22. Anwendungen

Der Transformationssatz. In diesem Abschnitt beweisen wir die Verallgemeinerung der aus Analysis 1 bekannten Substitutionsregel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Zentrale Beobachtung ist Lemma 22.2, dass sich unter linearen Abbildungen das Maß mit dem Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix ändert.

Wir bezeichnen mit m das Lebesgue-Maß. Zunächst beobachten wir, dass unter lokal lipschitzstetigen Abbildungen Nullmengen in Nullmengen abgebildet werden:

22.1. Lemma. *Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $m(E) = 0$ und $T : E \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit*

$$\limsup_{y\in E, y\to x} \frac{\|T(x) - T(y)\|}{\|x - y\|} < \infty; \quad x \in E.$$

Dann ist $m(T(E)) = 0$.

Beweis. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ können wir mit $\|y\| = \|y\|_\infty = \max\{|y_j| : j = 1, \dots, n\}$ arbeiten. Dann ist die 'Kugel' $B(x, r)$ der in x zentrierte Würfel mit Kantenlänge $2r$.

Fixiere $k, \rho \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Setze

$$F = F_{k,\rho} = \left\{ x \in E : \frac{\|T(x) - T(y)\|}{\|y - x\|} \le k \text{ für alle } y \in B\left(x, \frac{1}{\rho}\right) \cap E \right\}.$$

Da $m(E) = 0$ ist, kann man F durch offene 'Kugeln' $B_j = B(x_j, r_j)$, $j = 1, 2, \dots$, mit $x_j \in F$ und $r_j < \frac{1}{\rho}$ überdecken, wobei $\sum_j m(B_j) < \varepsilon$ gilt. (Weil das äußere Maß von E Null ist, können wir E durch abzählbar viele offene Mengen U_j (o.B.d.A. Würfel der Kantenlänge $< 1/(3\rho)$ überdecken können, so dass $\sum m(U_j) < \varepsilon/2^n$. Ist nun $U_j \cap F \ne \emptyset$, so überdecke U_j durch eine 'Kugel' $B(x_j, r_j)$ wie oben. Da sich die Kantenlänge maximal verdoppelt, erhöht sich dabei das Gesamtvolumen höchstens um den Faktor 2^n.)

Für $x \in F \cap B_j$ ist $\|x_j - x\| < r_j < \frac{1}{\rho}$, $x_j \in F$. Folglich ist

$$\|T(x_j) - T(x)\| \le k\|x_j - x\| < kr_j$$

und daher

$$\begin{aligned} T(F \cap B_j) &\subseteq B(T(x_j), kr_j), \text{ also} \\ T(F) &\subseteq \bigcup B(T(x_j), kr_j). \end{aligned}$$

Weil $m(B(T(x_j), kr_j)) = (2kr_j)^n$ ist, ist

$$m(T(F)) \le \sum m(B(T(x_j), kr_j)) = k^n \sum m(B_j) < k^n \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt, dass $T(F)$ messbar ist mit $m(T(F)) = 0$. Da $E = \bigcup_{k,\rho} F_{k,\rho}$ ist, schließen wir, dass $m(T(E)) = 0$. $\triangleleft$

22.2. Lemma. *Es sei T eine lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede Borelmenge E:*

$$m(T(E)) = |\det T|\, m(E).$$

Beweis. Durch $E \mapsto m(T(E))$ wird ein Maß auf den Borelmengen definiert, ebenso durch $E \mapsto |\det T|\, m(E)$. Nach Satz 21.16 genügt es zu zeigen, dass sie auf allen endlichen Intervallen übereinstimmen. Wir reduzieren die Aufgabe:

(i) Da das Lebesguemaß sich nicht ändert, wenn man die Menge verschiebt, können wir annehmen, dass E ein Intervall ist, das mit einer Ecke im Ursprung liegt.

(ii) Jede Seitenfläche von I ist eine Nullmenge, vgl. 19.26. Das Bild einer Seitenfläche unter einer linearen Abbildung ist ebenfalls eine Nullmenge nach Lemma 22.1.

(iii) Wir können daher annehmen, dass $I = \{x : 0 \le x_j < c_j\}$ ist, $c_j > 0$.

(iv) Sind T_1 und T_2 zwei lineare Abbildungen, und gilt die Aussage für T_1 und T_2, so auch für $T_1 \circ T_2$ (Multiplikativität der Determinante).

(v) Jede lineare Abbildung ist Komposition von Operatoren von einem der folgenden drei Typen:

(a) Permutationen

(b) Matrizen der Form $\operatorname{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

(vi) Unter Permutationen geht das Intervall in eines mit demselben Maß über. Da eine Permutation Determinante ± 1 hat, stimmt die Aussage.

(vii) Eine Diagonalmatrix der obigen Form hat Determinante α. Sie wirkt auf das Intervall dadurch, dass die x_1-Richtung um den Faktor α gestreckt wird. Das Volumen des neuen Intervalls unterscheidet sich also um den Faktor $|\alpha|$. Daher gilt auch hier die Behauptung.

(viii) Da wir nun wissen, dass die Behauptung für Diagonalmatrizen richtig ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $c_1 = \ldots = c_n = 1$. Für T vom Typ (c) ist dann

$$T(I) = \{x : x_1 \le x_2 \le x_1 + 1;\ 0 \le x_j \le 1 \text{ für } j \ne 2\}.$$

Setzt man $S_1 = \{x \in T(I) : x_2 \le 1\}$ und $S_2 = T(I) \setminus S_1$, so ist $m(T(I)) = m(S_1) + m(S_2)$. Andererseits ist I die disjunkte Vereinigung von S_1 und der um 1 in Richtung e_2 verschobenen Menge S_2: $I = S_1 \cup (S_2 - e_2)$, so dass

$$m(T(I)) = m(S_1) + m(S_2) = m(S_1) + m(S_2 - e_2) = m(I) = |\det T| \cdot m(I).$$

$\triangleleft$

22.3. Satz (Transformationssatz). *Es seien V, W offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $T : V \to W$ ein C^1-Diffeomorphismus (d.h. T ist invertierbar und $T, T^{-1} \in C^1$). Dann gilt für jedes $f \in L^1(W)$:*

(a) *Die Funktion $x \mapsto (f \circ T)(x)|\det T(x)|$ ist in $L^1(V)$ und*

(b) $\int_W f(y)\, dy = \int_V f(T(x))\, |\det T'(x)|\, dx.$

Bemerkung. Es geht mit (etwas) weniger als C^1, s. Rudin, Real and Complex Analysis. 7.26.

Beweis. Wir gehen in Schritten vor und schreiben $J(x) = |\det T'(x)|$.

1. Schritt. Es genügt, den Satz für den Fall $f = \chi_A$ mit einer messbaren Menge A zu beweisen. Er gilt dann für alle messbaren einfachen Funktionen und – wegen des Satzes über monotone Konvergenz – für alle nichtnegativen Funktionen. Mit $f = f^+ - f^-$ folgt die Aussage für alle f.

Nun ist jede Lebesgue-messbare Menge die disjunkte Vereinigung aus einer Borelmenge und einer Nullmenge. Für eine Nullmenge N ist nach Lemma 22.1 auch $T^{-1}(N)$ eine Nullmenge und somit

$$\int_W \chi_N\, dy = 0 = \int_V \chi_{T^{-1}(N)} \cdot J\, dx = \int_V \chi_N \circ T \cdot J dx.$$

Also brauchen wir nur $f = \chi_A$, A Borelmenge, zu betrachten. Da

$$A \mapsto \int_W \chi_A \, dy \text{ und } A \mapsto \int_V (\chi_A \circ T)(x)\, J(x)\, dx = \int_V \chi_{T^{-1}(A)}(x)\, J(x)\, dx$$

beides Maße auf den Borelmengen sind (die abzählbare Additivität folgt aus der Relation $T^{-1}(\bigcup A_j) = \bigcup T^{-1}(A_j)$ und Lemma 20.14), können wir uns nach Lemma 21.16 auf den Fall beschränken, dass $A = I$ ein Intervall ist.

2. Schritt. Sind $T_1 : V \to W_1$ und $T_2 : W_1 \to W$ zwei C^1-Diffeomorphismen mit $T = T_2 \circ T_1$, so gilt die Transformationsformel für T, sofern sie für T_1 und T_2 gilt. (Klar)

3. Schritt. Der Satz ist richtig, wenn T eine affin-lineare Transformation ist, d.h. $T(x) = x_0 + Lx$ mit konstantem linearem L.

Dazu: Hier ist $J = |\det T'| \equiv |\det L|$. Ist I ein Intervall und $E = T^{-1}(I \cap W)$, so ist

$$\begin{aligned}\int_W \chi_I dy &= m(I \cap W) = m(T(E)) = m(x_0 + L(E)) \overset{\text{transl.inv.}}{=} m(L(E)) \\ &\overset{22.2}{=} \int \chi_{T^{-1}(I\cap W)}\, |\det L|\, dx = \int_V \chi_I \circ T \cdot J\, dx\end{aligned}$$

(zur letzten Gleichung: $x \in T^{-1}(I \cap W) \Leftrightarrow Tx \in I \cap W \Leftrightarrow Tx \in I$ und $x \in V$).

4. Schritt. Der Satz ist richtig, wenn $n = 1$ ist. Dann ist V abzählbare disjunkte Vereinigung von Intervallen. Es genügt also, den Satz für den Fall $V =]a, b[$ zu beweisen. Wir können annehmen, dass $\det T'$ dort konstantes Vorzeichen hat, o.B.d.A. positiv ist.

Ist $I =]c, d[\subseteq W$, so ist $T^{-1}(I) =]T^{-1}c, T^{-1}d[$, also

$$\int_W \chi_I(y)\, dy = \int_c^d 1\, dy = d - c = \int_{T^{-1}c}^{T^{-1}d} T'(x) dx = \int_V (\chi_I \circ T)(x) J(x)\, dx.$$

5. Schritt. Der Satz ist richtig, wenn n beliebig ist und T folgende Form hat:

$$T(x) = (t(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n),$$

wobei $t \in C^1$ und $\det T'(x) = \frac{\partial t}{\partial x_1} \neq 0$:

Ist $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und ist der x'–Schnitt $V_{x'} = \{x_1 : (x_1, x') \in V\} \neq \emptyset$, so ist $T_1 : x_1 \mapsto t(x_1, x')$ ein C^1-Diffeomorphismus von $V_{x'}$ auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Daher gilt nach Schritt 4:

$$\int_{T_1(V_{x'})} \chi_I(y_1, x') dy_1 = \int_{V_{x'}} (\chi_I \circ T_1)(x_1, x') \Big|\frac{dT_1}{dx_1}(x_1)\Big| dx_1.$$

Mit Fubini folgt:

$$\int_W \chi_I\, dx = \int \left(\int_{T_1(V_{x'})} \chi_I\, dy_1 \right) dx' = \int \left(\int_{V_{x'}} (\chi_I \circ T)(x_1, x') J(x) dx_1 \right) dx' = \int_V (\chi_I \circ T) J dx.$$

6. Schritt. Wir sind fertig, wenn wir zeigen, dass zu jedem $x \in V$ eine offene Umgebung V_0 existiert, so, dass $T_{|V_0}$ eine Komposition von endlich vielen Abbildungen der Form ist, wie wir sie in Schritt 3 und Schritt 5 behandelt haben.

Dazu: Indem wir T von links und rechts mit Translationen komponieren können wir $x = T(x) = 0$ annehmen. Ersetzen wir zudem T durch $T'(0)^{-1}T$ (Komposition mit konstanter linearer Abbildung), so haben wir weiterhin $T'(0) = E$, d.h. $\frac{\partial T_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$.

Wir definieren dann

$$v_j : V \to \mathbb{R}^n, \quad v_j(x) = (T_1(x), \dots, T_j(x), x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Aus dem Satz von der inversen Abbildung ergibt sich, dass eine offene Umgebung V_0 von 0 existiert, so dass $v_j|_{V_0}$ für jedes j ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von 0 ist. Nun ist

$$T = v_n = (v_n \circ v_{n-1}^{-1})(v_{n-1} \circ v_{n-2}^{-1}) \dots \circ (v_2 \circ v_1^{-1})v_1;$$

dabei hat für jedes j die Abbildung $v_j v_{j-1}^{-1}$ die Gestalt

$$x \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, t_j(x), x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Durch Komposition von links und rechts mit einer Permutation geht diese Abbildung in eine von der im Schritt 5 über. $\lhd$

22.4. Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$. Es sei $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ und

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Wir wollen $\int_{D_R} f(x, y)\, d(x, y)$ berechnen, f messbar. Klar: Das Integral ändert sich nicht, wenn wir D_R durch $D_R \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\} =: W$ ersetzen.

Nun definiere

$$T : \underbrace{]0, R[\times]0, 2\pi[}_{=:V} \to W$$

durch

$$T(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

Dann sind V, W offene Mengen und $T : V \to W$ ist bijektiv. Ferner ist

$$T'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\det T'(r, \varphi) = r > 0 \quad \forall (r, \varphi) \in V.$$

Insbesondere ist T' überall auf V invertierbar, folglich T^{-1} sogar stetig differenzierbar, da $(T^{-1})'(x) = (T'(T^{-1}(x)))^{-1}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{D_R} f(x, y)\, d(x, y) &= \int_V f(T(r, \varphi)) r\, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi\, dr. \end{aligned}$$

22.5. Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$. Es sei $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ und $B_R = B(0, R)$. Wir betrachten

$$T :]0, R[\times]0, 2\pi[\times] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\overset{\text{bijektiv}}{\to} W = B_R \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0 \right\},$$

definiert durch

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}. \text{ Dann ist} \\ T'(r, \varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\det T'(r,\varphi,\vartheta) = r^2\cos\vartheta > 0$$

auf W, somit $T^{-1} \in C^1$. Es folgt:

$$\int_{B_R} f(x,y,z)\,d(x,y,z) =$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta) r^2 \cos\vartheta \,d\vartheta\,d\varphi\,dr$$

22.6. Definition. Es sei M messbare Menge bzgl. des Maßes μ. Wir setzen

$$\mathrm{vol}_\mu(M) := \mu(M) = \int \chi_M(x)\,d\mu.$$

Ohne Angabe von μ meinen wir das Lebesgue-Maß.

22.7. Rotationssymmetrische Körper. Es sei $f : [a,b] \to [0,\infty[$ integrierbar und

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b,\ 0 \le x^2+y^2 \le f(z)^2\}.$$

Dann ist mit ‚Zylinderkoordinaten' in $\mathbb{R}^3$ (=Polarkoordinaten für x,y, unverändertes z)

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\,K &= \int \chi_K(x,y,z)\,d(x,y,z)\\
&= \int_a^b \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \chi_{\{r^2\le f(z)^2\}} r\,d\varphi\,dr\,dz = 2\pi \int_a^b \int_0^{f(z)} r\,dr\,dz\\
&= 2\pi \int_a^b \frac{f(z)^2}{2}\,dz = \pi \int_a^b f(z)^2\,dz
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes. Es gilt folgende Charakterisierung:

22.8. Satz. *Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf den Borelmengen, das dem Einheitswürfel das Maß 1 zuordnet, so stimmt μ mit dem Lebesgue-Maß überein.*

Beweis. (Skizze) Nach Lemma 21.16 müssen wir lediglich zeigen, dass für jedes endliche Intervall $\mu(I) = m(I)$ gilt.

Dazu beweist man zunächst, dass ein Intervall der Dimension $< n$ bzgl. μ wie auch m eine Nullmenge ist. Dann zeigt man, dass wegen der Translationsinvarianz und der Additivität ein Würfel von Kantenlänge $1/k$, $k \in \mathbb{N}$, das Volumen k^{-n} bzgl. beider Maße hat. Damit schließt man mit $\sigma-$Additivität auf beliebige Intervalle. $\triangleleft$

L^p-**Räume.** Im Folgenden sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum.

22.9. Bemerkung. Man kann die Begriffe der Lebesgue-Messbarkeit und -Integrierbarkeit auch für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{C}^m$ verwenden. Man fordert dann, dass jede Komponente messbar/integrierbar ist.

22.10. Definition. Es sei $1 \le p < \infty$ und $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir schreiben $f \in L^p(X)$ (bzw. $L^p(X,\mu)$), falls f messbar ist und $\int |f(x)|^p\,d\mu < \infty$ ist. Wir setzen dann

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Wir schreiben $f \in L^\infty(X)$, falls es eine Nullmenge gibt, außerhalb derer f beschränkt ist. Man setzt

$$\|f\|_\infty = \inf\{r : |f(x)| \le r \text{ für fast alle } x\}.$$

Man nennt $\|f\|_\infty$ auch das wesentliche Supremum von f.

Beachte: Es ist auch $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ f.ü., da

$$\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_n \left\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\right\} = \text{Vereinigung von Nullmengen}$$

22.11. Konvexe Funktionen.

(a) Erinnerung: Eine Funktion $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$, $\infty \leq a < b \leq +\infty$, heißt konvex, falls

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

(b) Es gilt: φ ist konvex genau dann, wenn

(i) $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ für $a < s < t < u < b$ (dies steht im wesentlichen im Beweis von Satz 7.26) oder

(ii) φ' monoton wachsend (falls φ zusätzlich differenzierbar ist), s. Satz 7.26, oder

(iii) $\varphi'' \geq 0$ (falls φ zusätzlich zweimal differenzierbar ist), s. Folgerung 7.27.

(c) Konvexe Funktionen auf offenen Intervallen sind stetig (stimmt nicht für abgeschlossene Intervalle!).

Beweis von (c). Wähle $a < s < x < y < t < b$. Indem man (i) auf das Tripel (x, y, t) anwendet und zum infimum über $t > y$ übergeht, erhält man, dass

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \inf_t \frac{\varphi(t)-\varphi(y)}{t-y} =: \beta_y,$$

Indem man (i) auf das Tripel (s, x, y) anwendet und zum supremum über $s < x$ übergeht, erhält man

$$\gamma_x := \sup_s \frac{\varphi(x)-\varphi(s)}{x-s} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}.$$

Folglich ist

$$\gamma_x(y-x) \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq \beta_y(y-x).$$

Dabei wächst γ_x mit x und β_y fällt, wenn y fällt. Dies liefert sofort die Stetigkeit. $\triangleleft$

22.12. Satz: Jensensche Ungleichung. Es sei zusätzlich $\mu(X) = 1$ und $f \in L^1$ mit $a < f(x) < b$ für alle $x \in X$. Dann gilt für jede konvexe Funktion $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$:

$$\varphi\left(\int_X f\,d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f)\,d\mu.$$

Bemerkung: Wegen der Stetigkeit von φ ist $\varphi \circ f$ messbar; u.U. ist jedoch $\varphi \circ f \notin L^1$.

Beweis. Setze $t = \int_X f\,d\mu$. Dann ist $a < t < b$. Setze

$$\beta = \sup_{s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}.$$

Dann ist für $a < s < t$

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \beta$$

und wegen der Konvexität von φ (speziell 22.11(b.i)) für $t < s < b$

$$\beta \leq \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}.$$

In jedem Fall (d.h. für $a < s < b$) gilt also:

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s-t)$$

und somit insbesondere:

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta(f(x) - t).$$

Integration liefert

$$\int_X \varphi \circ f \, d\mu \geq \varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \int_X 1 \, d\mu + \beta \left(\int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\mu \cdot \underbrace{\int_X 1 \, d\mu}_{=1} \right).$$

Das war die Behauptung. ◁

22.13. Definition. Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Die Zahl q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wobei $q = 1$ für $p = \infty$ und $q = \infty$ für $p = 1$ heißt zu p konjugierter Exponent. Es ist stets $1 \leq q \leq \infty$ und $1 < q < \infty$ für $1 < p < \infty$. Speziell: $p = 2 \Leftrightarrow q = 2$.

22.14. Satz. *Es sei* $1 < p < \infty$, q *der konjugierte Exponent und* $f, g : X \to [0, \infty]$ *messbar. Dann gilt:*

(1) $$\int fg \, d\mu \leq \left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\mu\right)^{1/q}$$ *(Hölder-Ungleichung) und*

(2) $$\left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\mu\right)^{1/p}$$ *(Minkowski-Ungleichung).*

Beweis. (1) Es seien A und B die Faktoren auf der rechten Seite. Ist $A = 0$ so ist $f = 0$ f.ü., also auch $fg = 0$ f.ü. und damit nichts zu zeigen. Ist $A = +\infty$ und $B \neq 0$, so ist ebenfalls nichts zu zeigen. Analoges gilt für B. Wir können also $F = \frac{f}{A}$ und $G = \frac{g}{B}$ definieren. Dann ist

$$\int F^p \, d\mu = 1 = \int G^q \, d\mu.$$

Ist $x \in X$ mit $0 < F(x) < \infty$ und $0 < G(x) < \infty$, so bestimmen wir s, t mit $F(x) = e^{s/p}$ und $G(x) = e^{t/q}$. Da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist, folgt aus der Konvexität der Exponentialfunktion, dass

$$e^{s/p + t/q} \leq e^s/p + e^t/q,$$

also

$$F(x)G(x) \leq \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}.$$

Diese Ungleichung gilt trivialerweise auch, falls $F(x) = 0$ oder $G(x) = 0$. Die Menge, wo F oder G den Wert $+\infty$ annehmen, ist eine Nullmenge. Integration der Ungleichung zeigt, dass

$$\int FG \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. ◁

Um (2) zu zeigen, schreibe

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

Die Höldersche Ungleichung liefert dann

$$\int f(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq \left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} \, d\mu\right)^{1/q}$$

und ebenso

$$\int g(f+g)^{p-1} \, d\mu \leq \left(\int g^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} \, d\mu\right)^{1/q}$$

Addition ergibt wegen $(p-1)q = p$

$$\int (f+g)^p \, d\mu \le \left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/q} \left(\left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\mu\right)^{1/p}\right).$$

Die Behauptung ergibt sich nun, indem wir durch $C = \left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/q}$ dividieren. Beachte dazu, dass wir $0 < C < \infty$ annehmen können:

(i) Aus $C = 0$ folgt $f = g = 0$ f.ü., also ist nichts zu zeigen.

(ii) Wegen der Konvexität der Funktion $t \mapsto t^p$ ist

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}(f^p + g^p)$$

Aus $C = \infty$ folgt daher, dass auch die rechte Seite von (2) unendlich ist; wieder ist nichts zu zeigen.

◁

22.15. Satz. *Es sei $1 \le p \le \infty$ und q der konjugierte Exponent.*

(a) *Für $f, g \in L^p(X)$ ist $f + g \in L^p(X)$ und $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski).*

(b) *Für $f \in L^p(X)$ und $g \in L^q(X)$ ist $fg \in L^1(X)$ und $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$, (Hölder).*

Beweis. Für $1 < p < \infty$ folgen beide Aussagen sofort aus Satz 22.14. Ist $p = 1$, so folgt (a) direkt aus 20.23. Für $p = \infty$: Es ist nach 22.10 $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ und $|g(x)| \le \|g\|_\infty$ fast überall, somit $|f(x) + g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ f.ü..

(b) ist für $p = 1$ und $p = \infty$ offensichtlich, weil $|f(x)g(x)| \le |f(x)| \|g\|_\infty$ f.ü.. ◁

22.16. Satz. *Für $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(X)$ ein Vektorraum. Identifizieren wir Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, so ist $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum (d.h. ein vollständiger normierter Raum).*

Beweis. Abgesehen von der Vollständigkeit haben wir schon alles gezeigt. Es sei also (f_k) eine Cauchyfolge in L^p und zunächst $p < \infty$.

Wir wählen eine Teilfolge mit

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_p \le 2^{-j}$$

und setzen

$$g_l = \sum_{j=1}^{l} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|, \quad g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|.$$

Aus der Minkowski-Ungleichung folgt, dass $\|g_l\|_p \le 1$ ist. Ferner zeigt monotone Konvergenz

$$\|g\|_p^p = \int g^p \, d\mu = \int \lim(g_l^p) \, d\mu = \lim \int g_l^p \, d\mu = \lim \|g_l\|_p^p \le 1.$$

Insbesondere ist die Reihe für g fast überall absolut konvergent. Somit konvergiert auch

$$f_{k_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$$

fast überall. Wir bezeichnen mit f den Grenzwert, wo er existiert, und setzen ansonsten $f = 0$. Dann ist

$$f(x) = \lim f_{k_j}(x) \quad \text{fast überall.}$$

Wir zeigen nun, dass $f_k \to f$ in L^p. Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $\|f_l - f_k\|_p < \varepsilon$ für alle $k, l \geq N$. Dann liefert das Lemma von Fatou, dass

$$\int |f - f_k|^p \, d\mu = \int \lim_{j\to\infty} |f_{k_j}(x) - f_k(x)|^p \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int |f_{k_j}(x) - f_k(x)|^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

Es folgt, dass $f - f_k \in L^p(X)$ ist und somit auch f, da $f = f_k + (f - f_k)$. Ferner zeigt die Ungleichung, dass $\|f - f_k\|_p \to 0$.

Für den Fall $p = \infty$ definiert man

$$N_k = \{x : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \quad \text{und} \quad N_{kl} = \{x : |f_k(x) - f_l(x)| > \|f_k - f_l\|_\infty\}.$$

Alle sind Nullmengen, ebenso ihre Vereinigung, N. Außerhalb von N ist (f_k) eine Folge beschränkter Funktionen, die gleichmäßig konvergiert. Wie im 1. Semester sieht man, dass sie einen Grenzwert f hat, der ebenfalls eine beschränkte Funktion ist. Setzt man $f = 0$ auf N, so folgt, dass $f \in L^\infty$ und $f_k \to f$ in L^∞. Im Detail: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 so dass $\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$ für alle $k, l \geq n_0$. Nach Definition gilt dann $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ für $x \notin N$. Insbesondere ist für jedes $x \notin N$ die Folge $(f_k(x))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, hat also einen Grenzwert $f(x)$. Es folgt für $x \notin N$, $l \geq n_0$:

$$|f(x) - f_l(x)| = \lim |f_k(x) - f_l(x)| \leq \|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon.$$

Somit konvergiert die Folge (f_k) in der ∞-Norm gegen f, und f ist messbar als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen. Weil für beliebiges $l \geq n_0$ gilt: $\|f\|_\infty \leq \|f_l\|_\infty + \|f - f_l\|_\infty \leq \|f_l\|_\infty + \varepsilon$, ist f in L^∞. $\lhd$.

Der Beweis des obigen Satzes enthält ein Resultat, das selbst auch interessant ist:

22.17. Satz. *Ist $1 \leq p \leq \infty$ und (f_k) eine Folge in L^p mit Grenzwert f, so enthält (f_k) eine Teilfolge, die punktweise f.ü. gegen f konvergiert.*

Achtung. *In der Regel konvergiert die Gesamtfolge (f_k) nicht punktweise f.ü..*

Für den folgenden Satz sei $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$.

22.18. Satz. *Es sei $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Dann findet man eine stetige Funktion g_ε, die außerhalb einer kompakten Menge konstant Null ist und für die $\|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$ gilt.*

Achtung: *Für $p = \infty$ ist diese Aussage falsch!.*

Beweis. (Skizze) Es sei χ_{I_N} die charakteristische Funktion von $I_N = [-N, N]^n$. Dominierte Konvergenz zeigt, dass $f - \chi_{I_N} f \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Wir können uns also auf I_N, N groß, beschränken. Indem man f in $f^\pm$ zerlegt und diese Funktionen durch einfache messbare Funktionen nähert, sieht man, dass es genügt, zu jeder messbaren Menge $M \subseteq I_N$ eine Folge stetiger Funktionen h_k zu finden, die außerhalb I_{2N} verschwindet und $\chi_M - h_k \to 0$ in L^p erfüllt.

Nun existiert zu $M \subseteq I_N$ eine Folge abgeschlossener Mengen $A_j \subseteq M$ mit $\mu(M \setminus A_j) \to 0$, d.h. $\chi_M - \chi_{A_j} \to 0$ in L^p. Wir können also annehmen, dass $M = A_j$ abgeschlossene Teilmenge von I_N, somit kompakt ist.

Wir setzen dann

$$g_k(x) = \frac{1}{1 + k \, \mathrm{dist}\,(x, M)}.$$

Dann ist

(i) $0 \leq g_k \leq 1$

(ii) $g_k(x) = 1 \Leftrightarrow x \in M$

(iii) $g_k(x) \to 0$ für $x \notin M$ und $k \to \infty$.

Schließlich definieren wir $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t \le 1/2; \\ 2(t - 1/2); & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Für $h_k = \varphi \circ g_k$ gilt dann

(i) $0 \le h_k \le 1$

(ii) $h_k(x) = 1 \Leftrightarrow x \in M$;

(iii) $h_k(x) \searrow 0$ für $k \to \infty$, falls $x \notin M$

(iv) $h_k(x) = 0$, falls $x \notin [-N-2, N+2]^n$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt dass $h_k - \chi_M \to 0$ in L^p. $\triangleleft$

22.19. Bemerkung. Man kann in Satz 22.18 sogar 'stetig' durch 'C^∞' ersetzen.