26. Differentialformen

Vektorfelder und 1-Formen. Im folgenden sei M eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.

26.1. Definition. Für $f: M \to \mathbb{C}^m$ schreibt man $f \in C^l(M)$, $l = 0, 1, 2, \dots, \infty$, falls für jede Karte $\varphi: T \to M$ eines Atlasses die Komposition $f \circ \varphi: T \to \mathbb{C}^m$ eine C^l-Abbildung ist.

Ist M eine C^α-Mannigfaltigkeit, so sind die Kartenwechsel C^α-Abbildungen. Es ist daher nur sinnvoll, von C^l-Abbildungen zu sprechen, wenn $l \leq \alpha$ ist, da dann die Eigenschaft unter Kartenwechseln erhalten bleibt.

26.2. Definition. Mit T_p^*M bezeichnen wir den Dualraum zum Tangentialraum T_pM an M in p, d.h. den Raum aller linearen Abbildungen von T_pM nach $\mathbb{R}$. Man nennt T_p^*M den Cotangentialraum an M in p und seine Elemente die Cotangentialvektoren in p.

Ein Vektorfeld auf M ist eine Abbildung V, die jedem $p \in M$ ein Element $V(p) \in T_pM$ zuordnet. Eine $1-$Form auf M ist eine Abbildung ω, die jedem $p \in M$ ein Element $\omega(p) \in T_p^*M$ zuordnet.

26.3. Beispiel. Es sei $f: M \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in M$. Dann definieren wir das Differential oder die äußere Ableitung df_p von f in p durch

$$df_p: T_pM \to \mathbb{R}, \quad df_p(v) = \frac{d}{d\tau}\left(f \circ \gamma(\tau)\right)|_{\tau=0}. \tag{1}$$

Dabei ist $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.

Die Abbildung $p \mapsto df_p$ ist dann eine 1-Form. Dazu folgendes

(i) Wieso ist das unabhängig von der Wahl der Kurve γ, die v darstellt? Sind γ_1 und γ_2 zwei Kurven mit $\gamma_j(0) = p$ und $\gamma_j'(0) = v$, so betrachte die Kurven $\sigma_j = \varphi^{-1} \circ \gamma_j$ in T für eine lokale Parametrisierung $\varphi: T \to M$ mit $\varphi(t_0) = p$. Dann ist $v = (\varphi \circ \sigma_j)'(0) = \varphi'(\sigma_j(0))\sigma_j'(0)$, also wegen der Injektivität von φ' auch $\sigma_1'(0) = \sigma_2'(0)$. Es folgt, dass

$$\frac{d}{d\tau}(f \circ \gamma_j)(0) = \frac{d}{d\tau}(f \circ \varphi \circ \sigma_j)(0) = (f \circ \varphi)'(\underbrace{\sigma_j(0)}_{=t_0})\sigma_j'(0) \tag{2}$$

für beide Kurven gleich ist.

(ii) Die Abbildung ist linear in v: Nach 25.2 ergibt sich $v = \sum_j \lambda_j \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t_0)$ als Ableitung der Funktion $\gamma(\tau) = \varphi(t_0 + \lambda\tau)$ mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist nach (1) und (2)

$$df_p(v) = (f \circ \varphi)'(0)\lambda.$$

(iii) st M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so vereinfacht sich dies zu

$$df_p(v) = f'(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)|_{\tau=0} = \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle \quad \text{Richtungsableitung von } f \text{ in Richtung } v;$$

die Linearform df ist also durch Paarung mit dem Vektor grad$f$ gegeben.

26.4. Basen. Ist $\varphi: T \to M$ eine lokale Parametrisierung nahe p mit $\varphi(t_0) = p$, so wissen wir aus 25.2, dass die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t)$, $j = 1, \dots, n$, eine Basis von $T_{\varphi(t)}M$ bilden. Man schreibt sie meist in der Form $\frac{\partial}{\partial t_j}$ (ohne Angabe von φ oder dem Argument t). Dann hat also in $\varphi(T)$ jedes Vektorfeld V eine Darstellung

$$V(p) = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial t_j} \quad \text{mit geeigneten } a_j(p) \in \mathbb{R}.$$

Man nennt V stetig bzw. l-mal stetig differenzierbar, falls die Funktionen a_j alle stetig bzw. l-mal stetig differenzierbar sind (nur sinnvoll für $l \leq \alpha$).

Ebenso haben wir die Funktionen $\pi_j : q \mapsto (\varphi^{-1}(q))_j$, $j = 1, \ldots, n$, die q auf die $j-$te Komponente von $\varphi^{-1}(q)$ abbilden.

Für ihr Differential $d\pi_{j,p}$ in $p = \varphi(t_0)$ gilt:

(1) $$d\pi_{j,p}\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = \frac{d}{d\tau}\varphi_j^{-1}(\varphi(t_0 + \tau e_k))|_{\tau=0} = \delta_{jk}.$$

Sie bilden also gerade die duale Basis zu den $\frac{\partial}{\partial t_j}$. Man schreibt üblicherweise dt^j statt $d\pi_j$.

In $\varphi(T)$ hat also jede 1-Form ω eine Darstellung

$$\omega(p) = \sum_{j=1}^{n} b_j(p)dt^j \quad \text{mit geeigneten } b_j(p) \in \mathbb{R}.$$

Man nennt ω stetig/l-mal stetig differenzierbar, falls die b_j dies sind (nur sinnvoll für $l \leq \alpha$, die Glattheit der Mannigfaltigkeit). Oft betrachtet man auch b_j als von t abhängig (in lokalen Koordinaten).

26.5. Beispiel. Nach 26.4 können wir lokal schreiben $df = \sum_{j=1}^{n} b_j\, dt^j$. Wie sehen die b_j aus? Es ist für $p = \varphi(t_0)$ nach 26.4(1)

$$b_i(p) = \sum_{j=1}^{n} b_j(p)dt^j\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = df_p\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = \frac{d}{d\tau}(f \circ \varphi(t_0 + \tau e_i))|_{\tau=0} = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t_i}(t_0).$$

Beachte: $f \circ \varphi$ ist gerade die in den t-Koordinaten ausgedrückte Funktion f.

26.6. Kartenwechsel. Was passiert, wenn wir andere Koordinaten wählen? Es sei also $\psi : S \to M$ eine andere Parametrisierung mit (oBdA) $\psi(S) = \varphi(T)$ und $p \in M$, $p = \varphi(\underline{t}) = \psi(\underline{s})$. Mit

$$\chi = \varphi^{-1}\psi$$

bezeichnen wir die Kartenwechselabbildung. Somit ist $\varphi \circ \chi = \psi$. Es sei nun V ein Vektorfeld, das wir auf zweierlei Weise schreiben können

$$\begin{aligned} V(p) &= \sum_{l=1}^{n} a_l(p)\frac{\partial}{\partial t_l} = \sum_{l=1}^{n} a_l(p)\frac{\partial\varphi}{\partial t_l}(\underline{t}) \quad \text{bzgl. } \varphi \text{ bzw.} \\ V(p) &= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j(p)\frac{\partial}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j(p)\frac{\partial\psi}{\partial s_j}(\underline{s}) \quad \text{bzgl. } \psi. \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel folgt aus $\psi = \varphi\chi$, dass

(1) $$\frac{\partial\psi}{\partial s_j}(\underline{s}) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial t_l}(\chi(\underline{s}))\frac{\partial\chi_l}{\partial s_j}(\underline{s}).$$

Somit ist

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_j(p)\frac{\partial\psi}{\partial s_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \widetilde{a}_j \frac{\partial\varphi}{\partial t_l}\frac{\partial\chi_l}{\partial s_j} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\chi_l}{\partial s_j}\widetilde{a}_j\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t_l}.$$

Mit anderen Worten: $a_l = \sum(\partial\chi_l/\partial s_j)\widetilde{a}_j$ bzw:

$$a(p) = \chi'(\psi^{-1}(p))\widetilde{a}(p).$$

Ist andererseits ω eine 1-Form mit den Darstellungen

$$\begin{aligned}\omega(p) &= \sum_{l=1}^{n} b_l(p) dt^l \quad \text{bzgl. } \varphi \text{ bzw.}\\ \omega(p) &= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_j(p) ds^j \quad \text{bzgl. } \psi\end{aligned}$$

so ist

$$b_l = \omega\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_l}\right) \quad \text{und} \quad \widetilde{b}_j = \omega\left(\frac{\partial \psi}{\partial s_j}\right).$$

Aus (1) folgt

$$\widetilde{b}_j = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \chi_l}{\partial s_j}\, \omega\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_l}\right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \chi_l}{\partial s_j}\, b_l.$$

Mit anderen Worten:

$$\widetilde{b}(p) = \chi'(\psi^{-1}(p))^T\, b \quad \text{bzw.} \quad b = (\chi'(\psi^{-1}(p))^T)^{-1}\, \widetilde{b}.$$

Alternierende Multilinearformen. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$; die Hauptanwendung wird der Fall $V = T_pM$ sein.

26.7. Definition. Eine alternierende k-Form auf V ist eine Abbildung

$$\omega : V^k = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k-\text{mal}} \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) ω ist linear in jedem Argument, d.h. $\omega(\ldots, \lambda v + \mu\tilde{v}, \ldots) = \lambda\omega(\ldots, v, \ldots) + \mu\omega(\ldots, \tilde{v}, \ldots)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, \tilde{v} \in V$.

(ii) Vertauscht man zwei Argumente, so ändert sich das Vorzeichen: $\omega(\ldots, v, \ldots, \tilde{v}, \ldots) = -\omega(\ldots, \tilde{v}, \ldots, v, \ldots)$.
Äquivalent ist die Forderung, dass $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$ ist, falls zwei der Einträge gleich sind.

Die Menge der alternierenden k-Formen bildet einen Vektorraum, der mit $\wedge^k V^*$ bezeichnet wird.

Für $k = 1$ sind die alternierenden 1-Formen gerade die Elemente des Dualraums V^* von V. Die Bedingung (ii) ist hier leer. Der Vollständigkeit halber definiert man $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$.

26.8. Äußeres Produkt/Dachprodukt. Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$ Einsformen. Dann wird die Abbildung

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k : V^k \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \ldots & \varphi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \ldots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Da die Determinante selbst eine alternierende Multilinearform in den Spalten ist, folgt, dass $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \wedge^k V^*$.

26.9. Satz. *Ist $\dim V = n$ so ist $\wedge^k V^*$ ein Vektorraum der Dimension $\binom{n}{k}$. Spezieller: Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine Basis von V^*, so bilden die Elemente*

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \text{ mit } 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$$

eine Basis. Insbesondere ist $\wedge^k V^* = \{0\}$ für $k > n$.

Beweis. Wähle eine duale Basis $v_1, \dots, v_n$ von V, d.h. $\varphi_j(v_k) = \delta_{jk}$. Dann sieht man leicht, dass für $i_1 < \dots < i_k$ und $j_1 < \dots < j_k$

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \begin{cases} 1; & (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} .$$

Somit sind die Elemente $\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$ linear unabhängig. Sie bilden auch ein Erzeugendensystem: Ist ω eine beliebige k-Form, so setze für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$

$$c_{i_1 \dots i_k} = \omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}).$$

Dann sieht man leicht, dass

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1 \dots i_k} \, \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}.$$

$\triangleleft$

26.10. Satz. *Es seien* $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ *und*

$$\psi_i = \sum a_{ij} \, \varphi_j, \quad i = 1, \dots, k \text{ für geeignete } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \det(a_{ij}) \, \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k.$$

Beweis. Bekanntlich ist

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}\pi \, a_{1\pi(1)} \dots a_{k\pi(k)}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k &= \left(\sum a_{1j} \, \varphi_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum a_{kj} \, \varphi_j\right) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} a_{1\pi(1)} \dots a_{k\pi(k)} \varphi_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\pi(k)} \quad (\text{andere Terme } = 0) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} a_{1\pi(1)} \dots a_{k\pi(k)} \operatorname{sgn}\pi \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

26.11. Produkt von k- und l-Formen. Es gibt genau eine Abbildung

$$\wedge : \wedge^k V^* \times \wedge^l V^* \to \wedge^{k+l} V^*$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für $\eta_1, \dots, \eta_k, \psi_1, \dots, \psi_l \in V^*$ ist

$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k) \wedge (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l) = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l.$$

(ii) Die Abbildung $(\omega, \sigma) \to \omega \wedge \sigma$ ist linear in jedem Faktor.

Für dieses Produkt gilt weiterhin:

(iii) $\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \, \sigma \wedge \omega$;

(iv) $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_2)$ (Assoziativität) für $\omega_j \in \wedge^{k_j} V^*$.

Wir setzen dies fort auf die Fälle $k = 0$ oder $l = 0$: Für $a \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \wedge^k V^*$ sei $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a\omega$.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, da (i) sie bereits auf den Basen festlegt.

Zur Existenz: Wir wählen eine Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von V^* und definieren für

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \text{ und } \sigma = \sum_{j_1<\ldots<j_l} b_{j_1\ldots j_l}\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l}$$

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots j_l} a_{i_1\ldots i_k}\, b_{j_1\ldots j_l}\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l}.$$

Damit haben wir die geforderten Eigenschaften. Eigenschaft (iii) folgt aus der Tatsache, dass die Permutation

$$(1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l) \mapsto (k+1, \ldots, k+l, 1, \ldots, k)$$

das signum $(-1)^{kl}$ hat. ◁

Differentialformen höherer Ordnung.

26.12. Definition. Eine Differentialform der Ordnung k (oder kurz k-Form) auf der Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung $\omega : M \to \bigcup_{p\in M} \wedge^k T_p^* M$ mit der Eigenschaft, dass $\omega(p) \in \wedge^k T_p^* M$ liegt. Nullformen sind also nichts anderes als reellwertige Funktionen. Wir schreiben: $\omega \in \Omega^k M$.

26.13. Lokale Darstellung. Ist $\varphi : T \to M$ eine lokale Parametrisierung, so bilden die k-Formen

$$dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{i_k} \quad \text{für } 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$$

eine Basis von $\wedge^k T_p^* M$.

Ein Element $\omega \in \Omega^k M$ hat dort die Darstellung

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k}\; dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{i_k}$$

mit einer Funktion $f_{i_1\ldots i_k} : \varphi(T) \to \mathbb{R}$. Man nennt die Form stetig/$l-$mal differenzierbar, falls die $f_{i_1\ldots i_k}$ dies sind.

Schreibweise: Meist kürzt man die obige Schreibweise ab zu $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dt^I$, wobei die Notation bedeuten soll, dass I über alle $k-$Tupel $i_1 \ldots i_k$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ läuft, $f_I = f_{i_1\ldots i_k}$, und $dt^I = dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{i_k}$.

(Oft fasst man f_I auch als Funktion auf T auf. Wir schreiben dann $\tilde{f}_I$)

26.14. Äußere Ableitung. Es sei ω eine stetig differenzierbare k-Form mit der lokalen Darstellung $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dt^I$. Ihre äußere Ableitung $d\omega$ ist eine $k+1$-Form, definiert durch

$$d\omega = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dt^I,$$

mit dem Differential df_I von $f_I : \varphi(T) \to \mathbb{R}$.

Beachte:

(i) Es ist noch nicht klar, dass dies von der Wahl der Darstellung unabhängig ist. Mehr dazu in 26.16.

(ii) Ist $\tilde{f}_I = f_I \circ \varphi : T \to \mathbb{R}$ (in lokalen Koordinaten), so ist nach 26.5

$$d\omega = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_I}{\partial t_j}\, dt^j \wedge dt^I$$

26.15. Satz. *Es seien ω, η k-Formen und σ eine l-Form, alle stetig differenzierbar. Dann gilt:*

(a) $d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda\, d\omega + \mu\, d\eta$

(b) $d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma$.

(c) *Ist ω sogar zweimal stetig differenzierbar, so ist $d^2\omega = d(d\omega) = 0$.*
Dies ist die zentrale Eigenschaft des Operators d.

Beweis. (a) ist klar.

(b) Wir schreiben in lokalen Koordinaten: $\omega = \sum \tilde{f}_I\, dt^I$ und $\sigma = \sum \tilde{g}_J\, dt^J$. Dann ist

$$\omega \wedge \sigma = \sum_{I,J} \tilde{f}_I \tilde{g}_J\, dt^I \wedge dt^J,$$

also nach Definition der äußeren Ableitung und der Produktregel

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= \sum_{I,J,m} \frac{\partial(\tilde{f}_I \tilde{g}_J)}{\partial t_m}\, dt^m \wedge dt^I \wedge dt^J = \sum_{I,J,m} \left(\frac{\partial \tilde{f}_I}{\partial t_m}\, \tilde{g}_J + \tilde{f}_I\, \frac{\partial \tilde{g}_J}{\partial t_m} \right) dt^m \wedge dt^I \wedge dt^J \\ &= \sum_{I,J,m} \frac{\partial \tilde{f}_I}{\partial t_m}\, \tilde{g}_J\, dt^m \wedge dt^I \wedge dt^J + \sum_{IJ,m} (-1)^k \tilde{f}_I\, \frac{\partial \tilde{g}_J}{\partial t_m}\, dt^I \wedge dt^m \wedge dt^J \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^k\, \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

(c) Zunächst sei $k = 0$, d.h. $\omega = f$ ist eine Funktion. Wir schreiben bzgl. der Parametrisierung $\varphi : T \to M$: $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(df) = d\left(\sum_m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t_m}\, dt^m \right) \quad &= \quad \sum_{ml} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t_l \partial t_m}\, dt^l \wedge dt^m = \sum_{l<m} + \sum_{l>m} \dots \\ &\overset{\text{Schwarz}}{=} \quad \sum_{l<m} \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t_l \partial t_m} - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t_m \partial t_l} \right) dt^l \wedge dt^m = 0. \end{aligned}$$

Weil $d(dt^I) = d1 \wedge dt^I = 0$ ist, folgt im allgemeinen Fall für $\omega = \sum f_I\, dt^I$, dass

$$d(d\omega) = \sum d(d\tilde{f}_I \wedge dt^I) = d(d\tilde{f}_I) \wedge dt^I - d\tilde{f}_I \wedge d(dt^I) = 0 - 0 = 0.$$

◁

26.16. Bemerkung. Wir können nun die Unabhängigkeit der äußeren Ableitung von der Wahl der Parametisierung beweisen.

Es seien $\varphi : T \to V$ und $\psi : S \to V$ zwei Abbildungen von offenen Mengen $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, die beide eine offene Teilmenge V von M parametrisieren und ω eine k-Form, die sich bzgl φ in der Form $\omega = \sum_{|I|=k} a_I dt^I$ und bzgl. ψ als $\omega = \sum_{|J|=k} \tilde{a}_J ds^J$ schreiben lässt. Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass die bezüglich φ und ψ definierten äußeren Ableitungen auf Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ und auf den Einsformen dt^i, $i = 1, \dots, n$, dieselben Werte liefern. Dann ergibt sich der allgemeine Fall aus der Produktregel in Satz 26.15(b).

(i) Für eine Funktion f ist df in Beispiel 26.3 unabhängig von der Kartenwahl definiert.

(ii) Für die Einsform dt^i ist $d(dt^i) = 0$ bzgl. φ. Weil dt^i aber das Differential einer Funktion ist (nämlich von $p \mapsto \varphi^{-1}(p)_j \in \mathbb{R}$), ist es auch in der Parametrisierung durch ψ das Differentiai dieser Funktion. Nun ist $d^2 = 0$, also ist auch in dieser Parametrisierung $d(dt^i) = 0$.

Geschlossenheit und Exaktheit.

26.17. Definition. Eine stetig differenzierbare k-Form ω heißt geschlossen, falls $d\omega = 0$. Sie heißt exakt, falls es eine $(k-1)$-Form η gibt mit $\omega = d\eta$.

Klar: Jede exakte Form ist geschlossen, sofern sie zweimal stetig differenzierbar ist.

26.18. Formen und Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$. Es sei U eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$.

(a) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j.$$

Wir haben, wie in 26.3 erwähnt, die zueinander dualen Basen $\{e_1, \ldots, e_n\} = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ von $T_p\mathbb{R}^n$ und $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ von $T_p^*\mathbb{R}^n$. Das Differential df können wir unmittelbar mit dem *Zeilen*vektor $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, also f', identifizieren. Der Gradient hingegen ist der *Spalten*vektor $\sum(\partial f/\partial x_j)e_j$. Zwischen beiden steckt eine Identifikation von Tangential- und Cotangentialraum, die im Fall von $\mathbb{R}^n$ trivial ist, allgemein jedoch nicht.

(b) Jede $(n-1)$-Form ω auf U lässt sich schreiben

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(-1)^{j-1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

mit geeigneten Funktionen f_j. Dabei bedeutet das Dach, dass dieser Term weggelassen wird. (Die Wahl des Faktors $(-1)^{j-1}$ scheint willkürlich, wird aber gleich motiviert.)

Dann fallen in der folgenden Formel wegen der alternierenden Multilinearität der Formen die Summanden mit $j \neq k$ weg und es gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\, dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \operatorname{div} f\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Die äußere Ableitung einer (n-1)-Form entspricht also der Divergenz des mit ihr identifizierten Vektorfelds, wenn man die n-Form $\operatorname{div} f\, dx^1 \ldots dx^n$ mit $\operatorname{div} f$ identifiziert.

(c) Ist $\omega = \sum a_j(x)dx^j$ eine stetig differenzierbare Einsform, so ist

$$d\omega(x) = \sum_j \sum_m \frac{\partial a_j}{\partial x_m} dx^m \wedge dx^j = \sum_{i_1<i_2} \left(\frac{\partial a_{i_2}}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial a_{i_1}}{\partial x_{i_2}}\right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}. \tag{1}$$

Die Bedingung, dass ω geschlossen ist, ist also äquivalent dazu, dass das Vektorfeld $(a_1, \ldots, a_n)$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

(d) Ist $n = 3$, so sind die Zweiformen die $(n-1)$-Formen. Nach (b) können wir sie schreiben

$$b_1 dx^2 \wedge dx^3 - b_2 dx^1 \wedge dx^3 + b_3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Für die Ableitung einer 1-Form ω wie in (c) ist dann

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) = \operatorname{rot} a.$$

Die äußere Ableitung einer 1-Form $\omega = \sum a_j dx^j$ entspricht also der Rotation des Vektorfelds $(a_1, \ldots, a_n)$, mit der wir sie identifizieren.

(e) Aus $d^2 = 0$ folgen die Identitäten $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ für ein Vektorfeld F bzw. eine Funktion f.

26.19. Transport unter Abbildungen. Es seien M und N Mannigfaltigkeiten und $\chi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung (d.h. in allen Karten ist χ differenzierbar).

Ist $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ eine Kurve in M, so erhalten wir mit $\chi \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to N$ eine Kurve in N. Indem wir die Ableitungen in 0 betrachten, erhalten wir eine Abbildung

$$\chi_* : T_{\gamma(0)} M \to T_{\chi\circ\gamma(0)} N, \qquad v := \gamma'(0) \mapsto (\chi \circ \gamma)'(0) =: \chi_*(v).$$

Übergang zur dualen Abbildung und Erweiterung auf k Vektoren sowie Variation von p liefert:

$$\chi^* \;:\; T^*_{\chi\circ\gamma(0)} N \to T^*_{\gamma(0)} M; \qquad (\chi^*\sigma)(v) = \sigma(\chi_* v) \quad \text{für } \sigma \in T^*\chi\circ\gamma(0)^* N, v \in T *_{\gamma(0)} M \text{ bzw.}$$
$$\chi^* \;:\; \Omega^k(N) \to \Omega^k(M); \quad ((\chi^*\sigma)(p))(v_1, \ldots, v_k) = (\sigma(\chi(p)))(\chi_* v_1, \ldots, \chi_* v_k).$$

Wie sieht das in Koordinaten aus? Es sei p in M und $\varphi : T \to M$ eine Parametrisierung mit $\varphi(t_0) = p$. Wir betrachten die Basiskurven $\gamma_j(\tau) = \varphi(t_0 + \tau e_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Ihre Ableitung ist $\gamma_j'(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t_0)$. Nun sei $\psi : S \to N$ eine Parametrisierung nahe $\chi(p)$ mit $\psi(s_0) = \chi(p)$. Für die Komposition ist

$$\begin{aligned}
\chi_*\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right) &= (\chi\circ\gamma_i)'(0) = (\psi\circ\psi^{-1}\circ\chi\circ\gamma_j)'(0) \overset{\psi^{-1}\chi\gamma_j(0)=s_0}{=} \psi'(s_0)(\psi^{-1}\chi\gamma_j)'(0) \\
&\overset{\text{Dfn }\gamma_j}{=} \psi'(s_0)(\psi^{-1}\chi\varphi)'(t_0)e_j \overset{\text{Matr Mult}}{=} \sum_m \frac{\partial\psi}{\partial s_m} \underbrace{\left((\psi^{-1}\chi\varphi)'(t_0)\right)_m}_{m\text{-te Zeile}} e_j = \sum_m A_{mj}\frac{\partial}{\partial s_m},
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei $A = (A_{mj}) = \left(\dfrac{\partial(\psi^{-1}\chi\varphi)_m}{\partial t_j}(t_0)\right)$ die Ableitungsmatrix von $\psi^{-1}\chi\varphi$ ist; beachte, dass $\frac{\partial}{\partial s_m}$ für $\frac{\partial\psi}{\partial s_m}(s_0)$ steht. Ist also $v = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial t_j}$ in T_pM, so ist

$$\chi_* v = \sum_{j,m} A_{mj}\, b_j \frac{\partial}{\partial s_m} = \sum c_m \frac{\partial}{\partial s_m} \text{ mit } c = Ab.$$

Auf Einsformen ist $\chi^*(\sigma)(v) = \sigma(\chi_* v)$, also

$$(\chi^* ds^l)\left(\frac{\partial}{\partial t^j}\right) = ds^l\left(\chi_*\frac{\partial}{\partial t^j}\right) \overset{(1)}{=} ds^l\left(\sum A_{mj}\frac{\partial}{\partial s_m}\right) = A_{lj}$$

und somit

$$\chi^*\left(\sum c_l ds^l\right) = \sum d_j dt^j \quad \text{mit } d = A^T c. \tag{2}$$

26.20. Lemma. *Es seien M, N Mannigfaltigkeiten, $\chi : M \to N$ differenzierbar, $\omega, \omega_1, \omega_2$ Differentialformen der Ordnung k und σ eine Differentialform der Ordnung l auf N, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\chi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda\chi^*(\omega_1) + \mu\chi^*(\omega_2)$;

(b) $\chi^*(\omega \wedge \sigma) = \chi^*(\omega) \wedge \chi^*(\sigma)$;

(c) *Ist ω einmal und χ sogar zweimal stetig differenzierbar, so ist $d(\chi^*(\omega)) = \chi^*(d\omega)$.*

(d) *Ist weiterhin $\tilde{\chi} : L \to M$ differenzierbar, so ist $(\chi \circ \tilde{\chi})^*(\omega) = \tilde{\chi}^*(\chi^*(\omega))$.*

Beweis. (a), (d) sind trivial.
(b) folgt aus der Definition des Dachprodukts 26.11.
(c) Zunächst sei $\omega = f$ eine Funktion ($k = 0$). Dann ist (mit lokalen Parametrisierungen $\varphi : T \to M$, $\psi : S \to N$)

$$d(\chi^* f) = d(f \circ \chi) \overset{26.5}{=} \sum_j \frac{\partial(f \circ \chi \circ \varphi)}{\partial t_j} dt^j = \sum_m \sum_j \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial s^m} \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \chi \circ \varphi)_m)}{\partial t_j} dt^j \overset{26.19(2)}{=} \chi^*(df).$$

Nun betrachten wir den Fall $\omega = ds^m$ und schreiben $\tilde{\chi} = \psi^{-1}\chi\varphi$. Dann ist nach 26.19(2)

$$d(\chi^* ds^m) = d\left(\sum_j \frac{\partial \tilde{\chi}_m}{\partial t^j} dt^j\right) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_m}{\partial t^j \partial t^k} dt^k \wedge dt^j \overset{\text{Schwarz}}{=} 0 = \chi^*(d(ds^m)).$$

Nun folgt die Behauptung aus (b).

26.21. Hilfssatz. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen mit $[0,1] \times U \subseteq V$. Die Abbildungen $\chi_0, \chi_1 : U \to V$ seien definiert durch

$$\chi_0(t) = (0, t), \quad \chi_1(t) = (1, t), \quad t \in U.$$

Ist σ eine geschlossene stetig differenzierbare k-Form auf V mit $k \geq 1$, so gibt es eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η auf U mit

$$\chi_1^* \sigma - \chi_0^* \sigma = d\eta.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $(s, t_1, \ldots, t_n)$ und schreiben dann

$$\sigma = \sum_{|I|=k} f_I \, dt^I + \sum_{|J|=k-1} g_J \, ds \wedge dt^J.$$

Wir können als Kartenabbildungen $\varphi, \psi =$ id wählen; die Transformationsmatrix A aus 26.19(2) ist dann

$$\chi_0'(t) = \chi_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $(\chi_0'(t))^T = (\chi_1'(t))^T = (0, I_n)$ und $\chi_j^*(dt^i) = dt^i$ und $\chi_j^*(ds) = 0$. Somit

$$\chi_1^* \sigma = \sum f_I(1,t) dt^I; \quad \chi_0^* \sigma = \sum f_I(0,t) dt^I.$$

Außerdem ist

$$d\sigma = \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial s} ds \wedge dt^I + \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial t_i} dt^i \wedge dt^I - \sum_J \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial t_j} ds \wedge dt^j \wedge dt^J.$$

Da σ geschlossen ist, folgt (wegen linearer Unabhängigkeit)

$$\sum_I \frac{\partial f_I}{\partial s} dt^I = \sum_J \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_J}{\partial t_j} dt^j \wedge dt^J$$

Wir integrieren die Koeffizienten auf beiden Seiten von $s = 0$ bis $s = 1$: Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial s}(s,t) \, ds &= f_I(1,t) - f_I(0,t); \\ \int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial t_j}(s,t) \, ds &= \frac{\partial}{\partial t_j} \int_0^1 g_J(s,t) \, ds. \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\chi_1^*\sigma - \chi_0^*\sigma &= \sum_I (f_I(1,t)) - f_I(0,t) dt^I = \sum_I \int_0^1 \left(\frac{\partial f_I}{\partial s}(s,t)\, ds\right) dt^I \\
&= \sum_J \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\frac{\partial g_J}{\partial t_j}(s,t)\, ds\right) dt^j \wedge dt^J = \sum_J \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\int_0^1 g_J(s,t)\, ds\right) dt^j \wedge dt^J. \\
&= d\eta \quad \text{für} \quad \eta = \sum_{|J|=k-1} \left(\int_0^1 g_J(s,t)\, ds\right) dt^J.
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

Wir erhalten nun eine Verallgemeinerung des Satzes, dass auf einem sternförmigen Gebiet jedes Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt, ein Potential hat.

26.22. Satz. (Lemma von Poincaré) *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist jede auf U geschlossene k-Form ω, $k \geq 1$, exakt.*

Beweis. Wir können annehmen, dass U bezüglich des Nullpunkts sternförmig ist. Wir betrachten dann die Abbildung $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\chi(s,t) = st$, und setzen $V = \chi^{-1}(U)$. Nun definieren wir χ_0 und χ_1 wie im Hilfssatz durch $\chi_0(t) = (0,t)$, $\chi_1(t) = (1,t)$. Die k-Form $\sigma = \chi^*\omega$ auf V ist geschlossen. Wir wenden den Hilfssatz an und erhalten eine $(k-1)$-Form η auf U mit $\chi_1^*\sigma - \chi_0^*\sigma = d\eta$.

Da $\chi \circ \chi_1 = \mathrm{id}_U$ und $\chi \circ \chi_0 = 0$, folgt

$$\chi_1^*\sigma = \chi_1^*\chi^*\omega = (\chi \circ \chi_1)^*\omega = \mathrm{id}^*\omega = \omega; \quad \chi_0\sigma = (\chi \circ \chi_0)^*\omega = 0.$$

Es folgt, dass $\omega = d\eta$.

26.23. Bezug zu §15. Nach §15 langt einfacher Zusammenhang für die Exaktheit einer geschlossenen Einsform. Dies ist für Formen vom Grad ≥ 2 nicht mehr ausreichend, s. Beispiel 27.21.

26.24. div rot. Es sei $a = (a_1, a_2, a_3)$ ein Vektorfeld in $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\mathrm{rot}\,(a) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right).$$

Man sieht: $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, a = 0$.

Betrachten wir nun die Einsform $\omega = \sum a_j dx^j$. Dann ist nach 26.18

$$d\omega = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx^2 \wedge dx^3,$$

und dass $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} a = 0$ ist, ist äquivalent dazu, dass $d^2\omega = 0$ ist.

Das Lemma von Poincaré besagt, dass für sternförmiges U jede geschlossene $2-$Form exakt ist. Ist also $b = (b_1, b_2, b_3)$ ein differenzierbares Vektorfeld mit $\mathrm{div}\, b = 0$, so gilt für die $2-$Form

$$\sigma = b_1 dx^2 \wedge dx^3 - b_2 dx^1 \wedge dx^3 + b_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

dass $d\sigma = \mathrm{div}\, b dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0$ ist, d.h., σ ist geschlossen. Ist U sternförmig, so ist σ exakt, also existiert eine Einsform $\omega = \sum a_j dx^j$ mit $d\omega = \sigma$. Dies heißt aber gerade dass $\mathrm{rot} a = b$ ist. Ein divergenzfreies Vektorfeld auf einer sternförmigen Menge im $\mathbb{R}^3$ ist also stets die Rotation eines anderen Vektorfelds.