Normen und normierte Räume.

3.1. Definition. Eine Norm auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X ist eine Abbildung $X \ni x \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$ die jedem Element x seine 'Norm' $\|x\|$ zuordnet. Dabei sollen folgende Axiome gelten:

(N1) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$; $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
(N2) $\|kx\| = |k| \, \|x\|$ für $k \in \mathbb{K}$, $x \in X$.
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für $x, y \in X$ (Dreiecksungleichung).

Es langt im wesentlichen, den Fall $X = \mathbb{R}^2$ oder $X = \mathbb{C}$ (visualisiert als Zahlenebene) zu verstehen. Wir schreiben $(X, \| \cdot \|)$ um anzudeuten, dass wir den Vektorraum X mit der Norm $\| \cdot \|$ betrachten.

Vorstellung: $\|x\|$ ist die Länge des Vektors x, und $\|x - y\|$ gibt die Länge des Vektors $x - y$, d.h. den Abstand zwischen x und y an. Klar: $\|x - y\| = \|y - x\|$.

Beispiele. Auf $\mathbb{R}$ und auf $\mathbb{C}$ ist jeweils der Betrag eine Norm. Überzeugen Sie sich selbst, dass die Axiome (N1), (N2) und (N3) gelten!

'Kugeln'. Für festes $x \in X$ und $r > 0$ bezeichnet man mit $B(x, r)$ die Menge

$$B(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\} \quad \text{“Kugel um } x \text{ vom Radius } r\text{”.}$$

Wie sieht das aus?

1. Der Fall $(\mathbb{R}, | \cdot |)$: Für $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ist $B(x, r) =]x - r, x + r[$.

2. Der Fall $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Für $z \in \mathbb{C}$ ist (in der üblichen Visualisierung von $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlenebene) $B(x, r)$ die Kreisscheibe um z vom Radius r.

3.2. Beispiel. Auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ benutzen wir meist die sogenannte euklidische Norm

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Beachte: Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ stimmt (unter der Visualisierung von $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlenebene) mit dem Betrag auf $\mathbb{C}$ überein. Wichtige weitere Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind:

Für $p \in [1, \infty[$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p},$$

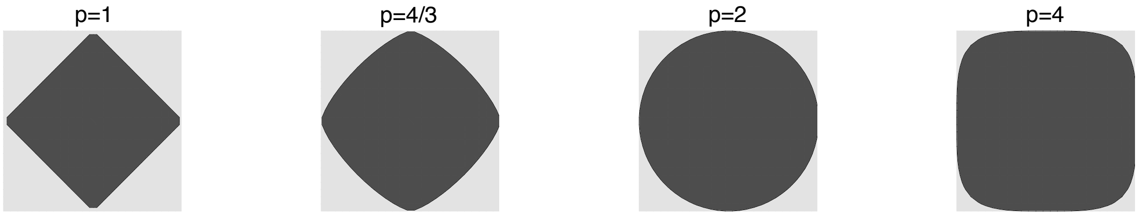
(für $p = 2$ ergibt sich die euklidische Norm), und

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, n\}.$$

3.3. Bemerkung.

(a) Dass dies tatsächlich Normen sind, ist für $p \neq 1, 2, \infty$ nicht offensichtlich (momentan können wir nicht einmal die p-te Potenz bilden).

(b) Wie sehen die Kugeln für die p-Norm in $\mathbb{R}^2$ aus?



(Die Graphiken sind leider an den Koordinatenachsen etwas abgeplattet dargestellt.)

Folgenkonvergenz. Im Folgenden sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der Norm $\|\cdot\|$. (Es langt völlig, sich den Fall $X = \mathbb{R}^2$ vorzustellen.) Auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ verwenden wir als Norm stets den Betrag.

3.4. Definition.

(a) Eine Folge in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. Statt $a(k)$ schreibt man meist a_k; die Folge schreibt man $(a_1, a_2, \ldots)$ oder $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ oder kurz (a_k).[2]

(b) Sind $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ Elemente von $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots)$ Teilfolge von (a_k).

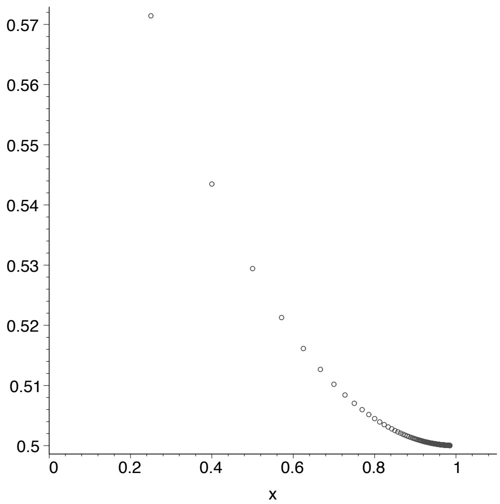
(c) Es sei (a_k) eine Folge in X und $a \in X$. Wir sagen

$$(a_k) \text{ konvergiert gegen } a \text{ oder } (a_k) \text{ ist konvergent mit Grenzwert } a$$

falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|a_k - a\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq n_0.$$

Wir schreiben $\lim a_k = a$ oder $a_k \overset{k\to\infty}{\to} a$ und nennen a den *Grenzwert.* Eine Folge, die keinen Grenzwert hat heißt *divergent.*



Folge in $\mathbb{R}^2$ mit Grenzwert $(1, \frac{1}{2})$.

3.5. Beispiele.

(a) Die Folge $\left(\frac{1}{k}\right)$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen 0.

(b) Die Folge $(i^k)_k$ in $\mathbb{C}$ ist divergent.

[2] Natürlich kann man auch Folgen bei $k = 0$ oder einer beliebigen anderen ganzen Zahl starten; $k \in \mathbb{N}$ ist lediglich eine bequeme Wahl.

Beweis. (a) Es sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wir müssen ein n_0 finden mit $|1/k - 0| < \varepsilon$ für alle $k \geq n_0$. Dazu wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1/\varepsilon$(eine solche Zahl gibt es nach 1.14(f)). Dann gilt für $k \geq n_0$:

$$\left|\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq n_0.$$

(b) Gäbe es einen Grenzwert z in $\mathbb{C}$, so gäbe es zu $\varepsilon = 1/4$ ein n_0 mit

$$|i^k - z| \leq \frac{1}{4} \text{ für } k \geq n_0$$

und somit

$$|i^k - i^l| = |i^k - z + z - i^l| \leq |i^k - z| + |i^l - z| \leq \frac{1}{2} \text{ für } k, l \geq n_0.$$

Da jedoch $i^{4k} = 1$ ist und $i^{4k+2} = -1$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, ist $|i^{4k} - i^{4k+2}| = 2$. Widerspruch. $\triangleleft$

3.6. Satz. *Der Grenzwert ist eindeutig: Konvergiert eine Folge gegen a und a', so ist $a = a'$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_1 : \|a_k - a\| < \varepsilon/2$ für $k \geq n_1$ und ein n_2 mit $\|a_k - a'\| < \varepsilon/2$ für $k \geq n_2$. Dann gilt für $n_0 \geq \max\{n_0, n_1\} : \|a - a'\| \leq \|a - a_{n_0}\| + \|a_{n_0} - a'\| < \varepsilon$. $\triangleleft$

3.7. Satz. *Es sei (z_k) eine Folge komplexer Zahlen, $z_k = x_k + iy_k$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$z_k \text{ konvergiert gegen } z \iff \begin{cases} x_k & \text{konvergiert gegen } x, \text{ und} \\ y_k & \text{konvergiert gegen } y. \end{cases}$$

Beweis. Zunächst ist $|\mathrm{Re}\,(z_k - z)| \leq |z_k - z|$ und $|\mathrm{Im}\,(z_k - z)| \leq |z_k - z|$. Aus der Konvergenz $z_k \to Z$ folgt daher, dass $x_k \to x$ und $y_k \to y$: Ist $\varepsilon > 0$ vorgelegt und n_0 so gewählt, dass $|z_k - z| < \varepsilon$, so gilt dies auch für Real- und Imaginärteil.

Umgekehrt gelte $x_k \to x$ und $y_k \to y$ und $\varepsilon > 0$ sei vorgelegt. Wähle n_1 mit $x_k - x| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_1$ und n_2 mit $|y_k - y| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_2$. Dann gilt für $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$:

$$|z - z_k| \leq |x_k - x| + |y_k - y| < \varepsilon.$$

$\triangleleft$

Für den nächsten Satz beobachten wir, dass eine Folge in $\mathbb{K}^n$ uns n Folgen in $\mathbb{K}$ liefert (die sog. Komponentenfolgen), indem wir die Komponenten der n-Vektoren betrachten. Unter der Annahme, dass wir schon wissen, dass die p-Normen aus Beispiel 3.2 tatsächlich Normen sind, können wir folgenden Satz formulieren:

3.8. Satz. *Eine Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergiert genau dann bezüglich einer der p-Normen aus 3.2, wenn jede Komponentenfolge in $\mathbb{K}$ konvergiert.*

Es sei $(x^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{K}^n$ mit $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$x^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ in } \mathbb{K}^n \text{ genau dann, wenn } x_j^{(k)} \to x_j \text{ in } \mathbb{K} \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

Insbesondere sehen wir, dass die Konvergenz tatsächlich von der Wahl von p unabhängig ist.

Beweis. Es ist für $l = 1, \ldots, n$:

$$|x_l^{(k)} - x_l| \leq \|x^{(k)} - x\|_p \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j|;$$

die letzte Ungleichung erhält man, weil für $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\|y\|_p = \| \sum_{j=1}^{n} (0, \ldots, y_j, 0, \ldots 0)\|_p \leq \sum_{j=1}^{n} \|(0, \ldots, y_j, 0, \ldots 0)\|_p = \sum_{j=1}^{n} |y_j|.$$

Dann analog zum Beweis von Satz 3.7. $\triangleleft$

3.9. Satz: Rechenregeln für Grenzwerte. Es seien $(x_k), (y_k)$ Folgen in X, (c_k) Folge in $\mathbb{K}, x, y \in X, c \in \mathbb{K}$.

(a) Ist die Folge (x_k) konvergent, so ist sie auch beschränkt, d. h.

$$\exists\, K \geq 0 : \|x_k\| \leq K \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Aus $x_k \to x$ und $y_k \to y$ folgt $x_k + y_k \to x + y$.

(c) Aus $x_k \to x$ und $c_k \to c$ folgt $c_k x_k \to cx$.

(d) Gilt $c_k \to c$ und $c \neq 0$ so auch $\frac{1}{c_k} \to \frac{1}{c}$.

Wichtig ist in (c) auch der Spezialfall $X = \mathbb{K}$: Das Produkt der Folgen reeller oder komplexer Zahlen konvergiert gegen das Produkt der Grenzwerte (sofern existent).

[Für später: Die konvergenten Folgen bilden einen Unterrraum des Vektorraums aller Folgen.]

Bemerkung: Die Umkehrung der Aussagen in 3.9(b),(c) gilt nicht!

Beweis.

(a) Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein n_0 mit $\|x_k - x\| < 1$ für $k \geq n_0$. Damit ist $\|x_k\| = \|x_k - x\| + \|x\| \leq \|x\| + 1$ für $k \geq n_0$. Für $K = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|, \|x\| + 1\}$ ergibt sich die Behauptung.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Dann existieren n_1, n_2 mit $\|x_k - x\| \leq \varepsilon/2$ für $k \geq n_1$ und $\|y_k - y\| \leq \varepsilon/2$ für $k \geq n_2$. Für $k \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ folgt

$$\|(x_k + y_k) - (x + y)\| \leq \|x_k - x\| + \|y_k - y\| < \varepsilon.$$

(c) Nach (a) existiert ein $K > 0$ mit $\|x_k\| \leq K$ für alle k. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren n_1, n_2 mit

$$\begin{aligned} |c_k - c| &< \frac{\varepsilon}{2\,K} \text{ für } k \geq n_1 \text{ und} \\ \|x_k - x\| &< \frac{\varepsilon}{2|c| + 1} \quad \forall k \geq n_2. \end{aligned}$$

Für $k \geq \max\{n_1, n_2\}$ folgt

$$\begin{aligned} \|c_k x_k - cx\| &= \|c_k x_k - cx_k + cx_k - cx\| \\ &\leq \|c_k x_k - cx_k\| + \|cx_k - cx\| \\ &\leq |c_k - c|\,\|x_k\| + |c|\,\|x_k - x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2\,K} K + |c| \frac{\varepsilon}{2|c| + 1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(d) Zu $\delta = |c|/2 > 0$ existiert ein k_0 mit $|c_k - c| < \delta = |c|/2$ für $k \geq k_0$. Dann ist $|c_k| \geq |c| - |c_k - c| \geq |c|/2$ für $k \geq k_0$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Nun ist

$$|c_k^{-1} - c^{-1}| = |c^{-1}(c - c_k)c_k^{-1}| = |c|^{-1}|c_k|^{-1}|c - c_k|.$$

Wähle $n_0 \geq k_0$ so, dass $|c - c_k| < \frac{\varepsilon}{2}|c|^2$ für $k \geq n_0$. Dann ist $|c_k^{-1} - c^{-1}| < \frac{1}{|c|}\frac{2}{|c|}\frac{\varepsilon}{2}|c|^2 \leq \varepsilon$. $\lhd$

Cauchy-Folgen und Vollständigkeit.

3.10. Definition. Eine Folge (x_k) heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 : \|x_k - x_m\| < \varepsilon \quad \forall k, m \geq n_0.$$

3.11. Satz. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 so, dass $\|x_k - x\| < \varepsilon/2\ \forall k \geq n_0$; hier ist x der Grenzwert der Folge. Dann ist für $k, m \geq n_0 : \|x_k - x_m\| \leq \|x_k - x\| + \|x - x_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ◁

3.12. Bemerkung. Nicht jede Cauchy-Folge in einem normierten Raum ist konvergent. Beispielsweise gibt es Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, die keinen Grenzwert haben.

3.13. Definition. Einen Raum, in dem jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat, nennt man *vollständig*. Ein vollständiger normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt *Banachraum*.

Einige Besonderheiten *reeller* Folgen.

3.14. Definition. Eine Folge (x_k) in $\mathbb{R}$ heißt

monoton wachsend, falls	$x_{k+1} \geq x_k$	für alle k
streng monoton wachsend, falls	$x_{k+1} > x_k$	für alle k
monoton fallend, falls	$x_{k+1} \leq x_k$	für alle k
streng monoton fallend, falls	$x_{k+1} < x_k$	für alle k.

3.15. Satz. *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent: Gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $x_k \leq x_{k+1} \leq K$ für alle k, so gilt $x_k \to x = \sup\{x_k\}$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Nach Definition des Supremums existiert ein n_0 mit

$$x_{n_0} > x - \varepsilon.$$

Für alle $k \geq n_0$ gilt also

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_k \leq x$$

und somit $|x - x_k| < \varepsilon$. ◁

3.16. Folgerung. Ist die Folge (x_k) monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist (x_k) auch konvergent. (Betrachte $(-x_k)$!)

3.17. Satz. Stabilität des Grenzwertes. *Es seien $(x_k), (y_k)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $x_k \leq y_k$ für alle k. Gilt: $x_k \to x$ und $y_k \to y$, so folgt $x \leq y$.*

Beweis. Annahme: $x > y$. Setze $\varepsilon = x - y > 0$. Dann existieren n_1, n_2 mit $|x_k - x| < \varepsilon/2$ für alle $k \geq n_1, |y_k - y| < \varepsilon/2$ für alle $k \geq n_2$. Für $k \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt $x_k > x - \varepsilon/2 = y + \varepsilon/2 > y_k$. Widerspruch! ◁

3.18. Satz. Schachtelungssatz. *Es seien $(a_k), (b_k), (x_k)$ Folgen in $\mathbb{R}$ und*

$$a_k \leq x_k \leq b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Gilt $a_k \to x$ und $b_k \to x$, so ist auch (x_k) konvergent, und $x_k \to x$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Dann existieren n_1, n_2 mit $|a_k - x| < \varepsilon/3$ für $k \geq n_1, |b_k - x| < \varepsilon/3$ für $k \geq n_2$. Setze $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_k - x| &\leq |x_k - a_k| + |a_k - x| \\ &\leq |b_k - a_k| + |a_k - x| \\ &\leq |b_k - x| + |x - a_k| + |a_k - x| < \varepsilon. \end{aligned}$$

◁

3.19. Satz. *In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent, d.h. $\mathbb{R}$ ist vollständig.*

Beweis. Es sei (x_k) eine Cauchy-Folge. Unsere erste Beobachtung: (x_k) ist beschränkt. Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein n_0 mit $|x_k - x_l| < 1$ für alle $k, l \geq n_0$. Damit ist $|x_k| \leq |x_k - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \leq 1 + |x_{n_0}|$ für alle $k \geq n_0$ und somit ist jedes Folgenglied $\leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0} + 1\}$.

Wir können daher zwei neue Folgen definieren

$$i_k = \inf\{x_j : j \geq k\} \qquad \text{und} \qquad s_k = \sup\{x_j : j \geq k\}.$$

Dann gilt

(i) $i_k \leq x_k \leq s_k$ für alle k

(ii) (i_k) ist monoton wachsend und beschränkt ($i_k \leq s_1$ für alle k), somit konvergent gegen ein $i \in \mathbb{R}$.

(iii) (s_k) ist monoton fallend und beschränkt ($s_k \geq i_1$ für alle k), somit konvergent gegen ein $s \in \mathbb{R}$.

(iv) Weil (x_k) Cauchy-Folge ist, folgt $i = s$. Wieso? Ist $\varepsilon > 0$ vorgelegt, wähle n_0 so groß, dass $|x_j - x_k| < \varepsilon/5$, $i - i_k < \varepsilon/5, s_k - s < \varepsilon/5$ für $j, k \geq n_0$. Ferner existieren $j_0, k_0 \geq n_0$ mit $x_{j_0} > s_{n_0} - \varepsilon/5$ und $x_{k_0} < i_{n_0} + \varepsilon/5$. Dann ist

$$s - i = |s - i| \leq |s - s_{n_0}| + |s_{n_0} - x_{j_0}| + |x_{j_0} - x_{k_0}| + |x_{k_0} - i_{n_0}| + |i_{n_0} - i| < \varepsilon.$$

Mit 3.18 folgt die Behauptung. ◁

3.20. Folgerung. $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Beweis. Sei (z_k) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind $(\operatorname{Re} z_k)$ und $(\operatorname{Im} z_k)$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ (siehe Beweis von 3.7). Mit 3.19 folgt, dass $(\operatorname{Re} z_k)$ und $(\operatorname{Im} z_k)$ Grenzwerte in $\mathbb{R}$ haben, und schließlich mit 3.7, dass (z_k) einen Grenzwert in $\mathbb{C}$ hat. ◁

3.21. Folgerung. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind vollständig.

Beweis. Analog.

3.22. Definition und Bemerkung. Man sagt, eine Folge (a_k) reeller Zahlen divergiere bestimmt gegen $+\infty$ und schreibt $\lim a_k = +\infty$, falls gilt:

$$\text{für alle } M > 0 \exists n_0 : a_k > M \quad \text{für alle } k \geq n_0.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass ab einem festen Index n_1 gilt $a_k > 0$ und $\lim \frac{1}{a_k} = 0$. (Wieso?)

Ebenso: $\lim a_k = -\infty$, falls $\lim(-a_k) = +\infty$, d.h. falls $\forall M > 0 \exists n_0 : a_k < -M \quad \forall k \geq n_0$.

3.23. Beispiele.

(a) Die Folgen $\left(\frac{1}{k^j}\right)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ konvergieren in $\mathbb{R}$ gegen 0.

(b) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, so ist die Folge (z^k) eine Nullfolge.

(c) Sei $z \in \mathbb{C}, |z| < 1, r \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim k^r |z|^k = 0$.

(d) $\lim \sqrt[k]{k} = 1$.

(e) Es sei $a > 0$. Dann gilt $\lim \sqrt[k]{a} = 1$.

(f) $\lim \sqrt[k]{k^2 + k + 2} = 1$.

(g) $(\sqrt[k]{k!})$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

Beweis.

(a) Wir wissen, dass $0 \leq \frac{1}{k^j} \leq \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $j = 2, 3, \ldots$ Also folgt die Behauptung aus 3.5 und dem Schachtelungssatz angewandt auf die Folge $(0, 0, \ldots)$ und die beiden anderen.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wir haben zu zeigen, dass ein n_0 existiert mit $|z^k| < \varepsilon$ für $k \geq n_0$ bzw., äquivalent dazu, dass $\frac{1}{|z^k|} > \frac{1}{\varepsilon}$ für $k \geq n_0$.

Es ist $\frac{1}{|z|} > 1$. Setze $\delta := \frac{1}{|z|} - 1$. Wähle n_0 so groß, dass $n_0\delta > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dann gilt für $k \geq n_0$ nach der Bernoullischen Ungleichung:

$$\frac{1}{|z^k|} = \frac{1}{|z|^k} \overset{1.10}{\geq} \frac{1}{|z|^{n_0}} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^{n_0} = (1+\delta)^{n_0} \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n_0\delta > \frac{1}{\varepsilon}.$$

(c) Setze $b_k = k^r|z|^k$. Dann gilt:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k+1)^r|z|^{k+1}}{k^r|z|^k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^r |z|. \tag{1}$$

Da $\lim(1+\frac{1}{k})^r = (\lim(1+\frac{1}{k}))^r = 1$ ist und $|z| < 1$ ist, folgt, dass ein $0 \leq C < 1$ existiert mit $b_{k+1} \leq Cb_k$ für $k \geq k_0$, k_0 geeignet. Mit vollständiger Induktion folgt $0 \leq b_{k_0+m} \leq C^m b_{k_0} \to 0$, für $m \to \infty$. Also $b_k \to 0$.

(d) Zeige: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\sqrt[k]{k} - 1 < \varepsilon$:

Es ist $0 < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Somit ist nach (c) $\lim k \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^k = 0$. Es folgt $k\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^k < 1$ bzw. $1 < k < (1+\varepsilon)^k$ für $k \geq n_0$, also auch $1 < \sqrt[k]{k} < 1 + \varepsilon$ für $k \geq n_0$.

(e) Für $a \geq 1$ folgt dies aus dem Schachtelungssatz, weil für alle $k \geq a$ gilt:

$$1 \leq a \leq k \Rightarrow 1 \leq \sqrt[k]{a} \leq \sqrt[k]{k} \to 1.$$

Für $a < 1$ betrachte $1/a$: $\frac{1}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{\frac{1}{a}} \to 1$.

(f) Schachtelungssatz und Rechenregeln: $1 \leq \sqrt[k]{k^2+k+2} \leq \sqrt[k]{4k^2} = \sqrt[k]{4}\sqrt[k]{k}\sqrt[k]{k} \to 1$.

(g) Zu zeigen: Zu $M > 0$ existiert n_0 mit $\sqrt[k]{k!} > M$ bzw. $M^k/k! < 1$ für alle $k \geq n_0$. Nun ist für $k \geq k_0 \geq 2M$:

$$\frac{M^k}{k!} = \frac{M^{k_0}}{k_0!} \underbrace{\frac{M}{k_0+1} \cdot \ldots \cdot \frac{M}{k}}_{(k-k_0)\text{ Faktoren } \leq 1/2} \leq \frac{M^{k_0}}{k_0!}\, 2^{k_0-k} < 1$$

für hinreichend großes k nach (c). ◁

3.24. Definition und Bemerkung.

Ein Element $x \in X$ heißt Häufungspunkt der Folge (x_k) in X, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Kugel $B(x,\varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder enthält.

(a) Eine konvergente Folge hat also genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.

(b) Die Folge (i^k) in $\mathbb{C}$ hat vier Häufungspunkte: $1, i, -1$ und $-i$.

3.25. Lemma. *Hat die Folge (x_k) den Häufungswert x, so hat sie eine Teilfolge, die gegen x konvergiert. Umgekehrt ist klar: Hat die Folge eine konvergente Teilfolge, so ist deren Grenzwert ein Häufungspunkt.*

Beweis. Zu $\varepsilon_j = 1/j$ finden wir schrittweise Folgenglieder x_{k_j} mit $k_1 < k_2 < \ldots$ und $x_{k_j} \in B(x,\varepsilon_j)$. Dann konvergiert $(x_{k_j})_j$ gegen x. ◁

3.26. Satz von Bolzano-Weierstraß. In $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ hat jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.

Beweis. 1. Schritt: Folge in $\mathbb{R}$. Auf Grund der Beschränktheit gibt es ein Intervall $[a_1, b_1]$, $a_1 < b_1$, in dem alle Folgenglieder liegen. Wir halbieren es und erhalten zwei Teilintervalle $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ und $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. In einem davon (evtl. in beiden) liegen unendlich viele Glieder. Wir nennen es $[a_2, b_2]$. Schrittweise erhalten wir eine ineinander geschachtelte Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_j = [a_j, b_j]$, deren Länge $b_j - a_j$ gegen Null konvergiert. In ihrem Durchschnitt liegt genau ein Punkt x (Übungsaufgabe). Wählt man Folgenglieder $x_{k_j} \in I_j$ mit $k_1 < k_2 < \dots$ so hat man die gesuchte (gegen x) konvergente Teilfolge.

2. Schritt: Folge in $\mathbb{R}^n$. Konvergenz ist äquivalent zur Konvergenz der Komponentenfolgen. Ist die Folge beschränkt, so auch jede Komponentenfolge. Nach Schritt 1 gibt es Indizes $k_1 < k_2 < \dots$ so dass für diese Teilfolge die Folge der ersten Komponenten konvergiert. Von dieser wiederum gibt es eine Teilfolge, für die (auch) die Folge der zweiten Komponenten konvergiert. In n Schritten erhalten wir ein Teilfolge, die in allen Komponenten konvergiert.

3. Schritt: Folge in $\mathbb{C}^n$. Ebenso mit Real- und Imaginärteil. $\triangleleft$

3.27. Definition. Jede beschränkte Folge *reeller* Zahlen (x_k) hat also mindestens einen Häufungspunkt. Man nennt den größten davon den limes superior und den kleinsten den limes inferior und schreibt lim sup und lim inf bzw. $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$.

Ist die Folge nach oben unbeschränkt, so schreiben wir $\limsup x_k = +\infty$. Analog schreiben wir $\liminf x_k = -\infty$, falls sie nach unten unbeschränkt ist.

Mehr dazu später.

Beispiel: $\liminf \left((-1)^k - \frac{1}{k}\right) = -1$.