4. Reihen

Im Folgenden sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$.

4.1. Definition. Es sei (x_k) Folge in X. Die Folge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad n = 1, 2, \ldots$$

der Partialsummen heißt (unendliche) Reihe und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ bezeichnet. Konvergiert die Folge (s_k) in X gegen s, so nennt man die Reihe konvergent gegen s und schreibt $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$.

Oft startet man die Folge/Reihe auch bei $k = 0$ oder einem anderen Wert. Für Konvergenzfragen macht das keinen Unterschied.

4.2. Satz. *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergent in X. Dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)$ gegen $\sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k$. Für alle $c \in \mathbb{K}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(cx_k)$ gegen $c\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.*

Die konvergenten Reihen bilden also einen Vektorraum.

Beweis. Folgt sofort aus 3.9(b), (c). ◁

4.3. Kriterium. Für eine Reihe in X gilt stets

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty} \quad \text{ist eine Cauchy-Folge}$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : \left\| \sum_{k=N}^{M} x_k \right\| < \varepsilon \quad \forall N, M \geq n_0$$

Ist X zusätzlich vollständig, d.h. ein Banachraum (z.B. $X = \mathbb{K}^n$), so gilt auch die Umkehrung und liefert uns ein wichtiges Kriterium für die Reihenkonvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ konvergiert} \quad \overset{\text{BANACHRAUM}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : \left\| \sum_{k=N}^{M} x_k \right\| < \varepsilon \quad \forall N, M \geq n_0.$$

4.4. Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in X heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergiert.

4.5. Satz. *Absolut konvergente Reihen in Banachräumen (z. B. in $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) sind konvergent.*

Achtung: Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent ($\rightarrow$ alternierende harmonische Reihe)!

Beweis. Wende das Kriterium aus 4.3 an; benutze, dass

$$\| \sum_{k=N}^{M} x_k \| \leq \sum_{k=N}^{M} \|x_k\|.$$

◁

4.6. Definition. Ist $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, so nennt man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

4.7. Satz. *Ist $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine absolut konvergente Reihe in einem Banachraum, so ist auch jede Umordnung absolut konvergent und hat denselben Grenzwert.*

Beweis. Es sei $\sum x_k = x$ und $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wir finden ein n_1 so, dass $\sum_{k=n}^m \|x_k\| < \varepsilon/2$ für alle $m \geq n \geq n_1$ und $\|x - \sum_{k=1}^n x_k\| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_1$.

Da π surjektiv ist, gibt es ein M mit der Eigenschaft, dass $\{\pi(1), \dots, \pi(M)\} \supseteq \{1, \dots, n_1\}$. Dann ist $M \geq n_1$ und $\pi(k) > n_1$ für alle $k > M$, da π injektiv ist. Es sei nun $K \geq M$. Wir setzen $m = \max\{\pi(k) : k \leq K\}$ und schätzen ab:

$$\|x - \sum_{k=1}^{K} x_{\pi(k)}\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n_1} x_k - \sum_{\{k:1\leq k\leq K \text{ und } \pi(k)>n_1\}} x_{\pi(k)}\| \leq \|x - \sum_{k=0}^{n_1} x_k\| + \sum_{k=n_1+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die umgeordnete Summe gegen x. ◁

4.8. Satz. *Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge: Ist $\sum_{k=1}^n x_k$ konvergent in X, so gilt $x_k \to 0$. (Die Umkehrung gilt nicht; siehe 4.11(b).)*

Beweis. Die Partialsummenfolge (s_n) ist eine Cauchy-Folge nach 3.11. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein n_0 mit $\|s_n - s_m\| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$; folglich ist $\|x_n\| = \|s_n - s_{n-1}\| < \varepsilon$ für $n > n_0$. ◁

4.9. Bemerkung. Für die Frage, ob eine Reihe konvergent bzw. absolut konvergent ist, spielen alle Veränderungen, die an lediglich endlich vielen Gliedern vorgenommen werden keine Rolle (für den Wert allerdings schon).

Wenn man endlich viele Glieder einer konvergenten Reihe umordnet, ändert sich der Wert der Reihe nicht. Wenn man unendlich viele Glieder umordnet, stimmt das im Allgemeinen nicht:

4.10. Riemannscher Umordnungssatz. *Es sei (x_k) eine Folge reeller Zahlen; $\sum_{k=1}^\infty x_k$ sei konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann existiert zu jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ eine Umordnung π von $\mathbb{N}$ (abhängig von r) derart, dass die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_{\pi(k)}$ gegen r konvergiert.*

Beweis. (Skizze) Wir schreiben (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) $p_1, p_2, \dots$ für die nichtnegativen Glieder der Folge (x_k) und $q_1, q_2, \dots$ für die negativen. Dann ist (weil die Summe konvergent, aber nicht absolut konvergent ist) $\sum_{\{k:x_k\geq 0\}} x_k = \sum p_k = +\infty$ und $\sum_{\{k:x_k<0\}} x_k = \sum q_k = -\infty$.

Wir wählen zuerst ein minimales n_1 so, dass $\sum_{k=1}^{n_1} p_k > r$. Anschließend wählen wir ein minimales m_1 so, dass $\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{m_1} q_k < r$. Sind n_j und m_j bestimmt, so wähle n_{j+1} und m_{j+1} minimal mit der Eigenschaft, dass $\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \dots \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} p_k > r$ und $\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \dots \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} p_k + \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} q_k < r$.

Dann ist die Folge

$$p_1, \dots, p_{n_1}, q_1, \dots, q_{m_1}, p_{n_1+1}, \dots, p_{n_2}, q_{m_1+1}, \dots$$

eine Umordnung von (x_k), deren Partialsummenfolge (weil $\lim p_k = \lim q_k = 0$) gegen r konvergiert. ◁

4.11. Beispiele.

(a) $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k$ ist nicht konvergent, da $((-1)^k)$ keine Nullfolge ist.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist nicht konvergent, obwohl $(\frac{1}{k})$ eine Nullfolge ist! Wir betrachten die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit Induktion: $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, also nicht konvergent.

(c) Es sei $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z},$$

weil (endliche geometrisch Reihe, 1.23)

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$$

und $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ ist (3.23).

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, denn $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

4.12. Satz (Cauchy-Produkt). *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k} x_{k-j}y_j)$ absolut konvergent, und*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} y_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} x_{k-j}y_j\right).$$

Veranschaulichung: Es werden erst die Werte entlang der Diagonalen multipliziert und addiert; dann werden diese aufaddiert.

$$\begin{aligned} &\underbrace{x_0y_0}_{k=0} \\ + \;&\underbrace{x_1y_0 + x_0y_1}_{k=1} \\ + \;&\underbrace{x_2y_0 + x_1y_1 + x_0y_2}_{k=2} \\ + \;&\ldots \end{aligned}$$

Beweis. Es seien s_n, s_n^+, t_n, t_n^+ und c_n die Partialsummenfolgen für $\sum x_k$, $\sum |x_k|$, $\sum y_k$, $\sum |y_k|$ und das Cauchy-Produkt. Wir müssen zeigen

$$\lim s_n \lim t_n = \lim c_n.$$

Wissen: $\lim s_n \lim t_n = \lim(s_n t_n)$. Bleibt zu zeigen: $s_n t_n - c_n \to 0$. Nun werden in $s_n t_n$ alle Produkte aufsummiert, deren maximaler Index $\leq n$ ist. In dem Cauchy-Partial-Produkt c_n werden alle Produkte aufsummiert, deren Indexsumme $\leq n$ ist. Darin sind alle Produkte enthalten, deren maximaler Index $\leq n/2$ ist; umgekehrt kommen die Produkte in c_n unter denen von $s_n t_n$ vor. Die Differenz $|s_n t_n - c_n|$ ist also höchstens so groß wie die Summe der Absolutbeträge aller Produkte, die in $s_n t_n$, aber nicht in $s_{[n/2]} t_{[n/2]}$ liegen. Dabei ist $[n/2]$ die größte ganze Zahl $\leq n/2$. Mit anderen Worten

$$|s_n t_n - c_n| \leq s_n^+ t_n^+ - s_{[n/2]}^+ t_{[n/2]}^+,$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen Null, weil $s_n^+ t_n^+$ eine Cauchyfolge ist. $\triangleleft$

Konvergenzkriterien. Im folgenden einige Kriterien zur Konvergenz von Reihen. Das erste ist sehr speziell und betrifft die Konvergenz in $\mathbb{R}$:

4.13. Satz (Leibniz-Kriterium). *Es sei (x_n) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x_k$ konvergent.*

Beweis. Setze $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k x_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= -x_{2n+1} + x_{2n+2} \leq 0 \\ s_{2n+3} - s_{2n+1} &= +x_{2n+2} - x_{2n+3} \geq 0. \end{aligned}$$

Man sieht:
(1) (s_{2n}) ist monoton fallend und nach unten beschränkt, da $s_{2n} \geq s_1$ für alle n, hat also einen Grenzwert s nach 3.15.
(2) (s_{2n+1}) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt: $s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_2$; hat also einen Grenzwert s'.

Wir zeigen $s = s'$: Ist $\varepsilon > 0$ vorgelegt, so existiert n_0 mit

$$\begin{aligned} |s_{2n} - s| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ |s_{2n+1} - s'| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ |x_{2n+1}| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

für $n \geq n_0$. Es folgt

$$\begin{aligned} |s - s'| &= |s - s_{2n}| + \underbrace{|s_{2n} - s_{2n+1}|}_{|x_{2n+1}|} + |s_{2n+1} - s'| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist $s = s'$, und die Reihe konvergiert. $\triangleleft$

4.14. Beispiel. Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium.

4.15. Satz (Vergleichskriterium/Majorantenkriterium). Es sei (r_k) eine Folge reeller Zahlen, $r_k \geq 0$ und $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ konvergent. Ferner sei (x_k) Folge in einem Banachraum mit

$$\|x_k\| \leq r_k \qquad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent.

Beweis. Mit Cauchy-Kriterium 4.3: Für $K, L \geq k_0$ ist

$$\sum_{k=K}^{L} \|x_k\| \leq \sum_{k=K}^{L} r_k.$$

$\triangleleft$

4.16. Beispiel. Die Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert, weil $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert und $\frac{1}{k^2} \leq 2\frac{1}{k(k+1)}$.

4.17. Satz (Quotientenkriterium). Es sei (x_k) Folge in einem Banachraum; $x_k \neq 0$ für $k \geq k_0$. Ist $\limsup \frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} < 1$, so ist die Reihe $\sum x_k$ absolut konvergent.

Beweis. Wähle C mit $\limsup \frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} < C < 1$. Dann existiert ein n_0 mit $\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} \leq C < 1$ für alle $k \geq n_0$. Vollständige Induktion zeigt, dass

$$\|x_k\| \quad \leq \quad C^{k-n_0}\|x_{n_0}\|, \quad k \geq n_0. \tag{1}$$

Nun folgt die Konvergenz aus dem Vergleichskriterium, denn

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} C^{k-n_0}\|x_{n_0}\| = \|x_{n_0}\| \, C^{-n_0} \sum_{k=0}^{\infty} C^k = \frac{\|x_{n_0}\|}{1-C} \, C^{-n_0}$$

ist als Vielfaches der geometrischen Reihe konvergent. $\triangleleft$

Beachte: Dies liefert Abschätzung für den Fehler beim Abbruch der Reihe. Siehe 4.23.

4.18. Bemerkung.

(a) Ist $\liminf \frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} > 1$, so ist die Reihe divergent, da die x_k dann keine Nullfolge bilden: $\|x_{k+1}\| > \|x_k\|$ für große k.

(b) Ist $\limsup \frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} = 1$, so kann man keine Konvergenzaussage machen (harmonische/alternierende harmonische Reihe)

4.19. Satz (Wurzelkriterium). Es sei (x_k) Folge in einem Banachraum mit

$$\limsup \sqrt[k]{\|x_k\|} < 1.$$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent.

Beweis. Wähle C mit $\limsup \sqrt[k]{\|x_k\|} < C < 1$. Dann existiert ein n_0 mit

$$\sqrt[k]{\|x_k\|} \leq C < 1 \text{ für alle } k \geq n_0 \text{ bzw.}$$
$$\|x_k\| \leq C^k \quad \text{für alle } k \geq n_0$$

Wieder folgt die Konvergenz aus dem Vergleichskriterium, weil $\sum C^k$ konvergiert. $\triangleleft$

4.20. Bemerkung.

(a) Ist $\limsup \sqrt[k]{\|x_k\|} > 1$, so existiert ein $C > 1$ und eine Teilfolge (x_{k_j}) von (x_k) mit $\|x_{k_j}\| \geq C^{k_j}$. Damit ist (x_k) keine Nullfolge, und die Reihe divergiert.

(b) Für $\limsup \sqrt[k]{\|x_k\|} = 1$ lässt sich keine Konvergenzaussage machen.

(c) Das Wurzelkriterium ist schärfer als das Quotientenkriterium: Ist das Quotientenkriterium erfüllt, so ist auch das Wurzelkriterium erfüllt, s. 4.17(1).

(d) Betrachten Sie zum besseren Verständnis die Folge $x_k = 2^{-k}$ für gerades k und $x_k = 2x_{k-1}$ für ungerades k und die zugehörige Reihe.

Exponentalfunktion und trigonometrische Funktionen.

4.21. Die Exponentialfunktion. Sinus. Cosinus.

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} =: e^z$ (auch $\exp z$) konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ nach dem Quotientenkriterium, da

$$\frac{\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{z^k}{k!}\right|} = \frac{|z|}{k+1} \to 0.$$

Man setzt $e := e^1$.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} =: \cos z$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ (Quotientenkriterium).

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} =: \sin z$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ (Quotientenkriterium).

4.22. Satz.

(a) $e(0) = 1$

(b) $e^z e^w = e^{z+w}$. *Insbesondere:* $e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$, *da* $e^z e^{-z} = e^0 = 1$.

(c) $e^{iz} = \cos z + i \sin z, z \in \mathbb{C}$ (Eulersche Formel).
Speziell für $x \in \mathbb{R}$ *folgt* $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$, $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.

(d) $\cos(-z) = \cos z,\ \sin(-z) = -\sin z,\ z \in \mathbb{C}$.

(e) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$.

(f) $|e^{ix}| = 1$ *für* $x \in \mathbb{R}$, *insbesondere*

$$-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

(*auf* $\mathbb{C}$ *sind beide Funktionen unbeschränkt*).

(g) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$

(h) $\cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$
$\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z,\ w, z \in \mathbb{C}$.

Beweis.

(a) klar

(b)

$$\begin{aligned} e^z e^w &\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{j} z^j w^{k-j} \\ &\overset{\text{BIN\_LS}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k = e^{z+w}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \overset{4.2}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2l}}{(2l)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ &\overset{4.2}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l}}{(2l)!} + i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ &= \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

Speziell für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos x \in \mathbb{R}, \sin x \in \mathbb{R}$, also

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} \quad \text{und} \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}.$$

(d) Einsetzen in 4.21(b),(c).

(e) folgt aus (c).

(f) $\overline{e^{ix}} = \cos x - i \sin x = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix} \ \Rightarrow$

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Da $|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$ folgt Aussage über $\sin, \cos$.

(g) Schreibe $z = x + iy$,

$$e^{\overline{z}} = e^{x-iy} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x(\cos y - i \sin y) = \overline{e^x(\cos y - i\sin y)} = \overline{e^z}.$$

(h) Einsetzen von (e) und (b).

4.23. Satz. *Restgliedabschätzungen. Es sei* $z \in \mathbb{C}$.

(a) $e^z = \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} + r_{N+1}(z)$, *wobei* $|r_{N+1}| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ *für* $|z| \leq \frac{N+2}{2}$.

(b) $\cos z = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + r_{2N+2}(z)$ *mit* $|r_{2N+2}(z)| \leq \frac{4}{3}\frac{|z|^{2N+2}}{(2N+2)!}$ für $|z| < \frac{2N+3}{2}$.

(c) $\sin z = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2N+3}(z)$ *mit* $|r_{2N+3}(z)| \leq \frac{4}{3}\frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!}$ für $|z| < \frac{2N+4}{2} = n+2$.

Beweis. (a)

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|z|}{(N+2)} + \frac{|z|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots\right).$$

Ist $|z| < \frac{N+2}{2}$, so ist der Klammerterm $\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \overset{4.21(a)}{=} 2$.

(b), (c) analog. ◁