emptyset$ offen und $X = X \setminus \emptyset$ abgeschlossen.

(b) Es seien $\{U_i : i \in I\}$ offen. Ist $x \in \bigcup U_i$, so existiert ein i_0 mit $x \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Dann ist auch $B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup U_i$.

(c) Es seien $\{A_i : i \in I\}$ abgeschlossene Mengen. Dann ist $X \setminus A_i$ offen für jedes i und (de Morgansche Regel)

$$X \setminus \bigcap A_i = \bigcup \underbrace{X \setminus A_i}_{\text{offen}} \quad \text{offen nach (b), also} \quad \bigcap A_i \quad \text{abgeschlossen.}$$

(d) Es seien $U_1, \ldots, U_m$ offen und $x_0 \in \bigcap U_j$. Dann gibt es für jedes j ein ε_j mit $B(x, \varepsilon_j) \subseteq U_j$. Für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ folgt $B(x_0, \varepsilon) \subseteq \bigcap U_j$.

(e) Folgt mit de Morganscher Regel aus (d).

(f) Für $y \in B(x, \varepsilon)$ ist $\|x - y\| = \varepsilon_0 < \varepsilon$, also $B(y, \varepsilon - \varepsilon_0) \subseteq B(x, \varepsilon)$, denn für $z \in B(y, \varepsilon - \varepsilon_0)$ gilt $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \varepsilon - \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon$.

$\triangleleft$

6.3. Beispiele. In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sind offene Intervalle offen, abgeschlossene Intervalle abgeschlossen

$$[a, b],\ ]-\infty, a],\ [a, \infty[\qquad \text{abgeschlossen}$$
$$]a, b[,\ ]-\infty, a[,\ ]a, \infty[\qquad \text{offen}$$

6.4. Satz. *Für $A \subseteq X$ ist äquivalent*

(a) *A ist abgeschlossen.*

(b) *Für jede Folge (x_k) in A mit $\lim x_k = x \in X$ gilt $x \in A$. Wichtig: Wir nehmen an, dass der Grenzwert in X existiert; zu zeigen ist nur, dass er in A liegt.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Annahme: $x \in X \setminus A$. Da $X \setminus A$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Da die Folge konvergiert, liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$ – Widerspruch!

(b) $\Rightarrow$ (a): (indirekt) Ist A nicht abgeschlossen, so ist $X \setminus A$ nicht offen. Es gibt also ein $x_0 \in X \setminus A$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt *kein* ε mit $B(x_0,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Wähle $\varepsilon_k = 1/k$. Da $B(x_0,\varepsilon) \not\subseteq X \setminus A$ ist, existiert ein $x_k \in A$ mit $x_k \in B(x_0,\varepsilon_k)$. Dann gilt jedoch $x_k \to x_0, x_k \in A$ aber $x_0 \notin A$ – Widerspruch! $\triangleleft$

6.5. Beispiel. Die Menge aller Häufungspunkte einer Folge (x_k) in X ist abgeschlossen.

Beweis. Es sei $y_1, y_2, \ldots$ eine Folge von Häufungspunkten, die gegen $y \in X$ konvergiert. Zu zeigen ist: y ist wieder ein Häufungspunkt. Dazu wähle für $\varepsilon_j = 1/j$ Indizes k_j mit $k_1 < k_2 < \ldots$ und $x_{k_j} \in B(y_j, \varepsilon_j)$. Dann gilt $x_{k_j} \to y$ für $j \to \infty$; damit ist y Häufungspunkt. $\triangleleft$

6.6. Zurück zu limsup. Es sei (x_k) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Hat sie nur endlich viele Häufungspunkte, so ist klar, was der größte (und somit $\limsup$) ist.

Was ist, wenn sie *unendlich viele* hat? Die Häufungspunktmenge ist wegen der Beschränktheit der Folge ebenfalls beschränkt (klar?) hat also ein Supremum s. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert dann ein Häufungspunkt y_j mit $s - 1/j < y_j \le s$; die y_j sind nicht notwendig verschieden. Nun wählen wir Indizes $k_1 < k_2 < \ldots$ mit $x_{k_j} \in B(y_j, 1/j)$. Dann ist (x_{k_j}) gegen s konvergent. Somit ist s selbst ein Häufungspunkt.

Kompaktheit.

6.7. Definition. Wir nennen eine Teilmenge K eines normierten Raums kompakt, falls gilt: Jede Folge (x_k) in K hat eine Teilfolge, die gegen ein $x_0 \in K$ konvergiert.

6.8. Bemerkung. Meist definiert man Kompaktheit so: Eine Teilmenge K eines normierten Raums heißt kompakt, falls gilt: Für jede Überdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

durch offene Mengen U_i lässt sich eine endliche Teilmenge von Indizes $\{i_0, \ldots, i_N\}$ auswählen, so dass $K \subseteq \bigcup_{j=0}^{N} U_{i_j}$ gilt. Der oben eingeführte Begriff heißt Folgenkompaktheit. In normierten Räumen sind beide Definitionen äquivalent. Mehr dazu später.

6.9. Satz. *Es sei K kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt die Funktion f auf K ihr Maximum und ihr Minimum an, d. h. es gibt $x_{\max} \in K$ und $x_{\min} \in K$ mit*

$$\begin{aligned} f(x_{\max}) &= \max\{f(x) : x \in K\} = \sup\{f(x) : x \in K\} \\ f(x_{\min}) &= \min\{f(x) : x \in K\} = \inf\{f(x) : x \in K\} \end{aligned}$$

Wichtig: Stetige reellwertige Funktion, kompakte Menge. Sonst i. Allg. falsch.

Beweis. 1. Zunächst zeige, dass f beschränkt ist. Annahme: Es existiert eine Folge (x_k) in K mit $|f(x_k)| \to \infty$ (*). Wegen der Kompaktheit hat (x_k) eine konvergente Teilfolgen (x_{k_l}) mit $x_{k_l} \to x_0 \in K$. Da $|f|$ stetig ist, konvergiert $|f(x_{k_l})|$ gegen $|f(x_0)|$ – Widerspruch zu (*).

2. Also existiert ein $M = \sup\{f(x) : x \in K\}$. Nach der Definition des Supremums existiert eine Folge

$$(x_k) \quad \text{in} \quad K \quad \text{mit} \quad f(x_k) \to M.$$

Wegen der Kompaktheit existiert eine konvergente Teilfolge (x_{k_j}) mit $x_{k_j} \to x_0$ in K.

Da f stetig ist, folgt

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(\lim x_{k_j}) = f(x_0).$$

Mit $x_{\max} := x_0$ folgt die Behauptung. Für Minimum analog. ◁

6.10. Beispiel. Ist K kompakt, so wird auf $C(K)$ durch

$$\|f\|_{\sup} = \max\{|f(x)| : x \in K\}$$

eine Norm, die sogenannte Supremumsnorm, definiert:

Zu (N1): Ist $f = 0$ (die Nullabbildung), so ist $\|f\|_{\sup} = 0$. Ist umgekehrt $\|f\|_{\sup} = 0$, so ist $|f(x)| = 0$ für alle x, also $f = 0$.

Zu (N2): Das Maximum von $|f|$ werde in x_0 angenommen. Dann sieht man leicht: Die Funktion $|cf|$ nimmt ihr Maximum ebenfalls in x_0 an; es hat den Wert $|c|\ \|f\|_{\sup}$, so dass $\|cf\|_{\sup} = |c|\ \|f\|_{\sup}$.

Zu (N3): Analog.

Wesentliche Frage: Wann ist eine Menge kompakt?

Erster Hinweis:

6.11. Satz. *Kompakte Mengen sind abgeschlossen und beschränkt.*

Dabei heißt eine Teilmenge K eines normierten Raums beschränkt, falls ein $C \ge 0$ existiert mit $\|x\| \le C$ für alle $x \in K$.

Beweis. (a) Abgeschlossenheit: Es sei $K \subseteq X$ kompakt und (x_k) eine Folge in K mit $x_k \to x_0$ für ein $x_0 \in X$. Zu zeigen ist, dass x_0 in K liegt. Wegen der Kompaktheit hat (x_k) eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$, die gegen ein Element $y_0 \in K$ konvergiert. Andererseits konvergiert auch (x_{k_j}) gegen x_0. Es folgt: $x_0 = y_0 \in K$.

(b) Beschränktheit: Wäre K nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge x_k in K mit $\|x_k\| \to \infty$; diese hätte keine konvergente Teilfolge – Widerspruch! ◁

Zweiter Hinweis:

6.12. Satz.

(a) *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.*

(b) *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*

Beweis. (a) Es sei K kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen. Ist (x_k) Folge in A, so auch in K. Sie hat also eine konvergente Teilfolge (x_{k_j}) mit Grenzwert $x \in K$. Wegen der Abgeschlossenheit liegt x in A. Somit ist die Teilfolge in A konvergent.

(b) Es sei $f : X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt. Ist (y_k) eine Folge in $f(K)$ und ist $x_k \in K$ Urbild zu y_k, so hat die Folge (x_k) eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j}) \to x \in K$. Es folgt wegen der Stetigkeit: $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \to f(x) \in f(K)$. ◁

Von zentraler Bedeutung ist nun:

6.13. Satz von Heine-Borel. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

Beispiel: Ein Intervall $[a, b]$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Wichtig: Dieser Satz gilt nicht für allgemeine normierte Räume!

Beweis. Zu zeigen ist nur noch
„$\Leftarrow$“: Es sei $K \subseteq \mathbb{C}^n$ abgeschlossen und beschränkt und (x_k) eine Folge in K. Nach Bolzano-Weierstraß hat sie eine in $\mathbb{C}^n$ konvergente Teilfolge. Wegen der Abgeschlossenheit liegt deren Grenzwert in K. ($\mathbb{R}^n$-Fall analog). $\triangleleft$

Es ist leicht zu sehen, ob eine Menge beschränkt ist. Aber: Wann ist eine Menge abgeschlossen? Da hilft:

6.14. Charakterisierung der Stetigkeit. Äquivalent sind

(a) $f : X \to Y$ stetig.
(b) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.
(c) Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Es sei A abgeschlossen und (x_k) eine Folge in $f^{-1}(A)$ mit $x_k \to x_0 \in X$. Dann ist $f(x_k) \in A$ und (wegen der Stetigkeit) konvergiert $f(x_k)$ gegen $f(x_0)$. Nun ist A abgeschlossen, daher gilt $f(x_0) \in A$ nach 6.4. Folglich ist $x_0 \in f^{-1}(A)$ nach Definition.

(b) $\Rightarrow$ (c) Es sei U offen in Y. Dann ist $Y \setminus U$ abgeschlossen, also $f^{-1}(Y \setminus U)$ abgeschlossen. Da $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ ist, ist $f^{-1}(U)$ als Komplement einer abgeschlossenen Menge offen.

(c) $\Rightarrow$ (a) Es sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Die Menge $B(f(x_0), \varepsilon)$ ist offen, somit auch ihr Urbild. Dieses enthält x_0. Daher existiert ein $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Dies heißt, dass $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$, falls $\|x - x_0\|_X < \delta$, so dass f in x_0 stetig ist. $\triangleleft$

6.15. Beispiel. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\sin x + e^{y^2} = 0, x^2 + \cos y \le 2\} = A$ ist abgeschlossen nach 6.2 (c) und 6.13, da

$$A = f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(]-\infty, 2])$$

für die stetige Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad &: \quad f(x, y) = \sin x + e^{y^2} \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad &: \quad g(x, y) = x^2 + \cos y. \end{aligned}$$

Äquivalenz von Normen.

6.16. Satz. *Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Dann gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ so, dass*

(1) $$c_1\|x\|_1 \le \|x\| \le c_2\|x\|_1.$$

Damit ist jede Norm zur 1-Norm äquivalent oder „Auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind alle Normen äquivalent.“

Beweis. Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm und e_j der j-te Einheitsvektor. Dann gilt für jedes x:

$$\|x\| = \|\sum_{j=1}^n x_j e_j\| \le \sum_{j=1}^n |x_j|\|e_j\| \le c_2\|x\|_1$$

mit $c_2 = \max\{\|e_j\| : j = 1, \ldots, n\}$.
Andererseits zeigt diese Ungleichung auch, dass für beliebiges x, y gilt:

$$\|x - y\| \le c_2\|x - y\|_1.$$

Somit ist die unbekannte Norm eine stetige Abbildung auf dem mit der 1-Norm versehenen $\mathbb{K}^n$. Der Einheitskreis $E = \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_1 = 1\}$ ist kompakt nach Heine-Borel, da abgeschlossen (die 1-Norm ist stetig nach 5.9) und beschränkt. Die stetige Funktion $x \mapsto \|x\|$ nimmt dort also ihr

Minimum c_1 an. Es ist zum einen ≥ 0, da die Norm nicht-negativ ist, zum anderen $\neq 0$, da nur der Nullvektor (der nicht in E liegt) die Norm Null hat. Es folgt

$$\|y\| \geq c_1 = c_1\|y\|_1, \quad y \in E.$$

Ist $x \neq 0$ beliebig, so setze $y = x/\|x\|_1$. Dann ist

$$\|x\| = \|y\| \cdot \|x\|_1 \geq c_1\|y\|_1 \cdot \|x\|_1 = c_1\|x\|_1.$$