21. Integration auf Produkträumen

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Wir wollen daraus eine σ-Algebra und ein Maß auf $X \times Y$ konstruieren. Zunächst zur σ-Algebra, der wir schon in 21.1(c) begegnen. Literatur dazu: Rudin, Real and Complex Analysis

21.1. Definition.

(a) Ein messbares Rechteck in $X \times Y$ ist eine Menge der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$.

(b) Eine endliche disjunkte Vereinigung messbarer Rechtecke heißt elementare Menge. Bezeichnung: $\mathcal{E}$.

(c) Mit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ bezeichnen wir die kleinste σ-Algebra über $X \times Y$, die alle messbaren Rechtecke enthält. (Achtung: Dies ist nicht das übliche kartesische Produkt.)

(d) Eine Familie von Mengen $\mathcal{K}$ nennt man eine monotone Klasse, falls gilt

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{K}, \text{ und } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \quad &\Rightarrow \bigcup A_j \in \mathcal{K}; \\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{K}, \text{ und } A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \quad &\Rightarrow \bigcap A_j \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Klar: Jede σ-Algebra ist eine monotone Klasse.

(e) Es sei $E \subseteq X \times Y$ und $x \in X$, $y \in Y$. Wir nennen

$$\begin{aligned} E_x &= \{y : (x, y) \in E\} \text{ den } x-\text{Schnitt von } E \\ E^y &= \{x : (x, y) \in E\} \text{ den } y-\text{Schnitt von } E. \end{aligned}$$

21.2. Lemma. *$\mathcal{E}$ ist ein Ring.*

Beweis. (i) Die Differenz zweier Rechtecke $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2))$ ist disjunkte Vereinigung zweier Rechtecke.

(ii) Der Durchschnitt zweier Rechtecke $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ ist ein Rechteck.

(iii) Die Vereinigung: $R_1 \cup R_2 = (R_1 \setminus (R_1 \cap R_2)) \cup (R_2 \setminus (R_1 \cap R_2)) \cup (R_1 \cap R_2)$ (disjunkt) ist Vereinigung von Rechtecken.

Damit ist mit $P, Q \in \mathcal{E}$ auch $P \setminus Q$ und $P \cup Q$ in $\mathcal{E}$. $\triangleleft$

21.3. Lemma. *Ist $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, so ist $E_x \in \mathcal{B}$ und $E^y \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Es sei Ω die Menge aller $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, für die gilt, dass $E_x \in \mathcal{B}$. Offensichtlich enthält Ω alle messbaren Rechtecke; Ω ist auch eine σ-Algebra, wie man leicht sieht ($(U \setminus V)_x = U_x \setminus V_x$; $(\bigcup U_k)_x = \bigcup (U_k)_x$; für E^y analog). Da $\Omega \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist und $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ per Definition die kleinste σ-Algebra ist, die alle messbaren Rechtecke enthält, folgt, dass $\Omega = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. $\triangleleft$

21.4. Satz. *$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist die kleinste monotone Klasse, die alle elementaren Mengen enthält.*

Beweis. Es sei $\mathcal{K}$ die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{E}$ enthält. Da $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ als σ-Algebra ebenfalls monoton ist und $\mathcal{E}$ enthält, ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{K}$ auch eine σ-Algebra ist. Dann folgt Gleichheit.

Dazu: Für festes $P \subseteq X \times Y$ setze

$$\Omega(P) = \{Q \subseteq X \times Y : P \setminus Q \in \mathcal{K}, Q \setminus P \in \mathcal{K}, P \cup Q \in \mathcal{K}\}.$$

Dann gilt:

(i) $Q \in \Omega(P) \Leftrightarrow P \in \Omega(Q)$

(ii) $\Omega(P)$ ist monoton, da $\mathcal{K}$ monoton.

(iii) Ist $P \in \mathcal{E}$, so ist $Q \in \Omega(P)$ für alle $Q \in \mathcal{E}$, weil $\mathcal{E}$ ein Ring ist. Somit ist $\mathcal{E} \subseteq \Omega(P)$, wegen der Monotonie also $\mathcal{K} \subseteq \Omega(P)$.

(iv) Ist nun $Q \in \mathcal{K}$, so ist $Q \in \Omega(P)$ für $P \in \mathcal{E}$, also $P \in \Omega(Q)$, also nach (iii) $\mathcal{K} \subseteq \Omega(Q)$.

(v) Somit gilt: Sind P und Q in $\mathcal{K}$, so ist $P \setminus Q \in \mathcal{K}$ und $P \cup Q \in \mathcal{K}$.

(vi) Sind nun $P_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, 2, \dots$, und ist $P = \bigcup P_j$, so setze $Q_k = \bigcup_{j=1}^k P_j$. Dann ist $Q_k \in \mathcal{K}$ nach (v) und $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \dots$. Da $\mathcal{K}$ monoton ist, ist $P = \bigcup Q_k \in \mathcal{K}$.

Somit ist $\mathcal{K}$ ein σ-Ring. Da $X \times Y$ ein Rechteck ist, ist $\mathcal{K}$ eine σ-Algebra. $\triangleleft$

21.5. Definition. Es sei $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. Wir definieren:

$$f_x : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ durch } f_x(y) = f(x, y);$$
$$f^y : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ durch } f^y(x) = f(x, y).$$

21.6. Lemma. *Es sei $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbar (bzgl. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$). Dann gilt*

(a) *Für jedes $x \in X$ ist f_x auf Y messbar bzgl. $\mathcal{B}$.*

(b) *Für jedes $y \in Y$ ist f^y auf X messbar bzgl. $\mathcal{A}$.*

Beweis. Es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist nach Definition der Messbarkeit

$$Q = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) > c\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Nach 21.3 ist dann für jedes $x \in X, y \in Y$:

$$\begin{aligned} \{y \in Y : f_x(y) > c\} &= Q_x \in \mathcal{B} \text{ und} \\ \{x \in X : f^y(x) > c\} &= Q_y \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Das Produktmaß.

21.7. Definition. Der Maßaum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt σ-endlich, falls es disjunkte Mengen $X_j, j \in \mathbb{N}_0$, in $\mathcal{A}$ gibt mit $\mu(X_j) < \infty$ und $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$.

Dies ist z.B. für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt.

21.8. Annahme. Im Folgenden nehmen wir zusätzlich an, dass X und Y σ-endlich sind.

21.9. Satz. *Es sei $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Wir definieren $\varphi : X \to [0, \infty]$ und $\psi : Y \to [0, \infty]$ durch*

$$\varphi(x) = \nu(Q_x) \quad \psi(y) = \mu(Q^y).$$

Dann ist φ $\mathcal{A}$-messbar, ψ ist $\mathcal{B}$-messbar, und

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu. \tag{1}$$

Wegen $\varphi(x) = \int_Y \chi_Q(x, y) \, d\nu(y)$ und $\psi(y) = \int_X \chi_Q(x, y) \, d\mu(x)$ kann (1) auch in der Form

$$\int_X \left(\int_Y \chi_Q(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_Q(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

geschrieben werden.

Beweis. Es sei $\Omega \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die Familie aller Mengen Q für die der Satz gilt. Wir werden zeigen, dass Ω die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Ω enthält alle messbaren Rechtecke.

(ii) Ω enthält aufsteigende Ketten (d.h. sind $Q_j \in \Omega$, $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \dots$, so ist $Q := \bigcup Q_j \in \Omega$).

(iii) Sind $Q_j, j \in \mathbb{N}$, in Ω und disjunkt, so ist $Q := \bigcup Q_j \in \Omega$.

(iv) Ist $\mu(A) < \infty$ und $\mu(B) < \infty$, und sind $Q_j \in \Omega$ mit $A \times B \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots$, so ist $Q := \bigcap Q_j \in \Omega$.

Zu (i). Ist $Q = A \times B$, so ist $Q_x = B$, falls $x \in A$ und $= \emptyset$, falls nicht. Daher ist $\nu(Q_x) = \nu(B)\chi_A(x)$ und analog $\mu(Q^y) = \mu(A)\chi_B(y)$. Damit sind ϕ und ψ messbar und beide Seiten von (1) haben den Wert $\mu(A)\nu(B)$.

Zu (ii). Analog zu φ und ψ definieren wir φ_j und ψ_j zu Q_j. Sie sind messbar nach Annahme und nichtnegativ. Aus der Additivität von μ bzw. ν folgt, dass $\varphi_j(x) \nearrow \varphi(x)$ und $\psi_j(y) \nearrow \psi(y)$. Der Satz über monotone Konvergenz liefert

$$\int_X \varphi\, d\mu = \lim \int_X \varphi_j\, d\mu = \lim \int_Y \psi_j\, d\nu = \int_Y \psi\, d\nu.$$

Zu (iii). Definiere φ_j und ψ_j wie oben. Dann ist $\varphi = \sum_j \varphi_j$ und $\psi = \sum \psi_j$. Aus Satz 20.24 folgt, dass

$$\int_X \varphi\, d\mu = \sum_j \int_X \varphi_j\, d\mu = \sum_j \int_Y \psi_j\, d\nu = \int_Y \psi\, d\nu.$$

Zu (iv). Wir definieren φ_j und ψ_j wie oben und zeigen, dass

$$\varphi_j(x) \to \varphi(x) \quad \text{und} \quad \psi_j(y) \to \psi(y): \tag{2}$$

Es ist $\chi_{Q_{1x}}(y) \geq \chi_{Q_{2x}}(y) \geq \dots$ mit $\lim \chi_{Q_{jx}}(y) = \chi_{Q_x}(y)$ für alle y. Somit ist die Folge punktweise konvergent und dominiert durch $\chi_{Q_{1x}} \in L^1(Y)$. Es folgt mit dominierter Konvergenz, dass

$$\lim \varphi_j(x) = \lim \int_Y \chi_{Q_{jx}}\, d\nu = \int_Y \chi_{Q_x}\, d\nu = \varphi(x).$$

Analog für ψ. Nun wenden wir den Satz von der dominierten Konvergenz ein zweites Mal an: Wir haben punktweise Konvergenz nach (2), und es ist $\varphi_j \leq \nu(B)\chi_A \in L^1(X)$, $\psi_j \leq \mu(A)\chi_B \in L^1(Y)$. Der Satz von der dominierten Konvergenz liefert also

$$\int_X \varphi\, d\mu = \lim_j \int_X \varphi_j\, d\mu = \lim_j \int_Y \psi_j\, d\nu = \int_Y \psi\, d\nu.$$

Es sei nun $X = \bigcup X_j$ (disjunkt) mit $\mu(X_j) < \infty$ und $Y = \bigcup Y_j$ (disjunkt) mit $\nu(Y_j) < \infty$. Für $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ setze $Q_{jk} = Q \cap (X_j \times Y_k)$ und definiere

$$\mathcal{K} = \{Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : Q_{jk} \in \Omega \quad \text{für alle } j, k\}.$$

Nach (ii) und (iv) ist $\mathcal{K}$ monoton; es enthält die messbaren Rechtecke nach (i). Da $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ minimal bzgl. dieser Eigenschaften ist, folgt aus Satz 21.4, dass $\mathcal{K} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Es ist also für jedes $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und alle j, k die Menge Q_{jk} in Ω. Andererseits bilden die Q_{jk} eine disjunkte Zerlegung von Q. Wegen (iii) ist also $Q \in \Omega$. Dies war die Behauptung. $\lhd$.

21.10. Definition. Für $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ definiere

$$(\mu \times \nu)(Q) := \int_X \nu(Q_x)\, d\mu \overset{21.9}{=} \int_Y \mu(Q^y)\, d\nu.$$

Wir nennen $\mu \times \nu$ das Produktmaß auf $X \times Y$. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt durch das folgende Lemma.

21.11. Lemma. *$\mu \times \nu$ ist ein Maß auf $X \times Y$ mit der σ-Algebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, und $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ ist ein σ-endlicher Maßraum.*

Beweis. $\mu \times \nu$ ist offensichtlich eine nichtnegative Mengenfunktion auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Abzählbare Additivität: Sind $Q_1, Q_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen, $Q = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und setzt man

$$\varphi(x) = \nu(Q_x), \quad \varphi_j(x) = \nu(Q_{jx}),$$

so ist wegen der abzählbaren Additivität von ν

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x).$$

Aus 20.24 folgt

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \varphi_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(Q_j).$$

Zur σ-Endlichkeit: Sind X_j und Y_k wie oben, so ist $X \times Y = \bigcup_{jk} (X_j \times Y_k)$ (disjunkt), und

$$(\mu \times \nu)(X_j \times Y_k) = \mu(X_j)\nu(Y_k).$$

$\triangleleft$

21.12. Satz von Fubini. *Es sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ messbar bzgl. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

(a) *Ist $f \geq 0$ (reellwertig) und*

(1) $$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu, \quad \psi(y) = \int_X f^y \, d\mu, \quad x \in X, y \in Y,$$

so ist φ messbar bzgl. $\mathcal{A}$, ψ messbar bzgl. $\mathcal{B}$ und

(2) $$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi \, d\nu.$$

Man schreibt dies auch:

(3) $$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

und nennt die beiden Integrale rechts die iterierten Integrale für f.

(b) (auch **Satz von Tonnelli**) *Ist*

$$\varphi^*(x) = \int_Y |f_x| \, d\nu \quad \text{und} \quad \int_X \varphi^* \, d\mu < \infty,$$

so ist $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

(c) *Ist $f \in L^1(\mu \times \nu)$, so ist $f_x \in L^1(\nu)$ für fast alle $x \in X$ und $f^y \in L^1(\mu)$ für fast alle $y \in Y$. Die durch* (1) *f.ü. defnierten Funktionen φ und ψ liegen in $L^1(\mu)$ bzw. $L^1(\nu)$, und* (2) *bzw.* (3) *gelten.*

Bemerkung: Kombiniert man (b) und (c), so sieht man: Ist f messbar und eines der iterierten Integrale für $|f|$ endlich, so ist $f \in L^1$, und die Identitäten (2) bzw. (3) gelten.

Beweis. (a) Nach Satz 21.9 sind φ und ψ sinnvoll definiert. Ist $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und $f = \chi_Q$, so folgt die Identität (2) unmittelbar aus Definition 21.10 und Satz 21.9. Damit gilt (a) für alle nichtnegativen einfachen messbaren Funktionen. (*)

Ist nun f beliebig, so existiert nach 20.9 eine monoton wachsende Folge messbarer einfacher Funktionen s_k mit $s_k(x,y) \to f(x,y)$. Setze $\varphi_k(x) = \int_Y (s_k)_x \, d\nu$. Wegen $s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ ist auch $(s_1)_x(y) \leq (s_2)_x(y) \leq \ldots$ mit $(s_k)_x(y) \to f_x(y)$ für alle y. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \lim \int_Y (s_k)_x \, d\nu = \lim \varphi_k(x).$$

Ferner ist $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \ldots$. Eine weitere Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz zeigt, dass

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim \int_X \varphi_k \, d\mu. \tag{4}$$

Andererseits gilt wegen (*):

$$\int_X \varphi_k \, d\mu = \int_{X\times Y} s_k(x,y)\, d(\mu\times\nu) \overset{\text{mon.Kvgz}}{\longrightarrow} \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\times\nu). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt nun die erste Identität von (2). Zweite analog.

(b) folgt sofort, wenn man (a) auf $|f|$ anwendet.

(c) Es genügt, reellwertige Funktionen zu betrachten. In diesem Fall definieren wir zu $f^\pm$ die Funktionen $\varphi^\pm$ wie in (1). Nun ist $f \in L^1$ und $f^+ \le |f|$, also $f^+ \in L^1$. Da (a) für f^+ gilt, liegt φ^+ in $L^1(X)$, ebenso φ^-. Insbesondere gilt: $\varphi^\pm(x) < +\infty$ f.ü.. Damit ist $(f^\pm)_x \in L^1(Y)$ für fast alle x. Wegen $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$ folgt, dass $f_x \in L^1(Y)$ für fast alle x. Damit gilt auch

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y (f^+)_x \, d\nu - \int_Y (f^-)_x \, d\nu = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \ \text{ f.ü.},$$

somit $\varphi \in L^1$.

Nun ist nach (a)

$$\int_X \varphi^\pm \, d\mu \ = \ \int_{X\times Y} f^\pm \, d(\mu\times\nu),$$

und daher

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu).$$

Die Aussagen für ψ folgen analog. ◁

Vollständigkeit.

21.13. Bemerkung. Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist vollständig, d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge ist wieder eine Nullmenge. Dies ist bei dem hier konstruierten Produktmaß i. Allg. nicht der Fall. Ist z.B. A eine Nullmenge in $\mathcal{A}$ und B eine nichtmessbare Menge (d.h. $B \notin \mathcal{B}$, so ist $A \times B \subseteq A \times Y$ und $(\mu\times\nu)(A\times Y) = 0$. Die Menge $A\times B$ gehört jedoch nicht zu $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, denn sonst wäre $B = (A\times B)_x \in \mathcal{B}$ nach 21.3.

Man kann jedoch jedes Maß vervollständigen:

21.14. Satz. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{A}^*$ die Menge aller $A \subseteq X$, für die es Mengen $U, V \in \mathcal{A}$ gibt mit $U \subseteq A \subseteq V$ und $\mu(V \setminus U) = 0$. Wir setzen dann $\mu^*(A) = \mu(U)$. Damit ist auch $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ ein Maßraum.*

Beweis. (1) μ ist sinnvoll definiert. Ist nämlich auch $U_1 \subseteq A \subseteq V_1$ und $\mu(V_1 \setminus U_1) = 0$, so ist

$$U \setminus U_1 \subseteq A \setminus U_1 \subseteq V_1 \setminus U_1 \ \text{ und so } \ \mu(U\setminus U_1) = 0.$$

Analog ist $\mu(U_1 \setminus U) = 0$ und somit $\mu(U) = \mu(U_1)$.

(2) $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra: Klar ist, dass $X \in \mathcal{A}^*$. Ist $U \subseteq A \subseteq V$, so ist $X\setminus V \subseteq X \setminus A \subseteq X \setminus U$ und $(X\setminus U)\setminus(X\setminus V) = V \setminus U$. Daher ist $\mu(X\setminus U)\setminus(X\setminus B)) = 0$ und somit $X \setminus A$ in $\mathcal{A}^*$. Rest analog. ◁

21.15. Bemerkung. Man kann entsprechend die Definition der Messbarkeit erweitern: Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, so nennt man eine Funktion messbar auf X, falls

(i) f wenigstens auf einer Menge E mit $\mu(X \setminus E) = 0$ definiert ist und
(ii) f als Funktion auf E messbar ist, d.h. $\{x : f(x) > c\} \cap E \in \mathcal{A}$ für alle c.

Ob f außerhalb von E definiert ist (und wenn ja, wie) spielt bei der Integration keine Rolle.

21.16. Lemma. *Es seien μ_1 und μ_2 Maße auf der σ-Algebra $\mathbb{B}$ der Borelmengen in $\mathbb{R}^n$ und es gelte $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ für jedes endliche Intervall I. Dann ist $\mu_1 = \mu_2$ auf den Borelmengen.*

Beweis. Nach Definition ist $\mathbb{B}$ die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Da jede offene Menge abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, ist $\mathbb{B}$ auch die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Intervalle enthält. Wir setzen für $j = 1, 2, \ldots$:

$$\Omega_j = \{E \in \mathbb{B} : \mu_1(I_j \cap E) = \mu_2(I_j \cap E)\}$$

und zeigen, dass $\Omega_j = \mathbb{B}$ ist. Da $\mathbb{R}^n = \bigcup I_j$ als abzählbare disjunkte Vereinigung von Intervallen I_j dargestellt werden kann ergibt sich, dass für alle $E \in \mathbb{B}$ nach Satz 19.5

$$\mu_1(E) = \lim_j \mu_1(I_j \cap E) = \lim \mu_2(I_j \cap E) = \mu_2(E)$$

gilt.

Dazu: (1) Klar: $\mathbb{R}^n \in \Omega_j$.

(2) Ist $E \in \Omega_j$, so ist auch $\mathbb{R}^n \setminus E$ in Ω_j:

$$\begin{aligned} \mu_1(I_j \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) &= \mu_1((I_j \cap \mathbb{R}^n) \setminus (I_j \cap E)) \\ &\overset{19.4(e)}{=} \mu_1(I_j \cap \mathbb{R}^n) - \mu_1(I_j \cap E) \\ &= \mu_2(I_j \cap \mathbb{R}^n) - \mu_2(I_j \cap E) \\ &= \mu_2(I_j \cap (\mathbb{R}^n \setminus E_)). \end{aligned}$$

(3) Sind $E_1, E_2, \ldots$ paarweise disjunkt, so ist wegen der σ-Additivität von μ_1 und μ_2

$$\mu_1\left(I_j \cap \bigcup E_l\right) = \sum_l \mu_1(I_j \cap E_l) = \sum_l \mu_2(I_j \cap E_l) = \mu_2\left(I_j \cap \bigcup E_l\right).$$

(4) Für jedes offene Intervall I gilt $I \in \Omega_j$, da $I_j \cap I$ ebenfalls ein Intervall ist.

(5) Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass Ω_j unter Durchschnittsbildung abgeschlossen ist. Dann enthält Ω_j nämlich nicht nur die offenen Intervalls, sondern erfüllt zusätzlich auch die Axiome einer σ-Algebra: $\mathbb{R}^n$ ist in Ω_j nach (1); sind E_1, E_2 in Ω_j so ist $E_1 \setminus E_2 = E_1 \setminus (E_1 \cap E_2) = (E_1^c \cup (E_1 \cap E_2))^c$ ebenfalls in Ω_j; schließlich können wir eine nichtdisjunkte Vereinigung leicht disjunkt machen.

Um (5) nachzuweisen, bezeichnen wir mit $\mathcal{D}$ die kleinste Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbb{R}^n$, die alle offenen Intervalle enthält und in der (1)-(3) gelten. Wir zeigen, dass diese unter Durchschnittsbildung stabil (und somit eine σ-Algebra) ist. Da alle Elemente von $\mathcal{D}$ in Ω_j enthalten sind, enthält Ω_j ganz $\mathbb{B}$.

Wir setzen also für $D \in \mathcal{D}$

$$Q(D) = \{D' \in \mathcal{D} : D \cap D' \in \mathcal{D}\}.$$

Dann erfüllt $Q(D)$ ebenfalls (1)-(3):
zu (1): Es ist $\mathbb{R}^n \in Q(D)$, da $D \cap \mathbb{R}^n = D$ in $\mathcal{D}$.
zu (2): Ist $D' \in Q(D)$, so gilt $\mathbb{R}^n \setminus D' \in Q(D)$, denn

$$(\mathbb{R}^n \setminus D') \cap D = D \setminus (D \cap D') = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus D) \cup (D \cap D')),$$

wobei die letzte Identität wegen $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$ für $B \subset A$ gilt und die letzte Menge wegen (2) und (3) zu $\mathcal{D}$ gehört.

zu (3): Es seien $D_1, D_2, \ldots$ disjunkt in $Q(D)$. Dann ist $\bigcup D_j \in Q(D)$, da $(\bigcup D_j) \cap D' = \bigcup(D_j \cap D') \in \mathcal{D}$.

Ist nun I_0 ein Intervall, so gilt für jedes andere offene Intervall $I \in Q(I_0)$, da $I \cap I_0$ wieder ein Intervall ist und daher nach Voraussetzung in $\mathcal{D}$ liegt. Nach Definition von $\mathcal{D}$ folgt, dass $D \in Q(I_0)$ für jedes $D \in \mathcal{D}$. Damit folgt aber $I_0 \in Q(D)$ wegen der Symmetrie der Definition.

Damit enthält $Q(D)$ alle Intervalle und ist unter (1), (2), (3) abgeschlossen. Es folgt, dass $\mathcal{D} \subseteq Q(D) \subseteq \mathcal{D}$.

Damit ist Ω_j für jedes j eine σ-Algebra in $\mathbb{B}$, die alle offenen Intervalle enthält, also $\Omega_j = \mathbb{B}$. $\triangleleft$

21.17. Satz. *Es sei m_j das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^j$, $j = 1, 2, \ldots$; $\mathcal{M}_j$ bezeichne die Lebesgue-messbaren Mengen.*

Ist $n = r + s$ mit $r, s \geq 1$, so ist m_n die Vervollständigung des Produktmaßes $m_r \times m_s$ i.S.v. Satz 21.14. Für die Borelmengen in $\mathbb{R}^n$ und die Produkt-σ-algebra $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$ gilt

$$\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subseteq \mathcal{M}_n.$$

Beweis. Jedes $n-$dimensionale Intervall ist in $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. Da $\mathbb{B}_n$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle Intervalle enthält, ist $\mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. Nun sei $E \subseteq \mathbb{R}^r$ offen. Dann ist $E \times \mathbb{R}^s \in \mathbb{B}_n \subseteq \mathcal{M}_n$. Folglich ist $E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_n$ für alle $E \in \mathbb{B}_r$, denn die Menge $\{E \subseteq \mathbb{R}^r : E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_n\}$ ist eine σ-Algebra.

Da jedes $E \in \mathcal{M}_r$ die Vereinigung von einer Borelmenge und einer Nullmenge ist, s. 19.23, ist auch $E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_n$ für alle $E \in \mathcal{M}_r$, denn (Nullmenge in $\mathbb{R}^r$) $\times \mathbb{R}^s =$ Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Analog ist $\mathbb{R}^r \times F \in \mathcal{M}_n$ für alle $F \in \mathcal{M}_s$. Es folgt, dass $E \times F = (E \times \mathbb{R}^s) \cap (\mathbb{R}^r \times F) \in \mathcal{M}_n$. Somit ist

$$\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subseteq \mathcal{M}_n.$$

Auf jedem Intervall in $\mathbb{R}^n$ stimmt m_n mit $m_r \times m_s$ überein. Nach Lemma 21.16 stimmen m_n und $m_r \times m_s$ daher auf $\mathbb{B}_n$ überein. Damit ist

$$\mathcal{M}_n = \text{ Vervollständigung von } \mathbb{B}_n \text{ bzgl. } m_n = \text{Vervollständigung von } \mathbb{B}_n \text{ bzgl. } m_r \times m_s.$$

$\triangleleft$

21.18. Satz. *Sind $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ zwei vollständige σ-endliche Maßräume, und ist $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*$ die Vervollständigung von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ bzgl. $\mu \times \nu$, so bleiben die Aussagen des Satzes von Fubini gültig, sofern man folgendes beachtet:*

Die Messbarkeit von f_x lässt sich nur für fast alle x zeigen, so dass φ nur f.ü. definiert ist; analog für f^y und ψ.

21.19. Bemerkung. Wir können mit dem Satz von Fubini die mehrdimensionale Lebesgue-Integration auf die eindimensionale zurückzuführen. Ein einfaches Beispiel:

Ist $I = \{x : a_j < x < b_j\}$ ein Intervall (eventuell $a_j = -\infty, b_j = +\infty$) und $f \in L^1(I)$, so ist

$$\int_I f \, dx = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n,$$

wobei man die Integrale von innen nach außen abarbeitet. Auf die Reihenfolge kommt es nicht an.

Der Beweis von Satz 21.18 beruht auf folgenden Lemmata:

21.20. Lemma. *Ist $\mathcal{A}^*$ die Vervollständigung von $\mathcal{A}$ und f messbar bzgl. $\mathcal{A}^*$, so existiert eine bzgl. $\mathcal{A}$ messbare Funktion g mit $f = g$ f.ü..*

Beweis. Ist $f \geq 0$ $\mathcal{A}^*$-messbar, so existiert eine monotone Folge $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer $\mathcal{A}^*$-messbarer einfacher Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Wir setzen $s_0 = 0$ und haben $f = \sum_{j=0}^{\infty}(s_{j+1} - s_j)$. Da jedes s_j eine endliche Linearkombination charakteristischer Funktionen ist, haben wir:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{E_k}(x)$$

für geeignete $c_k > 0$ und $E_k \in \mathcal{A}^*$. Nach Definition gibt es daher Mengen $A_k, B_k \in \mathcal{A}$ mit $A_k \subseteq E_k \subseteq B_k$ und $\mu(B_k \setminus A_k) = 0$. Wir definieren

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{A_k}(x).$$

Diese Funktion ist $\mathcal{A}-$messbar und außerhalb der Nullmenge $\bigcup(E_k \setminus A_k) \subseteq \bigcup(B_k \setminus A_k)$ gleich f. ◁

21.21. Lemma. *Ist h eine $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*-$messbare Funktion mit $h(x, y) = 0$ $(\mu \times \nu)-$fast überall. Dann gilt für fast alle x, dass $h_x(y) = 0$ für fast alle y. Insbesondere ist h_x für fast alle x eine $\mathcal{B}$-messbare Funktion. Analoges gilt für h^y.*

Beweis. Die Menge P aller Punkte in $X \times Y$, für die $h(x, y) \neq 0$ ist, ist $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^*-$messbar mit Maß Null. Folglich existert eine Menge $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit $P \subseteq Q$ und $(\mu \times \nu)(Q) = 0$. Nach Satz 21.9 ist

$$\int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x) = 0,$$

somit $\nu(Q_x) = 0$ für fast alle x (Lemma 20.19(b)), etwa für $x \notin N$. Da $P_x \subseteq Q_x$ und da $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum ist, ist $\nu(P_x) = 0$ für $x \notin N$. Nun ist

$$y \in P_x \Leftrightarrow (x, y) \in P \Leftrightarrow h(x, y) \neq 0 \Leftrightarrow h_x(y) \neq 0,$$

daher $h_x = 0$ f.ü.. Da für $x \notin N$ jede Teilmenge der Nullmenge P_x wegen der Vollständigkeit des Maßes ebenfalls Nullmenge und damit messbar ist, schließen wir, dass h_x $\mathcal{B}$-messbar ist. ◁

21.22. Beweis von 21.18. Wir finden nach 21.20 eine $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$-messbare Funktion g mit $f = g$ fast überall, so dass $h = f - g = 0$ fast überall. Auf g kann man den Satz von Fubini anwenden. Aus 21.21 folgt, dass $f_x = g_x$ für μ-fast alle x und $f^y = g^y$ für ν-fast alle y. Folglich stimmen die iterierten Integrale für f mit denen für g überein, und das Doppelintegral für f mit dem für g. ◁