

Skalarprodukte und Hilberträume. H sei ein \mathbb{K} -Vektorraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

Für beliebige $x, y, z \in H, \alpha \in \mathbb{K}$

- (i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($= \langle y, x \rangle$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- (ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
- (iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
- (iv) $\langle x, x \rangle > 0$, falls $x \neq 0$.

Es folgt sofort $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

Orthogonalität/Orthonormalität. Wir nennen x orthogonal zu y und schreiben $x \perp y$, falls $\langle x, y \rangle = 0$.

Eine Menge $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ von Vektoren in H heißt orthogonal, falls $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle = 0$ für $\alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta$. Sie heißt orthonormal, falls zusätzlich $\langle v_\alpha, v_\alpha \rangle = 1$ für alle $\alpha \in A$.

Sind $M, N \subseteq H$, so vereinbart man:

- (i) M heißt orthogonal zu N , falls $\langle m, n \rangle = 0$ für alle $m \in M, n \in N$.
- (ii) $M^\perp = \{x \in H : \langle x, m \rangle = 0 \text{ für alle } m \in M\}$.
 M^\perp ist stets ein abgeschlossener Unterraum von H .

Norm aus Skalarprodukt.

- (i) Durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ist eine Norm auf H definiert.
- (ii) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ zeigt die Stetigkeit des Skalarprodukts.
- (iii) Es gilt die Parallelogrammgleichung $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Hilbertraum. H heißt Hilbertraum, falls H bezüglich der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist.

23.1. Satz. $L^2(X)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu$.

Beweis. Man überzeugt sich zunächst, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Interessant ist hier nur die Definitheit. Für $f \in L^2$ ist $\langle f, f \rangle = \int |f|^2 d\mu$ reell und nicht-negativ. Ist $\langle f, f \rangle = 0$, so ist $f = 0$ f.ü. und somit $f = 0$ als Element von L^2 . Zur Vollständigkeit: Mit dieser Definition gilt $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$; daher folgt die Aussage aus Satz 22.16. \triangleleft

Im Folgenden sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Norm $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Ferner sei $B = \{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Teilmenge von H , d.h.

$$\langle v_\alpha, v_\beta \rangle = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} .$$

23.2. Lemma. Es sei M abgeschlossener Unterraum von H . Dann ist $H = M \oplus M^\perp$. Ferner gilt dann: Ist $x = m + n$ mit $m \in M$ und $n \in M^\perp$, so ist m das eindeutig bestimmte Element von M für das $\|x - m\|$ minimal wird.

Beweis. Es sei $x \notin M$. Wir setzen $d = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$. Dann existiert eine Folge (m_j) in M mit $\|x - m_j\| \rightarrow d$.

1. Schritt. Wir zeigen, dass (m_j) eine Cauchy-Folge ist: Nach der Parallelogrammgleichung (oder durch Nachrechnen) ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|m_j - m_k\|^2 = \|(m_j - x) - (m_k - x)\|^2 \\ &= \underbrace{2\|m_j - x\|^2}_{\rightarrow d^2} + \underbrace{2\|m_k - x\|^2}_{\rightarrow d^2} - \|(m_j - x) + (m_k - x)\|^2. \end{aligned}$$

Nun ist $\|(m_j - x) + (m_k - x)\|^2 = 4\|\frac{1}{2}(m_j + m_k) - x\|^2 \geq 4d^2$, da $\frac{1}{2}(m_j + m_k) \in M$. Es folgt

$$0 \leq \limsup_{j,k \rightarrow \infty} \|m_j - m_k\|^2 \leq 0.$$

2. Schritt. Da M abgeschlossen ist und H vollständig: $\exists m \in M : m_j \rightarrow m, \|x - m\| = d$. Da $x \notin M$, ist $d > 0$.

3. Schritt. Zeige: $\langle x - m, m' \rangle = 0 \forall m' \in M$: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(t) &= \|x - m + tm'\|^2 = \langle x - m + tm', x - m + tm' \rangle \\ &= \|x - m\|^2 + t\langle m', x - m \rangle + t\langle x - m, m' \rangle + t^2\|m'\|^2. \end{aligned}$$

Dann ist $f(t) \geq d^2$, f ist stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f'(t) &= \langle m', x - m \rangle + \langle x - m, m' \rangle + 2t\|m'\|^2 \\ &= 2\operatorname{Re} \langle m', x - m \rangle + 2t\|m'\|^2. \end{aligned}$$

In 0 hat f lokales Minimum, also ist $f'(0) = 0$. Es folgt, dass $\operatorname{Re} \langle m', x - m \rangle = 0$. Analog: $\operatorname{Im} \langle m', x - m \rangle = 0$ (mit $g(t) = \|x - m + itm'\|^2$).

4. Schritt. Schreibe $x = m + (x - m)$. Dann ist $m \in M, x - m \in M^\perp$. Folglich $H = M + M^\perp$. Die Summe ist direkt: Ist $x \in M \cap M^\perp$, so ist $\langle x, x \rangle = 0$, also $x = 0$. Also: $H = M \oplus M^\perp$.

5. Schritt. Annahme: $\exists m_1, m_2 : \|x - m_1\| = \|x - m_2\| = \min$. Dann ist nach Schritt 3: $x - m_j \in M^\perp$, also $m_1 - m_2 = (x - m_2) - (x - m_1) \in M \cap M^\perp = \{0\}$. \triangleleft

23.3. Bemerkung. Ähnlich kann man zeigen, dass auch für eine abgeschlossene konvexe Menge M ein eindeutiges Element $m \in M$ existiert, für das $\|x - m\|$ minimal wird.

23.4. Definition. Wir definieren zu $x \in H$ die Funktion $\hat{x} : A \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, v_\alpha \rangle$$

und nennen $\hat{x}(\alpha)$ den α -ten Fourierkoeffizienten bzgl. $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$.

23.5. Satz. Es sei $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Menge, F eine endliche Teilmenge von A und U_F der von $\{v_\alpha : \alpha \in F\}$ aufgespannte Unterraum von H .

(a) Ist $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion mit $\varphi(\alpha) = 0$ für $\alpha \notin F$, so existiert genau ein y in U_F mit $\hat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$, nämlich

$$y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) v_\alpha.$$

In diesem Fall ist

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2.$$

(b) Ist $x \in H$ und

$$s_F(x) = \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) v_\alpha,$$

so ist

$$\|x - s_F(x)\| \leq \|x - u\| \quad \text{für alle } u \in U_F,$$

d.h. $s_F(x)$ ist der Vektor aus U_F , der x am nächsten liegt, vgl. 23.2. Ferner gilt:

$$\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{Besselsche Ungleichung (einfache Version).}$$

Beweis. (a) folgt sofort aus der Orthonormalitätsrelation.

(b) Für alle $\alpha \in F$ ist $\hat{s}_F(\alpha) = \hat{x}(\alpha)$ für alle α und daher $x - s_F(x) \perp v_\alpha$. Es folgt, dass $(x - s_F(x)) \perp s_F(x) - u$ für alle $u \in U_F$. Damit ist

$$\|x - u\|^2 = \|(x - s_F(x)) + (s_F(x) - u)\|^2 = \|x - s_F(x)\|^2 + \|s_F(x) - u\|^2.$$

Dies liefert die Optimalität. Speziell für $u = 0$ folgt $\|s_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, was nach (a) die Besselsche Ungleichung liefert. \triangleleft

23.6. Definition. Es sei $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Menge und $f : A \rightarrow [0, \infty[$ eine beliebige Funktion. Wir setzen

$$\sum_{\alpha \in A} f(\alpha) = \sup\{f(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_k) : \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \text{ endl. Teilmenge von } A\}.$$

23.7. Der Raum $\ell^2(A)$. Es sei

$$\ell^2(A) = \left\{ \varphi : A \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{\alpha \in A} |\varphi(\alpha)|^2 < \infty \right\}.$$

Wir können auf A als σ -Algebra die Potenzmenge wählen und als Maß das Zählmaß. Dann ist $\sum_{\alpha \in A} f(\alpha)$ das Lebesgue-Integral von f (vgl. 20.11(b)), und $\ell^2(A) = L^2(A)$. Insbesondere ist $\ell^2(A)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(1) \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) \overline{\psi(\alpha)}$$

und der Norm $\|\varphi\| = (\sum |\varphi(\alpha)|^2)^{1/2}$.

Was die Summe angeht: Ist $\varphi \in \ell^2(A)$, so ist $\{\alpha : \varphi(\alpha) \neq 0\}$ höchstens abzählbar, denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\{\alpha : |\varphi(\alpha)| > \frac{1}{k}\}$ endlich. Es handelt sich daher (auch bei (1)) um Reihen im bekannten Sinn. Nach Cauchy-Schwarz ist $\sum |\varphi(\alpha)| |\overline{\psi(\alpha)}| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$ absolut konvergent.

Weiterhin sieht man sofort aus Definition 23.6, dass der Unterraum

$$E = \{\varphi \in \ell^2(A) : \varphi(\alpha) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } \alpha\}$$

eine dichte Teilmenge von $\ell^2(A)$ ist.

Dabei nennen wir eine Teilmenge E eines normierten (oder metrischen Raums) X *dicht* in X , falls zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein e_ε in E existiert mit $\|x - e_\varepsilon\| < \varepsilon$ bzw. $d(x, e_\varepsilon) < \varepsilon$.

23.8. Lemma. X und Y seien metrische Räume, X sei vollständig und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig. Ferner enthalte X eine dichte Teilmenge X_0 , auf der f eine Isometrie ist; das Bild $f(X_0)$ sei dicht in Y .

Dann ist f eine Isometrie.

Beachte: Man nennt f eine *Isometrie*, falls f bijektiv ist und für alle x_1, x_2 gilt

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Beweis. Surjektivität. Zu $y \in Y$ existiert eine Folge (y_k) in $f(X_0)$ mit $y_k = f(x_k) \rightarrow y$. Dann ist (y_k) eine Cauchy-Folge in Y , wegen der Isometrie-Eigenschaft also (x_k) eine Cauchy-Folge in X .

Da X vollständig ist, hat sie einen Grenzwert, x . Aus der Stetigkeit von f schließen wir, dass $f(x) = y$ ist.

Isometrie-Eigenschaft. Es seien y, \tilde{y} in Y mit Urbildern x, \tilde{x} . Wir finden Folgen $(x_k), (\tilde{x}_k)$ in X_0 mit $x_k \rightarrow x$ und $\tilde{x}_k \rightarrow \tilde{x}$. Dann ist

$$d_Y(y, \tilde{y}) \leq \underbrace{d_Y(y, f(x_k))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d_Y(f(x_k), f(\tilde{x}_k))}_{= d_X(x_k, \tilde{x}_k)} + \underbrace{d_Y(f(\tilde{x}_k), \tilde{y})}_{\rightarrow 0} \\ \rightarrow d_X(x, \tilde{x})$$

Ebenso ist

$$\underbrace{d_Y(f(x_k), f(\tilde{x}_k))}_{\rightarrow d_X(x, \tilde{x})} \leq \underbrace{d_Y(f(x_k), y)}_{\rightarrow 0} + d_Y(y, \tilde{y}) + \underbrace{d_Y(\tilde{y}, f(\tilde{x}_k))}_{\rightarrow 0}.$$

Es folgt $d_Y(y, \tilde{y}) = d_X(x, \tilde{x})$.

Injektivität. Sie folgt sofort aus der Isometrie-Eigenschaft. ◁

23.9. Satz. Es sei $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Menge im Hilbertraum H .

- (a) Dann gilt für jedes $x \in H$: $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselsche Ungleichung).
- (b) (Satz von Riesz-Fischer) $\mathcal{P} = LH(v_\alpha : \alpha \in A)$ sei der Raum der endlichen Linearkombinationen der v_α . Die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ ist ein stetiger Epimorphismus von H auf $\ell^2(A)$. Dessen Einschränkung auf den Abschluss $\overline{\mathcal{P}}$ von \mathcal{P} ist ein isometrischer Isomorphismus von $\overline{\mathcal{P}}$ auf $\ell^2(A)$.

Beachte: Nur für abzählbar viele α ist nach Bessel $\hat{x}(\alpha) \neq 0$, so dass man zu x die Reihe $s(x) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)v_\alpha$ definieren kann. Wegen der Orthonormalität der v_α und der Besselschen Ungleichung definiert die Partialsummenfolge eine Cauchy-Folge, die in der Norm konvergiert. Die Abbildung $x \mapsto s(x)$ ist die Projektion von H auf $\overline{\mathcal{P}}$ mit Kern $\overline{\mathcal{P}}^\perp$.

Beweis. Da nach 23.5 die Besselsche Ungleichung für jede endliche Teilmenge von A gilt, bleibt sie nach Definition der Reihe auch für A gültig. Nun definieren wir

$$F : H \rightarrow \ell^2(A); \quad F(x) = \hat{x}.$$

Man beachte, dass wegen der Besselschen Ungleichung tatsächlich \hat{x} in $\ell^2(A)$ liegt!

Klar: F ist linear. Ferner ist

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \stackrel{\text{def}}{=} \|\hat{x}_1 - \hat{x}_2\| \stackrel{\text{Bessel}}{\leq} \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in H.$$

Daher ist F stetig. F ist auch surjektiv: Zu $\varphi \in \ell^2(A)$ definiert $x = \sum \varphi(\alpha)v_\alpha$ ein Urbild. Die Bilder der Elemente in \mathcal{P} sind genau die Elemente des Raums E aus 23.7. Nach 23.5(a) ist

$$F : \mathcal{P} \rightarrow E \quad \text{Isometrie.}$$

Unser Satz folgt daher aus Lemma 23.8 mit $X = \overline{\mathcal{P}}$, $X_0 = \mathcal{P}$, $Y = \ell^2(A)$, wenn wir beachten, dass $\overline{\mathcal{P}}$ als abgeschlossene Teilmenge des (vollständigen) Hilbertraums ebenfalls vollständig ist. ◁

23.10. Satz. Es sei $B = \{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine orthonormale Menge in dem Hilbertraum H . Folgendes ist äquivalent:

- (i) B ist eine maximale orthonormale Menge. Man nennt B dann eine Orthonormalbasis (ONB) (Achtung: Im Allgemeinen ist eine ONB keine Basis!).
- (ii) Die lineare Hülle \mathcal{P} von B ist dicht in H .
- (iii) Für alle $x \in H$ ist $\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$, d.h. die Besselsche Ungleichung ist eine Gleichung.

(iv) Für alle $x, y \in H$ ist $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)}$ (Parsevalsche Gleichung)

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Ist $\overline{P} \neq H$, so enthält \overline{P}^\perp mindestens ein Element $v \neq 0$. Durch Hinzufügen von $v/\|v\|$ ließe sich B vergrößern.

(ii) \Rightarrow (iii). Folgt sofort aus 23.9.

(iii) \Rightarrow (iv). Polarisationsgleichung:

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

(iv) \Rightarrow (i). Ist $0 \neq v \perp B$, so gilt für $x = y = v$:

$$0 \neq \|v\|^2 = \langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)} = \sum 0 = 0.$$

◁

Zur Verdeutlichung noch einmal die zentrale Aussage aus 23.9 und 23.10:

23.11. Satz. Ist $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ eine ONB von H , so ist die Abbildung $\varphi : x \mapsto \hat{x}$ ein isometrischer Isomorphismus von H auf $\ell^2(A)$. Man schreibt $x = \sum_{\alpha} \hat{x}(\alpha)v_\alpha$ im Sinn von 23.9. Es gilt

$$\langle x, y \rangle_H = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_{\ell^2(A)}.$$

Man kann mit dem Lemma von Zorn zeigen:

23.12. Satz. Jede orthonormale Menge in einem Hilbertraum kann zu einer ONB ergänzt werden. Insbesondere hat jeder Hilbertraum eine ONB.

23.13. Folgerung. Jeder Hilbertraum ist isomorph zu $\ell^2(A)$ für eine geeignete Menge A .

Konkrete Fourierreihen.

23.14. Definition. Es sei $\mathcal{F}_{2\pi}$ die Menge aller 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R} :

$$\mathcal{F}_{2\pi} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f(t + 2\pi) = f(t) \text{ für alle } t\}.$$

Ferner sei

$$L_{2\pi}^2 = \left\{ f \in \mathcal{F}_{2\pi} : f \text{ messbar, } \|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\};$$

genauer deren Äquivalenzklassen modulo Nullfunktionen. Ebenso kann man $L_{2\pi}^p$ definieren. Wir setzen ferner

$$C_{2\pi}^k = \{f \in \mathcal{F}_{2\pi} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}.$$

Ein trigonometrisches Polynom ist eine Funktion der Form

$$p(t) = \sum_{j=-N}^N c_j e^{ijt} \quad \text{mit geeignetem } N \in \mathbb{N}_0, c_j \in \mathbb{C}.$$

Klar: (1) Jedes trigonometrische Polynom hat eine Darstellung

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^N (a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)), \quad \text{mit } a_j, b_j \in \mathbb{C}.$$

(2) Jedes trigonometrische Polynom gehört zu $C_{2\pi}^\infty$.

23.15. Lemma. (a) $L_{2\pi}^2$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

(b) $C_{2\pi}$ ist dicht in $L_{2\pi}^2$.

Beweis. Nach Satz 23.1 ist $L^2([-\pi, \pi])$ mit diesem Skalarprodukt ein Hilbertraum (das Maß ist $\frac{m}{2\pi}$). Durch periodische Fortsetzung können wir $L^2([-\pi, \pi])$ mit $L^2_{2\pi}$ identifizieren.

(b) Es sei $\varepsilon > 0$. Mit Satz 22.18 finden wir leicht eine Funktion $g \in C([-\pi, \pi])$ mit $\|f - g\| < \varepsilon$. Wir können g unter Erhaltung der Ungleichung so ändern, dass $g(-\pi) = g(\pi)$. Damit lässt sich g zu einer Funktion in $C_{2\pi}$ fortsetzen. \triangleleft

23.16. Lemma. Die Menge der durch $e_j(t) = e^{ijt}$, $j \in \mathbb{Z}$, definierten Funktionen ist orthonormal. Ihre lineare Hülle sind die trigonometrischen Polynome.

Beweis. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} \overline{e^{ikt}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt$. Das Resultat ist 0 für $j \neq k$ und 2π für $j = k$. \triangleleft

23.17. Hauptsatz. Die Menge $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB von $L^2_{2\pi}$. Bezeichnen wir (wie in 23.4) mit $\hat{f}_j = \hat{f}(j) = \langle f, e_j \rangle$ den j -ten Fourierkoeffizienten, so gilt

$$f \mapsto \hat{f} \text{ ist eine Isometrie } L^2_{2\pi} \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \text{ und } \langle f, g \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}_j \overline{\hat{g}_j}.$$

Jede Funktion $f \in L^2_{2\pi}$ ist insbesondere (eindeutig) durch ihre Fourierreihe darstellbar:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}_j e^{ijt} \quad \text{im } L^2\text{-Sinn,}$$

vgl. 23.9. Im Allgemeinen hat man keine punktweise Konvergenz!

Beweis. Wegen 23.16 muss man nur zeigen, dass $LH\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $L^2_{2\pi}$, d.h. $\{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB ist. Der Rest folgt dann aus Satz 23.11. Dazu konstruiert man eine Folge trigonometrischer Polynome (q_k) mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $q_k(t) \geq 0$ für alle k, t
- (ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_k(t) dt = 1$ für alle k
- (iii) Für $\delta > 0$ sei

$$s_k(\delta) = \sup\{q_k(t) : \delta \leq |t| \leq \pi\}.$$

Dann gilt $s_k(\delta) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Hat man eine solche Folge, kann man die Dichtheit von $\langle e_j : j \in \mathbb{Z} \rangle$ zeigen: Ist $f \in L^2_{2\pi}$ und $\varepsilon > 0$ vorgelegt, so wählt man zunächst $g \in C^0_{2\pi}$ mit $\|f - g\| < \varepsilon/2$. Es langt also ein trigonometrisches Polynom p mit $\|g - p\| < \varepsilon/2$ zu finden. Dazu definieren wir p_k durch

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)q_k(s) ds \\ &\stackrel{u=t-s}{=} \int_{t-\pi}^{t+\pi} g(u)q_k(t-u) du \\ &\stackrel{\text{Periodizität}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)q_k(t-u) du \end{aligned}$$

Wir schreiben $q_k(t) = \sum_{j=-N}^N c_j e^{ijt}$. Dann ist

$$q_k(t-u) = \sum_{j=-N}^N c_j e^{-iju} e^{ijt}$$

und daher p_k ein trigonometrisches Polynom. Wir zeigen, dass p_k gleichmäßig gegen g konvergiert. Wir wählen dazu zuerst ein $\delta > 0$ so, dass

$$(1) \quad |g(s) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{falls } |s - t| < \delta;$$

dies ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von g möglich. Dann ist wegen (ii)

$$\begin{aligned} p_k(t) - g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(t-s) - g(t)) q_k(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0 \leq |s| \leq \delta} (g(t-s) - g(t)) q_k(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} (g(t-s) - g(t)) q_k(s) ds \end{aligned}$$

und somit

$$|p_k(t) - g(t)| \stackrel{(1),(i),(ii)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4} \cdot 1 + 2 \|g\|_{\text{sup}} s_k(\delta).$$

Wegen Eigenschaft (iii) ist die rechte Seite $< \varepsilon/2$ für hinreichend großes k . Damit sind wir fertig, denn

$$\|p_k - g\|_{L^2_{2\pi}} \leq \|p_k - g\|_{\text{sup}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es bleibt, eine solche Folge (q_k) zu finden. Eine Möglichkeit ist

$$q_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k,$$

wobei c_k so gewählt ist, dass (ii) gilt.

Dann gilt offensichtlich (i); (ii) gilt nach Definition. Nun zu (iii): Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k dt \geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t dt \\ &= \frac{c_k}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{2} \right)^k du = \frac{2c_k}{(k+1)\pi} \left(\frac{1+u}{2} \right)^{k+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{2c_k}{(k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Somit ist $c_k \leq \frac{(k+1)\pi}{2}$. Nun fällt q_k auf $[0, \pi]$; also ist

$$q_k(t) \leq q_k(\delta) \leq \frac{(k+1)\pi}{2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^k \rightarrow 0,$$

und der Beweis ist vollständig. ◁

Der Beweis enthält die folgende bemerkenswerte Aussage:

23.18. Weierstraßscher Approximationssatz. Zu jedem $g \in C_{2\pi}$ gibt es eine Folge von trigonometrischen Polynomen, die gleichmäßig gegen g konvergiert.

23.19. Folgerung. (Satz von Riemann Lebesgue) Wegen $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ gilt insbesondere $\hat{f}_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \pm\infty$.

23.20. Bemerkung. Praktisch schreibt man Fourierreihen oft in der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt))$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{C}$. Man rechnet nach, dass

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) f(t) dt, \quad b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt) f(t) dt$$

Die Bessel-Gleichung lautet dann

$$\|f\|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (|a_j|^2 + |b_j|^2).$$

23.21. Bemerkung. Bisher wissen wir nur, dass die Fourierreihe von $L^2_{2\pi}$ -Funktionen in L^2 gegen die Ausgangsfunktion konvergiert. Es stellt sich die Frage, was bei 'leichten' Unstetigkeiten passiert. Satz 23.23 unten gibt eine befriedigende Antwort etwa für stückweise stetig differenzierbare Funktionen.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass man bei Sprungstellen keine gleichmäßige Konvergenz erhält, sondern dass die die Fourierreihe in der Nähe des Sprungs übersteuert (Gibbs-Phänomen). Das folgende Beispiel zeigt das schön.

23.22. Beispiel. Wir betrachten die zu der 2π -periodischen Sägezahnfunktion

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t = 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - t), & 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

gehörende Fourierreihe

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jt)}{j}.$$

Wir zeigen zuerst, dass $s(t) = S(t)$ für alle t . Für $t = 0$ (und $t = 2\pi$) ist das sicher richtig. Es sei also $0 < t < 2\pi$. Nun benötigen wir die Identität

$$(1) \quad \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^N \cos(js) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})s)}{2 \sin(\frac{1}{2}s)}, \quad s \notin \{2m\pi : m \in \mathbb{Z}\}$$

die man leicht aus der Formel $\cos(jt) = \frac{1}{2}(e^{ijt} + e^{-ijt})$ und der geometrischen Reihe erhält. Integriert man für $0 < t < 2\pi$ die Identität (1) von π bis t , so folgt für die N -te Partialsumme S_N von S :

$$(2) \quad -s(t) + S_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(t - \pi) + \sum_{j=1}^N \frac{\sin(jt)}{j} = \int_{\pi}^t \frac{\sin((N + \frac{1}{2})s)}{2 \sin(\frac{1}{2}s)} ds =: R_N(t).$$

Partielle Integration auf der rechten Seite mit $u = \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}s)}$, $v' = \sin(N + \frac{1}{2})s$ zeigt, dass

$$R_N(t) = \frac{\cos(N + \frac{1}{2})t}{(2N + 1) \sin(\frac{1}{2}t)} + \frac{1}{2N + 1} \int_{\pi}^t \cos((N + \frac{1}{2})s) \left(\frac{-\cos(\frac{1}{2}s)}{2 \sin^2(\frac{1}{2}s)} \right) ds$$

Verwendet man nun, dass für s im Integrationsbereich gilt $\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}s)} \leq \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}t)}$ während $\cos \leq 1$ ist, so ist

$$|R_N(t)| \leq \frac{1}{(2N + 1) \sin(\frac{1}{2}t)} + \frac{1}{2N + 1} \cdot \frac{|\pi - t|}{2 \sin^2(\frac{1}{2}t)} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Damit konvergiert S_N punktweise auf \mathbb{R} gegen s .

Auf jedem kompakten Intervall $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ gilt $\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}t)} \leq \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\varepsilon)}$, damit ist dort die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Das Gibbs-Phänomen ist die Tatsache, dass (bei ansonsten stetig differenzierbaren Funktionen) die Approximation durch die Fourierreihe in den Sprungstellen übersteuert: In deren Nähe ist der N -te Approximationsfehler $|R_N(t)| \approx 0,089 \cdot \text{Sprunghöhe}$.

In unserem Beispiel liegt eine Sprungstelle in $t = 0$ mit Sprunghöhe π . Wann ist der Fehler maximal? Nach (2) ist

$$R'_N(t) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{1}{2}t)}.$$

Die erste Maximalstelle für $0 < t < 2\pi$ liegt also in $t_N = \pi/(N + \frac{1}{2})$. Es ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (S_N(\varepsilon) - s(\varepsilon)) = 0 - \frac{\pi}{2},$$

also

$$\begin{aligned} R_N(t_N) &= \int_{\pi}^{t_N} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})s)}{2 \sin(\frac{1}{2}s)} ds = \int_0^{t_N} + \int_{\pi}^0 \dots = \int_0^{t_N} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})s)}{2 \sin(\frac{1}{2}s)} ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_N(\varepsilon) \\ (3) \quad &\stackrel{u=(N+\frac{1}{2})t}{=} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(2N+1) \sin(\frac{u}{2N+1})} du - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Der Nenner des Integranden ist stets $< u$, daher ist

$$R_N(t_N) > \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\pi}{2} = Si(\pi) - \frac{\pi}{2} \approx 0,1789 \frac{\pi}{2}$$

unabhängig von N . Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt sogar (da $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v} = 1$ im Nenner von (3))

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(t_N) = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\pi}{2}.$$

Interessante Beobachtung: Weil $s(t) = S(t)$ für alle t gilt, erhalten wir für $t = \pi/2$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\pi/2)}{j} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Tatsächlich kann man mit Fourierreihen viele solcher zahlentheoretischer Identitäten beweisen.

23.23. Satz. Es seien $f \in L^2_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Existieren die Grenzwerte

$$f(t^{\pm}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t \pm h)$$

und sind für $0 < h < \delta$

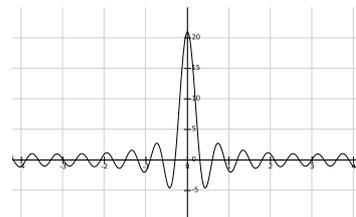
$$\frac{f(t+h) - f(t^+)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{f(t-h) - f(t^-)}{h}$$

beschränkt, so konvergiert die Fourierreihe von f in t gegen den Mittelwert $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

Zum Beweis des Satzes benutzen wir den 'Dirichlet-Kern' D_N

23.24. Definition. $D_N(t) = \sum_{k=-N}^N e^{ikt} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

Beachte: Es ist $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 2\pi$ und, wegen der Symmetrie, $\int_0^{\pi} D_N(t) dt = \pi$. Nebenan der Graph von D_{10} .



Beweis von Satz 23.23.

(i) Beobachtung. Es sei $f \in L^2_{2\pi}$ und \hat{f}_k der k -te Fourierkoeffizient von f . Dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(t-s) ds = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds e^{ikt} = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikt} =: s_N^f(t),$$

wobei wir mit s_N^f die N -te Partialsumme der Fourierreihe bezeichnen.

(ii) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(t-s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) D_N(s) ds, \text{ und} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(t-s) D_N(s) ds &\stackrel{u=-s}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t+u) D_N(-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t+u) D_N(u) du. \end{aligned}$$

Mit der letzten Gleichung aus 23.24 folgt, dass für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$s_N^f(t) - \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t+s) + f(t-s) - 2\alpha) D_N(s) ds.$$

(iii) Nun sei $0 < \delta < \pi$. Dann gilt für beliebiges $g \in L^2_{2\pi}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} g(s) D_N(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{g(s)}{\sin(s/2)} \sin((N + \frac{1}{2})s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{g(s)}{\sin(s/2)} (\sin(Ns) \cos(s/2) + \cos(Ns) \sin(s/2)) ds \end{aligned}$$

Wir können die auf $[\delta, \pi]$ gegebenen Funktionen $g(s) \cos(s/2)/\sin(s/2)$ und g durch Null zu Funktionen aus $L^2_{2\pi}$ fortsetzen. Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma konvergieren die letzten Integrale daher gegen Null für $N \rightarrow \infty$.

(iv) Nun wähle $0 < \delta < \pi$ so klein, dass $\frac{f(t \pm h) - f(t^{\pm})}{h}$ beschränkt ist für $0 < h \leq \delta$. Dann ist für $\alpha = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$

$$s_N^f(t) - \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} ((f(t+s) - f(t^+)) + (f(t-s) - f(t^-))) D_N(s) ds.$$

Wir teilen das Integral auf in das Integral über $[0, \delta]$ und das über $[\delta, \pi]$ mit dem δ aus der Voraussetzung.