24. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten. Es seien $n, N \in \mathbb{N}_0$, $n \le N$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

24.1. Definition. Eine n-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit ist ein metrischer Raum M (es langt: ein Hausdorff-Raum, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt) mit einer Überdeckung $\{V_j : j \in J\}$ durch offene Mengen und Homöomorphismen $\varphi_j : T_j \to V_j$ von offenen Teilmengen T_j des $\mathbb{R}^n$ auf die V_j mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi_k^{-1}\varphi_j : \varphi_j^{-1}(V) \to \varphi_k^{-1}(V)$$

eine bijektive C^α-Abbildung ist, falls $V = V_j \cap V_k$ nichtleer ist.

Wichtig ist insbesondere der Fall kompakter Mannigfaltigkeiten. Hier gibt es stets eine *endliche* Überdeckung.

Häufig betrachtet man statt der obigen Abbildungen $\varphi_j ; T_j \to V_j$ die entsprechenden Umkehrabbildungen $\kappa_j : V_j \to T_j$. Das macht keine Unterschied. Hier ist diese Richtung gewählt, weil Polar- und Zylinderkoordinaten so wirken. Die Homöomorphismus $\varphi_j : T_j \to V_j$ nennt man Parameterdarstellungen, die Umkehrabbildungen lokale Karten. .

24.2. Bemerkung. Mit dieser Definition ist eine Mannigfaltigkeit ein abstraktes Objekt. Das deckt sich durchaus mit unserer Erfahrung: Unsere Welt ist eine vier- oder höher-dimensionale Raumzeitmannigfaltigkeit, und wir wissen nicht was 'um sie herum' ist.

Für viele Zwecke ist es jedoch praktisch, davon auszugehen, dass die Mannigfaltigkeit in einem Raum $\mathbb{R}^N$ für hinreichend großes N enthalten ist. Es ist auch für viele konkrete Aufgabenstellungen nützlich, wenn man z.B. die Oberfläche eines Körpers im $\mathbb{R}^3$ so, wie sie gegeben ist, berechnen möchte. Tatsächlich ist dies keine starke Annahme: Man kann zeigen, dass jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{2n}$ eingebettet werden kann.

Unter Zuhilfenahme der Struktur von $\mathbb{R}^N$ kann man diese sog. Untermannigfaltigkeiten auf mehrere äquivalente Weisen beschreiben, die wir in 24.3, 24.5, 24.8, und 24.15 kennen lernen werden.

Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^N$.

24.3. Definition: Untermannigfaltigkeiten als lokale Nullstellengebilde. Man nennt eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^N$ eine $C^\alpha-$Untermannigfaltigkeit der Dimension n, falls es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^N$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $f = (f_1, \ldots, f_{N-n}) : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

(i) $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ (d.h. $f_1(x) = \ldots = f_{N-n}(x) = 0$) und

(ii) Für jedes $x \in U$ hat die Ableitung $f'(x) \in \mathrm{Mat}_{(N-n)\times N}(\mathbb{R})$ den (maximalen) Rang $N - n$.

Sprechweise: Wenn der Schnitt von M mit einer hinreichend kleinen offenen Menge eine Eigenschaft hat, so sagen wir, M habe *lokal* diese Eigenschaft. In diesem Sinn können wir formulieren: Lokal ist M das gemeinsame Nullstellengebilde der $N - n$ $C^\alpha-$Funktionen $f_1, \ldots f_{N-n}$, deren Gradientenvektoren in allen Punkten linear unabhängig sind.

Das C^α lässt man oft weg. Dann ist nicht klar, was gemeint ist. Meist C^∞. Hier soll es mindestens C^1 heißen.

Untermannigfaltigkeiten der Dimension $N - 1$ nennt man Hyperflächen in $\mathbb{R}^N$. Sie sind lokal die Nullstellenmenge einer reellwertigen $C^\alpha-$Funktion mit nichtverschwindendem Gradienten.

24.4. Beispiel.

(a) Die Sphäre $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$ ist eine C^∞-Hyperfläche in $\mathbb{R}^N$, denn sie ist die Nullstellenmenge der $C^\infty-$Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 - 1$, deren Gradient $\operatorname{grad} f(x) = 2x$ auf $U = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ nirgends Null ist.

(b) Analog behandelt man das $(N-1)-$dimensionale Ellipsoid

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_N^2}{a_N^2} = 1 \right\}$$

mit Halbachsen $a_1, \ldots, a_N > 0$.

(c) Das Paraboloid

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$$

ist $C^\infty-$Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$: Wähle $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3$.

24.5. Satz. (Lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Graph) *Eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^N$ ist lokal der Graph einer $\mathbb{R}^{N-n}$-wertigen Funktion auf $\mathbb{R}^n$:*

Es sei $a = (a_1, \ldots, a_N) \in M$. Dann gibt es nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von $a' = (a_1, \ldots, a_n)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{N-n}$ von $a'' = (a_{n+1}, \ldots, a_N)$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$ mit der Eigenschaft, dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\},$$

wobei $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ und $x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_N)$.

Ist umgekehrt M lokal so als Graph darstellbar, so ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^αin $\mathbb{R}^N$.

Beweis. Nach Definition 24.3 gibt es eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^N$ und eine α-mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ mit $\operatorname{Rang}(f'(a)) = N - n$, so dass $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$. Dann können wir $N - n$ Koordinaten so auswählen, dass die zugehörigen Spalten in der Matrix von $f'(a)$ linear unabhängig sind. O.B.d.A. seien dies die Koordinaten mit Indizes $n+1, \ldots, N$ (ansonsten nummerieren wir um). Nun finden wir nach dem Satz von der impliziten Funktion Umgebungen U' von a' in $\mathbb{R}^n$ und U'' von a'' in $\mathbb{R}^{N-n}$ und eine (zunächst nur einmal) stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$ mit der Eigenschaft, dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

Der Satz über die implizite Funktion sagt auch, dass

$$g'(x') = -\Big(\frac{\partial f}{\partial x''}\Big)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x'}$$

ist, so dass aus der α-fachen Differenzierbarkeit von f die von g folgt. $\triangleleft$

24.6. Beispiel. Wie sieht das bei der Sphäre aus? Hier war $f(x) = \|x\|^2 - 1$. Es sei $a \in S^{N-1}$. Dann ist $\operatorname{grad} f(a) = 2a \neq 0$. Ist also beispielsweise $a_N \neq 0$, so können wir als U' die Menge $\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : \|x'\| < 1\}$ wählen, als U'' die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ und als Abbildung $g : U' \to U''$ die Abbildung $g(x) = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots x_{N-1}^2}$. Dann ist

$$S^{n-1} \cap (U' \times U'') = \{x : x_N = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots x_{N-1}^2}\} = \{x : x_N = g(x_1, \ldots, x_{N-1})\}.$$

Ist $a_N = 0$, so ist $a_m \neq 0$ für ein $m \neq N$. Indem wir die m-te und die N-te Koordinate vertauschen, erhalten wir dieselbe Situation.

24.7. Definition. Wir nennen eine Abbildung F zwischen zwei offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ einen C^α-Diffeomorphismus, falls F invertierbar ist und sowohl F als auch F^{-1} beide $\alpha-$mal stetig differenzierbar sind.

24.8. Satz. (Lokale Darstellung als diffeomorphes Bild von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^N$) *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^N$ ist genau dann eine n-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit, wenn folgendes gilt: Zu jedem $a \in M$ existiert eine Umgebung U in $\mathbb{R}^N$ und ein C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ auf eine offene Menge V in $\mathbb{R}^N$ mit der Eigenschaft, dass*

$$F(M \cap U) = V \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_{n+1} = \dots x_N = 0\}. \tag{1}$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Wir wissen aus Satz 24.4, dass es zu $a = (a', a'') \in M$ Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von a' und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{N-n}$ von a'' sowie eine C^α-Funktion g mit

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

Wir definieren dann $F : U' \times U'' \to \mathbb{R}^N$ durch

$$F(x', x'') = (x', x'' - g(x')).$$

Dann ist $F(a', a'') = (a', 0)$ und

$$F'(a', a'') = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -g'(a') & I \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar.} \tag{2}$$

Daher gibt es nach dem Satz von der inversen Funktion Umgebungen U von a und V von $(a', 0)$ in $\mathbb{R}^n$, so dass $F : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Wegen (2) ist F sogar eine $C^\alpha-$Abbildung. (1) ergibt sich nach Konstruktion.

"$\Leftarrow$" Ist $F : U \to V$ ein $C^\alpha-$Diffeomorphismus, mit $F(M \cap U) = V \cap \{x_{n+1}, \dots, x_N\} = 0\}$, so ist natürlich

$$M \cap U = \{x \in U : F_{n+1}(x) = \dots = F_N(x) = 0\}.$$

Auf Grund der Invertierbarkeit von F' sind die Spalten von F' linear unabhängig, also ist

$$\text{rang} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_l} \right)_{j=n+1,\dots,N,\ l=1,\dots,n} = N - n.$$

Damit ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. ◁

24.9. Die Relativ-Topologie. Jede Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^N$ wird ein metrischer Raum, indem man als Metrik die Einschränkung der euklidischen Metrik auf $M \times M$ nimmt. Man erhält so den Begriff einer offenen Menge in M. Im Allgemeinen ist jedoch eine offene Teilmenge von M keine offene Menge in $\mathbb{R}^N$. Man spricht von Offenheit/Abgeschlossenheit *in der Relativ-Topologie*, wenn man dies betonen möchte.

24.10. Lemma. *Äquivalent ist:*

(i) *$V \subseteq M$ ist offen (in der Relativ-Topologie)*
(ii) *Es gibt eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^N$ mit $U \cap M = V$.*

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $V \subseteq M$ offen, so existiert zu $a \in V$ ein $\varepsilon_a > 0$ mit der Eigenschaft, dass $B(a, \varepsilon_a) \cap M \subseteq V$. Setze $U = \bigcup_{a \in V} B(a, \varepsilon_a)$. ◁

24.11. Lemma. *Es sei $K \subseteq M$. Dann ist K kompakt in $M \Leftrightarrow K$ kompakt in $\mathbb{R}^N$.*

"$\Rightarrow$" Ist $\{U_j\}$ eine Überdeckung durch offene Teilmengen des $\mathbb{R}^N$, so sind die Schnitte $U_j \cap M$ offen in der Relativtopologie. Also können wir endlich viele $U_{j_k} \cap M$ davon auswählen, die K überdecken. Dann gilt auch $K \subseteq \bigcup U_{j_k}$.

"$\Leftarrow$" Ist V_j eine Überdeckung durch in M offene Mengen und sind U_j offene Mengen in $\mathbb{R}^N$ mit $U_j \cap M = V_j$, so ist $\{U_j\}$ eine Überdeckung durch offene Teilmengen des $\mathbb{R}^N$, aus der wir wegen der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung wählen können. ◁

24.12. Immersionen. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : T \to \mathbb{R}^N$$

heißt (C^α)-Immersion, falls $\varphi \in C^\alpha$ und $\operatorname{Rang} \varphi'(t) = n$ für alle $t \in T$.

Weil φ' eine Matrix mit N Zeilen ist, ist dann $N \geq n$, falls $T \neq \emptyset$.

24.13. Satz. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : T \to \mathbb{R}^N$ eine $C^\alpha-$Immersion. Dann existiert zu jedem $t \in T$ eine offene Umgebung V so, dass $\varphi(V)$ eine n-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ ist und*

$$\varphi : V \to \varphi(V) \quad \textit{ein Homöomorphismus.}$$

Beweis. Da φ' den Rang n hat, können wir die Koordinaten so umnumerieren, dass

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_l} \right)_{j,l=1,\ldots,n} \neq 0.$$

Nach dem Satz von der inversen Funktion existiert dann eine offene Umgebung $V \subseteq T$ von t und eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : V \to U$$

ein $C^\alpha-$Diffeomorphismus ist. Wir definieren dann

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N) : V \times \mathbb{R}^{N-n} \to U \times \mathbb{R}^{N-n}$$

durch

$$\Phi_j(t_1, \ldots, t_N) = \begin{cases} \varphi_j(t_1, \ldots, t_n), & j \leq n \\ \varphi_j(t_1, \ldots, t_n) + t_j, & n+1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Behauptung: Dies ist ein C^α-Diffeomorphismus.
Dazu: (i) Injektivität: Es sei $\Phi_j(t_1, \ldots, t_N) = \Phi_j(s_1, \ldots, s_N)$. Dann folgt aus der Injektivität von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sofort, dass $t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n$ und dann, dass $t_j = s_j$ für $j > n$.
(ii) Surjektivität: Es sei $(u, s) \in U \times \mathbb{R}^{N-n}$. Wähle $(v_1, \ldots v_n) \in V$ mit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(v_1, \ldots v_n) = u$. Dann setze für $j > n$: $v_j = s_j - \varphi(v_1, \ldots v_n)$. Dann ist $\Phi(v) = (u, s)$.
(iii) Differenzierbarkeit ist klar.

Nach Konstruktion ist $\varphi(V) = \Phi(V \times \{0\})$. Wenn wir daher die Umkehrabbildung $F = \Phi^{-1}$: $U \times \mathbb{R}^{N-n} \to V \times \mathbb{R}^{N-n}$ betrachten, so ist diese ebenfalls C^α und

$$F(\varphi(V) \cap (U \times \mathbb{R}^{N-n})) = V \times \{0\} = \{x \in U \times \mathbb{R}^{N-n} : F_{n+1}(x) = \ldots = F_N(x) = 0\}.$$

Daher ist $\varphi(V)$ eine C^α-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ nach Satz 24.8. ◁

24.14. Beispiel. $T = \mathbb{R} \times]0, \pi[$ und $\varphi : T \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(\psi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{s. 22.5.}$$

Dann ist

$$\varphi'(\psi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix},$$

hat also stets den Rang 2. Daher ist φ eine Immersion. Ihr Bild ist $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$, die 2-Sphäre ohne Nord- und Südpol. Natürlich ist φ *kein* Diffeomorphisms, da $\varphi(\psi + 2\pi, \theta) = \varphi(\psi, \theta)$. Indem man φ z.B. auf $T_0 =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ einschränkt, erhält man einen Homöomorphismus $\varphi : T_0 \to \varphi(T_0)$ von T_0 auf S^2 ohne den Null-Meridian.

24.15. Satz. **(Parameterdarstellung einer Untermannigfaltigkeit)** *Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^N$ ist genau dann eine n-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit, falls zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine C^α-Immersion*

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^N$$

gibt, so dass $\varphi : T \to V$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis. “$\Leftarrow$” Existieren φ, T, V, so ist nach Satz 24.13 die Menge $V = \varphi(T)$ eine n-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit. Wegen der Lokalität der Definition ist dann M eine n-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit.

“$\Rightarrow$” Wir schreiben nach Satz 24.5 M in der Umgebung eines Punktes a als Graph:

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}.$$

Setzt man $V = M \cap (U' \times U'')$, $T = U'$, und $\varphi : T \to \mathbb{R}^N, \varphi(t) = (t, g(t))$, so sind die Anforderungen erfüllt. $\triangleleft$

24.16. Satz. *Es sei M eine n-dimensionale C^α-Mannigfaltigkeit mit zwei C^α-Parametrisierungen*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: T_1 \to V_1 \subseteq M, \\ \varphi_2 &: T_2 \to V_2 \subseteq M, \end{aligned}$$

für die $V = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ ist. Dann sind $W_j = \varphi_j^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ($j = 1, 2$), und $\psi = \varphi_2^{-1}\varphi_1 : W_1 \to W_2$ ist ein C^α-Diffeomorphismus.

Beweis. Da φ_1 und φ_2 Homöomorphismen sind, sind W_1 und W_2 als Urbilder der offenen Menge V offen. Nach Konstruktion ist ψ bijektiv.

Zeige noch, dass ψ eine C^α-Funktion ist. Dazu: Wir finden nach Satz 24.8 zu $a \in M$ eine in $\mathbb{R}^N$ offene Umgebung U sowie eine offene Teilmenge $U' \subseteq \mathbb{R}^N$ und einen $C^\alpha-$Diffeomorphismus

$$F : U \to U' \quad \text{mit} \quad F(M \cap U) = \{x \in U' : x_{n+1} = \ldots = x_N = 0\}.$$

O.B.d.A. sei $M \cap U \subseteq V$. Setze

$$W_j' = \varphi_j^{-1}(M \cap U) \subseteq W_j, \quad j = 1, 2.$$

Dann ist $F \circ \varphi_j(W_j') \subseteq \{x \in U' : x_{n+1} = \ldots = x_N = 0\}$. Wir schreiben daher

$$\begin{aligned} F \circ \varphi_1 &= (g_1 \ldots g_n, 0, \ldots, 0); \\ F \circ \varphi_2 &= (h_1 \ldots h_n, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Da φ_j' den Rang n hat und F' invertierbar ist, ist

$$\operatorname{Rang} \left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} = n = \operatorname{Rang} \left(\frac{\partial h_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Damit sind

$$\begin{aligned} g &= (g_1 \ldots g_n) : W_1' \to U' \cap \{x_{n+1} = \ldots = x_N = 0\} \quad \text{und} \\ h &= (h_1 \ldots h_n) : W_2' \to U' \cap \{x_{n+1} = \ldots = x_N = 0\} \end{aligned}$$

beide C^α-Diffeomorphismen auf die offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, dargestellt durch $U' \cap \{x_{n+1} = \ldots = x_N = 0\}$. Da auf W_1' gilt

$$\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (F \circ \varphi_2)^{-1} \circ (F \circ \varphi_1) = h^{-1} \circ g,$$

folgt die Behauptung. $\triangleleft$

Maßtensor und Integration.

24.17. Der Maßtensor auf M. Es sei $\varphi : T \to V$ eine Karte für M. Wir definieren den Maßtensor $g = (g_{ij})$ durch
$$g(t) = \varphi'(t)^T \varphi'(t).$$
In Komponenten:
$$g_{ij}(t) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_i}(t) \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_j}(t) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right\rangle.$$
Die Determinante $\gamma = \det g$ heißt Gramsche Determinante. Mehr dazu später in 24.24.

24.18. Bemerkung. Wie verhält sich der Maßtensor bei Koordinatenwechsel, d.h. wenn wir statt φ eine andere Kartenabbildung $\widetilde{\varphi} : \widetilde{T} \to V$ (oBdA gleiches V) wählen? Nach Satz 24.16 ist $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi$ für eine $C^\alpha-$Funktion ψ. Dann gilt für den zugehörigen Maßtensor $\widetilde{g}$ und dessen Determinante $\widetilde{\gamma}$:
$$\begin{aligned} \widetilde{g}(s) &= \widetilde{\varphi}'(s)^T \widetilde{\varphi}'(s) = \big(\varphi'(\psi(s))\psi'(s)\big)^T \big(\varphi'(\psi(s))\psi'(s)\big) \text{ und} \\ \widetilde{\gamma}(s) &= \gamma(\psi(s)) \cdot \big(\det \psi'(s)\big)^2 \end{aligned}$$

24.19. Lemma. *Die Gramsche Determinante ist stets positiv.*

Beweis. Für jedes t ist $g(t) = \varphi'(t)^T \varphi'(t)$ ist eine quadratische Matrix. Ferner ist $\ker g(t) = \ker \varphi'(t) = \{0\}$, da φ eine Immersion ist. (Hier verwenden wir, dass stets $\ker A^*A = \ker A$ gilt). Damit ist $g(t)$ injektiv, also auch surjektiv. Somit ist die Determinante $\neq 0$. Sie ist sogar positiv, weil $\varphi'^T \varphi'$ wegen $\langle \varphi'^T \varphi' v, v\rangle = \langle \varphi' v, \varphi' v\rangle \geq 0$ keine negativen Eigenwerte hat. $\triangleleft$

24.20. Zerlegung der Eins. Es sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer endlichen Überdeckung $\{U_j : j = 1, \dots, q\}\}$ durch offene Mengen (gibt es z.B., falls M kompakt ist) und Kartenabbildungen $\varphi_j : T_j \to U_j$. Dann gibt es Funktionen $\alpha_j : M \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $0 \leq \alpha_j \leq 1$ für jedes j;
(ii) $\alpha_j(x) = 0$, falls $x \notin U_j$;
(iii) $\sum_{j=1}^q \alpha_j = 1$.
(iv) Die Funktionen $\alpha_j \circ \varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind messbar (dabei denken wir uns diese Funktion außerhalb von T_j durch Null fortgesetzt).

(Man kann sogar C^∞-Funktionen bekommen.)

Beweis. Wir setzen $\alpha_j = \dfrac{\chi_{U_j}}{\sum_k \chi_{U_k}}$. Das geht, weil mindestens eine der Funktionen im Nenner $= 1$ ist. $\triangleleft$

24.21. Integration auf Mannigfaltigkeiten. Mit den obigen Bezeichnungen nennen wir eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ auf der $k-$dimensionalen Mannigfaltigkeit M messbar, falls sie in allen Karten messbar ist, d.h., falls für $j = 1, \dots, N$ die Funktionen $f \circ \varphi_j : T_j \to \mathbb{C}$ messbar sind. Wir setzen
$$\int_M f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{T_j} (\alpha_j \cdot f)(\varphi_j(t)) \sqrt{\gamma_j(t)} dt.$$
Dabei ist γ_j die Gramsche Determinante für φ_j. Wir nennen S das Oberflächenmaß für M. Wir können dann auch schreiben
$$\int_M f(x)\, dS(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_M \alpha_j(x) f(x)\, dS(x).$$

Es ist noch zu zeigen, dass diese Definition unabhängig ist

(i) von der Wahl der Kartenabbildungen;

(ii) von der Wahl der Zerlegung der Eins (bei Einhaltung der Eigenschaften (i)-(iv) aus 24.20).

Zu (i): Wir betrachten oBdA den Fall *einer* Karte mit der Notation aus 24.17. Hier ist für eine Funktion $g : V \to \mathbb{C}$ nach 24.17 und dem Transformationssatz

$$\int_{\widetilde{T}} g(\widetilde{\varphi}(t))\sqrt{\widetilde{\gamma}(t)}\,dt = \int_{\widetilde{T}} g(\varphi\circ\psi(t))\sqrt{\gamma(\psi(t))\det\psi'(t)^2}\,dt = \int_T g(\varphi(s))\sqrt{\gamma(s)}\,ds.$$

Zu (ii) Nehmen wir an, wir haben eine weitere Zerlegung der Eins $1 = \sum_{l=1}^p \beta_l$, bezüglich anderer Karten $\widetilde{\varphi}_l : \widetilde{T}_l \to V_l$, $l = 1, \dots, p$.

Dann ist

$$\sum_{l=1}^p \int_M \alpha_j(x)\beta_l(x)f(x)\,dS(x) = \int_M \alpha_j(x)f(x)\,dS(x)$$

und

$$\sum_{j=1}^q \int_M \alpha_j(x)\beta_l(x)f(x)\,dS(x) = \int_M \beta_l(x)f(x)\,dS(x),$$

da im ersten Fall alle Funktionen auf $M \setminus V_j$ und im zweiten Fall alle Funktionen auf $M \setminus \widetilde{V}_l$ verschwinden. Summation über j bzw. l ergibt:

$$\sum_{j=1}^q \int_M \alpha_j(x)f(x)\,dS(x) = \sum_{j=1}^q\sum_{l=1}^p \int_M \alpha_j(x)\beta_l(x)f(x)\,dS(x) = \sum_{l=1}^p \int_M \beta_l(x)f(x)\,dS(x).$$

24.22. n-dimensionale Volumina. Wir nennen eine Teilmenge E von der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M messbar, falls ihre charakteristische Funktion in obigem Sinn messbar ist. Wir nennen dann

$$\mathrm{vol}_n(E) = \int_M \chi_E(x)\,dS(x)$$

das $n-$dimensionale Volumen von E.

24.23. Beispiel. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi : T \to \mathbb{R}^N$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t. Ist φ zusätzlich ein Homöomorphismus (also insbesondere überschneidungsfrei), so ist $\varphi(T)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ mit der globalen Karte $\varphi : T \to \varphi(T)$. Die Gramsche Determinante ist

$$\gamma(t) = \varphi'(t)^T\varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|^2,$$

und somit

$$\mathrm{vol}_1(\varphi(T)) = \int_{\varphi(T)} 1\,dS(x) = \int_T \sqrt{\gamma(t)}\,dt = \int_T \|\varphi'(t)\|\,dt = \text{ Kurvenlänge von } \varphi : T \to \mathbb{R}^N.$$

24.24. Interpretation des Maßtensors. Für jedes $t_0 \in T$ (Koordinatenumgebung) definiert die positiv definite Matrix $g(t_0)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, genauer auf den Tangentialvektoren in t_0, durch $\langle v, w\rangle_{g(t_0)} = \langle v, g(t_0)w\rangle = \langle\varphi'(t_0)v, \varphi'(t_0)w\rangle$. Es erlaubt uns, in den Koordinatenumgebungen die Längen und Winkel zu messen, die die Bildvektoren unter φ auf der Mannigfaltigkeit bilden. Das sehen wir so:

Es seien $\gamma_1, \gamma_2 :]-1,1[\to T$ zwei Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = t_0$ und Tangentialvektoren $\gamma_1'(0) = v$, $\gamma_2'(0) = w$. Für die Bildkurven $\Gamma_j = \varphi \circ \gamma_j :]-1,1[\to M$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underbrace{\langle \Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0)\rangle}_{\text{Skp der Bild-TV, unabh.von } \varphi} &= \langle \varphi'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0), \varphi'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0)\rangle \\ = \langle \varphi'(t_0)v, \varphi'(t_0)w\rangle = \langle g(t_0)v, w\rangle =: \underbrace{\langle v, w\rangle_{g(t_0)}}_{g\text{-Skalarprodukt der TV}} &= \sum_{ij} g_{ij}(t_0)v_i w_j.\end{aligned}$$

Insbesondere verwenden wir zur Bestimmung der Länge der Bildkurve Γ_1 das Maß

$$ds = \|\Gamma_1'(u)\|du = \sqrt{\sum g_{ij}\gamma_{1i}'(u)\gamma_{1j}'(u)}\; du.$$

Schreibt man $dt^j = \gamma_{1j}'(u)du$ als Veränderung der j-ten t-Komponente, so ist $ds = \sqrt{\sum g_{ij}dt^i dt^j}$. Man nennt ds das Längenelement und schreibt meist

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}dt^i dt^j.$$

Oft gibt man daher den Maßtensor in der Form

$$g = \sum_{ij} g_{ij}dt^i dt^j$$

an; später wird diese Schreibweise klarer.

Den Maßtensor können wir nur für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ definieren. Durch ihn wird die Metrik von $\mathbb{R}^n$ auf M übertragen.

Für später: Für abstrakte Mannigfaltigkeiten kann man stattdessen eine stetige Funktion $x \mapsto g(x)$, $x \in M$, *wählen*, wobei $g(x)$ für jedes x ein Skalarprodukt auf dem Tangentialraum an M in x ist. Man nennt g eine Riemannsche Metrik und (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

24.25. Beispiel. Wir betrachten die 2-Sphäre vom Radius r: S_r^2 in $\mathbb{R}^3$. Wir haben die Karte

$$\begin{aligned}\Phi \quad &: \quad]0, 2\pi[\times] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3 \\ \Phi(\varphi, \theta) \quad &= \quad \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Der Maßtensor bzw. die Gramsche Determinante sind

$$g(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \gamma(\varphi, \theta) = \det g(\varphi, \theta) = r^4\cos^2\theta.$$

Das Bild von Φ ist die $2-$Sphäre ohne den Nullmeridian. Da er eine Nullmenge ist, spielt er für die Integration keine Rolle. Für $f : S_r^2 \to \mathbb{C}$ ist also

$$\int_{S_r^2} f(x)\, dS(x) = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\Phi(\varphi, \theta))r^2\cos\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Insbesondere erhalten wir für die Oberfläche der Kugel vom Radius r:

$$\mathrm{vol}_2(S_r^2) = \int_{S_r^2} 1\, dS(x) = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi r^2.$$

24.26. Rotationsflächen. Es sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}_{>0}$ stetig differenzierbar und strikt positiv. Dann ist die Rotationsfläche des Graphen von f um die $z-$Achse

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit: Bis auf eine Nullmenge ist sie durch die Karte

$$\begin{aligned} \Phi &: I \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \\ \Phi(t,\varphi) &= \begin{pmatrix} f(t)\cos\varphi \\ f(t)\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

Hier ist

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Rang 2).}$$

und

$$g(t,\varphi) = \begin{pmatrix} 1+f'(t)^2 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma(t,\varphi) = f(t)^2(1+f'(t)^2).$$

Das Volumen der Rotationsfläche ist daher – sofern das Integral existiert –

$$\mathrm{vol}_2(M) = \int_0^{2\pi}\int_I f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt\,d\varphi = 2\pi\int_I f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt.$$

24.27. Beispiel. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $F : T \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist der Graph von F, nämlich die Menge

$$M = \{(x_1,\dots,x_n) : x_n = F(x_1,\dots,x_{n-1}\},$$

eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$: Die zugehörige Karte ist

$$\begin{aligned} \Phi &: T \to M \\ \Phi(t) &= \begin{pmatrix} t \\ F(t) \end{pmatrix}; \quad \Phi'(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n-1} \\ F'(t) \end{pmatrix} \quad \text{hat Rang } n-1. \end{aligned}$$

Dann gilt nach der Regel, dass $\det(I + x^Tx) = 1 + xx^T$ für einen *Zeilen*vektor x:

$$\det g(t) = \det(\Phi'(t)^T\Phi'(t)) = \det(I + F'(t)^TF'(t)) = 1 + \|F'(t)\|^2$$

24.28. Die obere Halbsphäre vom Radius r. (Ein Spezialfall von 24.27) Wir schreiben die Halbsphäre $S_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r, x_n > 0\}$ als Graph: Wir wählen $T = \{t \in \mathbb{R}^{n-1} : \|t\| < r\}$ und

$$\begin{aligned} F &: T \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \sqrt{r^2 - \|t\|^2} \quad \text{und} \\ \Phi &: T \to H, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ F(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = -\frac{t_j}{\sqrt{r^2 - \|t\|^2}}; \quad \det g(t) = 1 + \sum_j \frac{t_j^2}{r^2 - \|t\|^2} = \frac{r^2}{r^2 - \|t\|^2}.$$

Für jede integrierbare Funktion ist also

$$\begin{aligned} \int_{S_r^+} f(x)\,dS(x) &= \int_{\|t\|\le r} f(t, \sqrt{r^2 - \|t\|^2})\ \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|t\|^2}}\,dt \\ &\overset{rs=t}{=} \int_{\|s\|\le 1} f(rs, r\sqrt{1 - \|s\|^2})\ \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|s\|^2}}\,ds. \end{aligned}$$

24.29. Polarkoordinaten. *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann ist für fast alle $r > 0$ die Einschränkung der Funktion f auf die Sphäre vom Radius r integrierbar und es gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{\|y\|=r} f(y) dS(y) \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{\|t\|=1} f(rt)\,dS(t) \right) r^{n-1}\,dr.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $H^+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ die obere Halbebene. Es langt offensichtlich, den Satz für den Fall zu beweisen, dass $f = f\chi_{H^+}$ ist.

Wir setzen $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und definieren die Abbildung

$$\Phi : B \times \mathbb{R}_{>0} \to H^+; \quad \Phi(s,r) = r(s_1, \dots, s_{n-1}, \sqrt{1 - \|s\|^2}).$$

Dies ist offensichtlich eine Bijektion. Ferner ist

$$\Phi'(s,r) = \begin{pmatrix} r & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & r & s_{n-1} \\ -\frac{rs_1}{\sqrt{\cdot}} & \dots & -\frac{rs_{n-1}}{\sqrt{\cdot}} & \sqrt{1-\|s\|^2} \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der letzten Spalte (und Vertauschen der $j-$ten mit der letzten Zeile) liefert

$$\det \Phi'(s,r) = \frac{r^{n-1}s_1^2}{\sqrt{1-\|s\|^2}} + \dots \frac{r^{n-1}s_{n-1}^2}{\sqrt{1-\|s\|^2}} + r^{n-1}\sqrt{1-\|s\|^2} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|s\|^2}} \neq 0,$$

somit ist Φ ein $C^\infty-$Diffeomorphismus. Nach dem Transformationssatz ist

$$\int_{H^+} f(x)\,dx = \int_{B \times \mathbb{R}_{>0}} f(rs, r\sqrt{1-\|s\|^2})\ \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|s\|^2}} ds dr.$$

Nach dem Satz von Fubini existiert für fast alle $r > 0$ das Integral über B, und es gilt:

$$\int_{H^+} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_B f(rs, r\sqrt{1-\|s\|^2})\ \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|s\|^2}} ds \right) dr.$$

Nun ist das innere Integral nach 24.28 gerade das Integral von f über die obere Halbsphäre vom Radius r. Wir erhalten also die erste Identität unseres Satzes. Für die zweite klammern wir erst r^{n-1} aus und wenden dann 24.28 (mit $r = 1$) auf $g(s) = f(rs)$ an. $\triangleleft$