

25. DER SATZ VON GAUSS

Tangentialraum und Normale. Im Folgenden sei M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^N und $a \in M$.

25.1. Tangentialvektoren. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ heißt Tangentialvektor an M in a , falls es eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ gibt ($\varepsilon > 0$ geeignet) mit der Eigenschaft, dass $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren in a wird als der Tangentialraum in a bezeichnet. Wir schreiben $T_a M$.

25.2. Satz.

- (a) $T_a M$ ist n -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^N .
 (b) Ist $\varphi : T \rightarrow V \subseteq M$ (T offen in \mathbb{R}^n) eine lokale Karte in einer Umgebung von a , und ist $\underline{t} \in T$ mit $\varphi(\underline{t}) = a$, so bilden die Vektoren

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\underline{t}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\underline{t})$$

eine Basis von $T_a M$.

- (c) Ist U eine offene Umgebung von a in \mathbb{R}^N und sind $f_1, \dots, f_{N-n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{N-n}(x) = 0\} \text{ und } \text{rang} \left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, N-n; j=1, \dots, n} = N - n,$$

so gilt

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^N : v \perp \text{grad} f_j(a), j = 1, \dots, N - n\}.$$

Beweis. Es sei T_1 der Vektorraum aus (b) und T_2 der aus (c). Wir zeigen, dass $T_1 \subseteq T_a M \subseteq T_2$. Wegen $\dim T_1 = \dim T_2 = n$ folgt dann Gleichheit.

“ $T_1 \subseteq T_a M$ ”: Es sei $v = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\underline{t}) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\underline{t})$ eine Linearkombination der Vektoren $\partial_{t_j} \varphi(\underline{t})$. Definiere $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ durch

$$\gamma(\tau) = \varphi(\underline{t}_1 + \lambda_1 \tau, \dots, \underline{t}_n + \lambda_n \tau).$$

Dann ist $\gamma(\tau) \in M$ für hinreichend kleine ε , und $\gamma(0) = \varphi(\underline{t}) = a$. Ferner ist für $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\gamma'(0) = \varphi'(\underline{t})\lambda = v.$$

“ $T_a M \subseteq T_2$ ”: Nun sei $v \in T_a M$ und $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Da γ in M verläuft, gilt $f_j(\gamma(\tau)) = 0$. Differenzieren liefert

$$0 = f'_j(\gamma(0))\gamma'(0) = f'_j(a)v = \langle \text{grad} f_j(a), v \rangle,$$

somit $v \in T_2$. ◁

25.3. Normalenvektoren. Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^N$ heißt Normalenvektor an M in a , falls

$$w \perp T_a M.$$

Aus 25.2 sehen wir sofort: Die Normalenvektoren bilden einen $(N - n)$ -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^N , der mit $N_a M$ bezeichnet wird und der von den Vektoren

$$\text{grad} f_1(a), \dots, \text{grad} f_{N-n}(a)$$

aufgespannt wird.

Kompakta mit glattem Rand in \mathbb{R}^n .

25.4. Definition. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir sagen, A habe glatten Rand, falls es zu jedem Randpunkt a von A eine offene Umgebung U und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$
- (ii) $\text{grad } \psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

25.5. Satz. Mit den Bezeichnungen von 25.4 ist

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Man nennt ψ daher eine randdefinierende Funktion.

Insbesondere folgt, dass ∂A eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist.

Beweis. “ \subseteq ” Ist $x \in U$ mit $\psi(x) < 0$, so ist auch $\psi(y) < 0$ für alle y in einer Umgebung von x . Wegen (i) liegt diese Umgebung in A , somit ist x kein Randpunkt.

“ \supseteq ” Ist $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$, und ist $v = \text{grad } \psi(x) \neq 0$, so betrachte

$$\tau \mapsto \psi(x + \tau v) = \psi(x) + \langle \text{grad } \psi(x), \tau v \rangle + o(\|\tau v\|) = 0 + \tau \|v\|^2 + o(\|\tau v\|).$$

Diese Funktion wechselt in 0 das Vorzeichen. Damit enthält jede Umgebung von x Punkte y mit $\psi(y) > 0$; diese liegen nicht in A . Daher ist x Randpunkt. \triangleleft

25.6. Satz. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $a \in \partial A$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\nu \perp T_a \partial A$
- (ii) $\|\nu\| = 1$.
- (iii) $\exists \varepsilon > 0: a + \tau \nu \notin A$ für $0 < \tau < \varepsilon$.

Man nennt $\nu = \nu(a)$ den äußeren Normalenvektor an M in a .

Beweis. Existenz: Ist ψ eine randdefinierende Funktion nahe a , so hat

$$\nu(a) = \frac{\text{grad } \psi(a)}{\|\text{grad } \psi(a)\|}$$

die gewünschten Eigenschaften (vgl. Beweis 25.5).

Eindeutigkeit. Es ist $\dim N_a(\partial A) = n - \dim \partial A = 1$. Also ist $\nu = \lambda \text{grad } \psi(a)$ für ein $\lambda \neq 0$. Wegen (ii) ist $\lambda = \pm \|\text{grad } \psi(a)\|^{-1}$. Aus (iii) folgt, dass $\lambda > 0$. \triangleleft

25.7. Folgerung. Die äußeren Normalenvektoren an eine kompakte Menge A mit glattem Rand bilden ein stetiges Vektorfeld $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

25.8. Beispiel. Es sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ die Vollkugel vom Radius r . Als randdefinierende Funktion kann man $\psi(x) = \|x\|^2 - r^2$ wählen. Hier ist $\partial A = \{x : \|x\| = r\}$; der Normalenvektor an $a \in \partial A$ ist $\nu(a) = \frac{a}{r}$.

25.9. Graphdarstellung. Ist A kompakt mit glattem Rand und $a \in \partial A$, so kann A nahe a als Menge unterhalb des Graphen einer Funktion von $n - 1$ Variablen (oBdA der ersten $n - 1$) dargestellt werden:

Es sei $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine randdefinierende Funktion auf einer Umgebung U von a . Dann ist $\text{grad } \psi(x) \neq 0$ auf U . OBdA sei $\partial_{x_n} \psi(x) > 0$. Nach dem Satz von der impliziten Funktion finden

wir $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $I =]\alpha, \beta[$ mit $U' \times I \subseteq U$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \rightarrow I$, so dass für $(x', x_n) \in U' \times I$ gilt:

$$\psi(x', x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = g(x').$$

Dann ist

$$A \cap (U' \times I) = \{(x', x_n) \in U' \times I : \psi(x', x_n) \leq 0\} = \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \leq g(x')\}.$$

Mit $\tilde{\psi}(x) = x_n - g(x')$ haben wir dann eine weitere randdefinierende Funktion. Das zugehörige äußere Normalenfeld ist also

$$\nu = \frac{\text{grad } \tilde{\psi}(x)}{\|\text{grad } \tilde{\psi}(x)\|} = \frac{(-\text{grad } g, 1)}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|^2}}.$$

25.10. Definition. Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ eine Funktion. Der Träger von f ist die Menge

$$\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \quad (\text{Abschluss in } \mathbb{R}^n).$$

25.11. Lemma. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und hat die stetig differenzierbare Funktion g kompakten Träger in U , so ist

$$\int_U \partial_{x_j} g(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Beweis. OBdA $j = n$. Wir setzen durch Null fort und fassen g als stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R}^n auf. Dann ist

$$\int_U \partial_{x_n} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_n} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x_n} g(x) dx_n dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 dx' = 0.$$

25.12. Lemma. (Spezialfall des Satzes von Gauß) Es sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I =]\alpha, \beta[$ ein Intervall und $g : U' \rightarrow I$ stetig differenzierbar. Wir setzen

$$\begin{aligned} A &= \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \leq g(x')\} \\ M &= \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\}. \end{aligned}$$

Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $f : U' \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $U' \times I$ und alle $j = 1, \dots, n$

$$\int_A \partial_{x_j} f(x) dx = \int_M f(t) \nu_j(t) dS(t),$$

wobei ν_j die j -te Komponente des Normalenvektors ν ist.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $1 \leq j \leq n-1$. Wir beobachten zunächst, dass nach der Kettenregel

$$(1) \quad \partial_{x_j} \int_{\alpha}^{g(x')} f(x) dx_n = \int_{\alpha}^{g(x')} \partial_{x_j} f(x) dx_n + f(x', g(x')) \partial_{x_j} g(x').$$

Dann folgt, da nach 25.9 und 24.27

$$\nu_j(x) = -\frac{\partial_{x_j} g(x')}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g(x')\|^2}} \quad \text{und} \quad dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } g(x')\|^2}.$$

$$\begin{aligned}
\int_A \partial_{x_j} f(x) dx &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} \partial_{x_j} f(x) dx_n \right) dx' \\
&\stackrel{(1)}{=} \int_{U'} \partial_{x_j} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} f(x) dx_n \right) dx' - \int_{U'} f(x', g(x')) \partial_{x_j} g(x') dx' \\
&\stackrel{25.11}{=} 0 + \int_M f(x) \nu_j(x) dS(x).
\end{aligned}$$

Fall 2: $j = n$. Hier ist $\nu_n(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } g(x')\|^2}^{-1}$ und $dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } g(x')\|^2} dx'$, somit

$$\int_A \partial_{x_n} f(x) dx = \int_{U'} \left(f(x', g(x')) - \underbrace{f(x', \alpha)}_{=0} \right) dx' = \int_M f(x) \nu_n(x) dS(x).$$

25.13. C^∞ -Zerlegung der Eins. Es sei K kompakt und $\{U_j : j = 1, \dots, N\}$ eine Überdeckung durch offene Mengen. Wir setzen

$$U_j^\varepsilon = \{x \in U_j : \text{dist}(x, \partial U_j) > \varepsilon\}.$$

Da $x \mapsto \text{dist}(x, \partial U_j)$ stetig und jedes x in mindestens einem U_j enthalten ist, nimmt die Funktion

$$x \mapsto \min\{\text{dist}(x, \partial U_j) : U_j \text{ enthält } x\}$$

auf K ein positives Minimum $2\varepsilon > 0$ an. Damit bilden die Mengen $\{U_j^\varepsilon : j = 1, \dots, N\}$ ebenfalls eine offene Überdeckung von K .

Es sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ eine $\{U_j^\varepsilon\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins nach 24.20. Wir wählen nun eine C^∞ -Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die ihren Träger in $B(0, \varepsilon)$ hat und $\int \psi dx = 1$ erfüllt und setzen $\tilde{\alpha}_j = \psi * \alpha_j$. Dann ist $\tilde{\alpha}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\text{supp } \tilde{\alpha}_j \in U_j$. Setzen wir nun

$$\beta_j = \tilde{\alpha}_j / \sum \tilde{\alpha}_k$$

so erhalten wir eine der Überdeckung $\{U_j\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins aus C^∞ -Funktionen. Unter Kartenwechseln bleiben die Einschränkungen $\beta_j|_{\partial A}$ noch α -mal differenzierbar auf ∂A .

25.14. Gaußscher Integralsatz. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sei kompakt mit glattem Rand und $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ die äußere Normale. Ferner sei $U \supseteq A$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist

$$(1) \quad \int_A \text{div} F(x) dx = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Erweiterung. Man nennt $a \in \partial A$ regulär, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so dass $\partial A \cap U$ eine glatte $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, sonst singulär. Der Satz von Gauß gilt auch noch, wenn die Menge der singulären Randpunkte den $(n-1)$ -dimensionalen Minkowski-Inhalt Null hat, die Funktion F auf A stetig ist und $\text{div } F$ auf dem Inneren von A stetig ist. ¹

Beweis. Wir überdecken A mit endlich vielen offenen Mengen U_j so, dass entweder

- (a) $U_j \subseteq A \setminus \partial A$ (U_j schneidet den Rand nicht) oder
- (b) nach evtl. Umnummerierung der Koordinaten ist $U_j = U' \times I$ mit U' offen in \mathbb{R}^{n-1} und $I =]\alpha, \beta[$ und

$$U_j \cap A = \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \leq g(x')\}.$$

¹s. H. König. Ein einfacher Beweis des Integralsatzes von Gauß. Jahresbericht der DMV, 66:119 - 138 (1964))

Mit Hilfe einer untergeordneten Zerlegung der Eins können wir annehmen, dass F seinen Träger in einer dieser Mengen hat. Im Fall (i) gilt (1), weil nach Lemma 25.11 die linke Seite Null ist und die rechte ohnehin Null ist ($F = 0$ auf ∂A).

Im Fall (ii) folgt die Aussage durch Summation über $j = 1, \dots, n$ aus Lemma 25.12. \triangleleft

25.15. Beispiel. Wir betrachten auf \mathbb{R}^n das Vektorfeld $F(x) = x$ mit $\operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^n 1 = n$ für alle x . Für jede kompakte Menge A mit glattem Rand ist dann nach Gauß

$$\operatorname{vol} A = \frac{1}{n} \int_A \operatorname{div} F(x) dx = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle x, \nu \rangle dS(x).$$

25.16. Greensche Formel in der Ebene. Es sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare, überschneidungsfreie geschlossene Kurve, die den Rand der kompakten Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ im positiven Sinn durchläuft, d.h. es sei $\partial G = \varphi([a, b])$, $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t und für $x = \varphi(t)$ sei die äußere Normale

$$\nu(x) = \frac{(\varphi_2'(t), -\varphi_1'(t))}{\|\varphi'(t)\|}.$$

Das Oberflächenmaß auf φ ist $dS(t) = \|\varphi'(t)\| dt$. Also folgt nach 25.15

$$\operatorname{vol} G = \frac{1}{2} \int_{\partial G} \langle x, \nu \rangle dS(x) = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t) dt.$$

Dies ist aber gerade ein Kurvenintegral. Mit der üblichen Schreibweise (x, y) für die Variablen in \mathbb{R}^2 und für Kurvenintegrale $(\int_{\gamma} \langle f, dx \rangle = \sum \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt)$ erhalten wir also

$$\operatorname{vol} G = \frac{1}{2} \int_{\varphi} x dy - y dx.$$

Bemerkung. Es langt hier, dass φ stückweise stetig differenzierbar ist.

25.17. Archimedisches Prinzip. Ein fester Körper A sei eingetaucht in eine Flüssigkeit der konstanten Dichte $c > 0$, deren Oberfläche mit der Ebene $x_3 = 0$ in \mathbb{R}^3 zusammenfalle. Die Physik sagt uns, dass im Punkt $x \in \partial A$ die Flüssigkeit einen Druck der Stärke $cx_3\nu(x)$ ausübt, wobei ν die äußere Normale ist (man beachte, dass x_3 negativ ist und der Druck nach innen gerichtet ist). Die Gesamtauftriebskraft ist

$$F = \int_{\partial A} cx_3\nu(x) dS(x);$$

für jede Komponente F_j von F gilt also

$$F_j = \int_{\partial A} cx_3\nu_j(x) dS(x).$$

Dies ist ein Integral der Form $c \int_{\partial A} \langle f_j, \nu \rangle dS$, wobei

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist nach Gauß

$$F_j = c \int_{\partial A} \langle f_j(x), \nu(x) \rangle dS(x) = c \int_A \operatorname{div} f_j(x) dx = \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j} dx.$$

Damit ist $F_1 = F_2 = 0$, während

$$F_3 = c \int_A 1 dx = c \operatorname{vol}(A)$$

ist. Der Körper erfährt also eine nach oben gerichtete Auftriebskraft, die gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.