20. Integration

Grundlagen.

20.1. Definition.

(a) Ein Maß ist eine nichtnegative, abzählbar additive Mengenfunktion.

(b) Ein Maßraum ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge X, einerr σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X und einem auf $\mathcal{A}$ definierten Maß μ.

Unser wesentliches Beispiel für einen Maßraum ist $X = \mathbb{R}^n$ mit der σ-Algebra $\mathcal{A}$ der Lebesgue-messbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß. Es langt, diesen Fall im Auge zu behalten. Es gibt jedoch noch viele weitere Beispiele. Ein einfaches ist $X = \mathbb{Z}$ mit der Potenzmenge $\mathcal{A} = \mathcal{P}$ und dem Zählmaß.

20.2. Definition. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ heißt messbar, falls für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X : f(x) > a\}$ messbar ist.

20.3. Bemerkung. (a) Ebensogut hätte man fordern können

(i) $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ messbar für alle a,

(ii) $\{x \in X : f(x) < a\}$ messbar für alle a oder

(iii) $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ messbar für alle a

(b) Hat man zwei Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, so definiert man Messbarkeit einer Funktion $f : X \to Y$ i. Allg. dadurch, dass man fordert, dass das Urbild jedes Elements von $\mathcal{B}$ ein Element von $\mathcal{A}$ ist. 'Urbilder messbarer Mengen sind messbar'. Die obige Definition stimmt für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ damit überein, wenn man auf $\mathbb{R}$ die σ-Algebra der Borelmengen wählt.

(c) Für Funktionen $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ stimmt das ebenfalls, wenn man die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ um die offenen Umgebungen von $+\infty$ und $-\infty$ ergänzt. Dies sind diejenigen Teilmengen von $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, deren Schnitt mit $\mathbb{R}$ offen ist und die ein Intervall der Form $]a, +\infty]$ bzw. $[-\infty, a[$ enthalten.

Beweis. (a) Schreibe

$$\{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_n \left\{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\} \tag{1}$$

$$\{x : f(x) < a\} = X \setminus \{x : f(x) \geq a\} \tag{2}$$

$$\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_n \left\{x : f(x) < a + \frac{1}{n}\right\} \tag{3}$$

$$\{x : f(x) > a\} = X \setminus \{x : f(x) \leq a\} \tag{4}$$

Dann folgt aus der Messbarkeit der Mengen in Definition 20.2 die von (1), daraus die von (2), daraus die von (3) daraus die von (4) und daraus wieder die von denjenigen in 20.2.

(b) Ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ das Urbild von $]a, \infty[$ messbar, so auch das jedes offenen Intervalls. Da jede offene Menge abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, ist auch das Urbild jeder offenen Menge messbar. Somit bilden die Teilmengen von $\mathbb{R}$, deren Urbild messbar ist, eine σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält. Insbesondere ist das Urbild jeder Borelmenge messbar.

Ist umgekehrt das Urbild jeder Borelmenge messbar, so auch das von $]a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

(c) Analog. ◁

20.4. Lemma. *Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist messbar bzgl. der Maße aus §19.*

Beweis. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ ist das Urbild der offenen Menge $]a, \infty[$ unter f, also offen und damit messbar. $\triangleleft$

20.5. Satz.

(a) *Ist f messbar, so auch $|f|$ (die Umkehrung gilt nicht).*

(b) *Sind f_k messbar, so auch $g_1 = \sup f_k$, $h_1 = \limsup f_k$, $g_2 = \inf f_k, h_2 = \liminf f_k$.*

Insbesondere: Sind f, g messbar, so auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$, noch spezieller auch die Funktionen

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{und} \quad f^- = -\min\{f, 0\}.$$

(c) *Der Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge messbarer Funktionen ist messbar.*

(d) *Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar, und ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch $h(x) = F(f(x), g(x))$ definierte Funktion messbar.*

Insbesondere: $f + g$ und $f \cdot g$ sind messbar.

Beweis. (a) $\{x : |f(x)| < a\} = \{x : f(x) < a\} \cap \{x : f(x) > -a\}$.

(b) $\{x : \sup f_k(x) > a\} = \bigcup_k \{x : f_k(x) > a\}$. Daher ist das Supremum messbarer Funktionen messbar. Analog ist das Infimum messbar.

Ferner ist $h_1 = \inf g_m$, wobei $g_m = \sup\{f_k : k \geq m\}$ ist. Damit ist der Limes superior messbar, analog der Limes inferior.

(c) folgt aus (b), denn für konvergente Folgen ist der Limes gleich dem Limes superior.

(d) Die Menge $G_a = \{(u, v) : F(u, v) > a\}$ ist offen. Wir können sie also in der Form $G_a = \bigcup_{m=1}^\infty I_m$ darstellen, wobei die I_m offene Intervalle in $\mathbb{R}^2$ sind. Schreibe $I_m = \{(u, v) : a_m < u < b_m, c_m < v < d_m\}$. Wegen der Messbarkeit von f und g sind die Mengen

$$\begin{aligned} \{x : a_m < f(x) < b_m\} &= \{x : a_m < f(x)\} \cap \{x : f(x) < b_m\} \\ \{x : c_m < g(x) < d_m\} &= \{x : c_m < g(x)\} \cap \{x : g(x) < d_m\} \end{aligned}$$

messbar und damit auch ihr Durchschnitt; dieser ist jedoch gerade $\{x : (f(x), g(x)) \in I_m\}$. Es folgt, dass $\{x : h(x) > a\} = \{x : (f(x), g(x)) \in G_a\} = \bigcup \{x : (f(x), g(x)) \in I_m\}$ messbar ist. $\triangleleft$

20.6. Achtung. Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit von $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der Messbarkeit von f nicht die Messbarkeit von $f \circ F$!

20.7. Bemerkung. Der Begriff ‚messbar' hängt nicht von dem Maß, sondern nur von der σ-Algebra ab. Es ist also durchaus sinnvoll, etwa von Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu sprechen, also denen, für die für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x : f(x) > a\}$ eine Borel-Menge ist. (Ebenso mit $<, \geq, \leq$.)

20.8. Definition.

(a) Es sei $E \subseteq X$. Die durch

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

definierte Funktion heißt charakteristische Funktion von E.

(b) Eine einfache Funktion ist eine Funktion der Form

$$s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$ und $E_j \subseteq X$ paarweise disjunkt.

Klar: Sind alle E_j messbar, so ist s messbar. Sind die c_j außerdem paarweise verschieden, so sind mit s auch alle E_j messbar, denn dann ist $E_k = \{x : c_k - \varepsilon < s(x) < c_k + \varepsilon\}$, falls $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass kein anderes c_j in $]c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon[$ liegt.

20.9. Satz.

(a) *Zu jeder Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gibt es eine Folge s_j einfacher Funktionen mit $s_j(x) \to f(x)$ für alle x.*

(b) *Ist f zusätzlich messbar, so kann man die s_j messbar wählen.*

(c) *Ist f messbar und ≥ 0, so kann man eine monoton wachsende Folge messbarer nichtnegativer s_j finden.*

Beweis. Ist $f \geq 0$ so definiert man für $k, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k \cdot 2^k$:

$$E_{kj} = \left\{x : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\right\} \text{ und } F_k = \{x : f(x) \geq k\}.$$

Ist f messbar, so auch E_{kj} und F_k. Nun setzen wir

$$s_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_{kj}} + k\chi_{F_k}$$

Die Folge ist monoton wachsend, messbar, falls f messbar ist, und konvergiert punktweise gegen f.

Für beliebiges f schreibt man $f = f^+ - f^-$ und wendet die Konstruktion auf $f^\pm$ an. $\triangleleft$

20.10. Bemerkung. Ist f beschränkt, so konvergiert die obige Folge (s_k) sogar gleichmäßig gegen f.

20.11. Definition.

(a) Es sei $s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}$ nichtnegativ und messbar. Dann setzen wir

$$\int s\, d\mu = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(E_j) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

(b) Ist f messbar und nichtnegativ, so setzt man

$$\int f\, d\mu = \sup \int s\, d\mu,$$

wobei s einfach und messbar ist mit $0 \leq s \leq f$.

(c) Ist f messbar, so setzt man

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

vorausgesetzt, es sind nicht beide Terme rechts unendlich. Die Funktion f heißt integrierbar (im Sinne von Lebesgue), falls beide Terme rechts endlich sind. Wir schreiben dann $f \in L^1(X)$. Will man betonen, über welche Variablen integriert wird so schreibt man z.B. $\int f(x, y)\, d\mu(y)$. Ist μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ so schreibt man einfach dx statt $d\mu$ bzw. $d\mu(x)$.

(d) Ist E messbar, so definieren wir für messbares f:

$$\int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu.$$

Wir schreiben $f \in L^1(E)$, falls $f\chi_E \in L^1(X)$.

20.12. Lemma. *Es sei $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbar, $E \subseteq X$ messbar.*

(a) *Ist f auch beschränkt auf E, und ist $\mu(E) < \infty$, so ist $f \in L^1(E)$.*

(b) *Sind $f, g \in L^1(E)$ und ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in E$, so ist*

$$\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu.$$

(c) *Ist $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in E$ und ist $\mu(E) < \infty$, so ist*

$$a\mu(E) \leq \int_E f\, d\mu \leq b\mu(E).$$

(d) *Ist $f \in L^1(E), c \in \mathbb{R}$, so ist $cf \in L^1(E)$ und*

$$\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu.$$

(e) *Ist f messbar und $\mu(E) = 0$, so ist*

$$\int_E f\, d\mu = 0.$$

(f) *Ist $f \in L^1(E)$ und $A \subseteq E$ messbar, so ist $f \in L^1(A)$.*

Beweis. (a) Ist f beschränkt, etwa $|f| \leq K$, so ist $0 \leq f^+ \leq K$ und $0 \leq f^- \leq K$. Für jede einfache Funktion s mit $0 \leq s \leq f^+$ gilt daher $0 \leq s \leq K$ und somit auch $\int s\, d\mu \leq K\mu(E)$. Analog für f^-. Es folgt, dass sowohl $\int f^+ d\mu$ als auch $\int f^- d\mu$ endlich sind, somit $f \in L^1(E)$.

(b) Ist $f \leq g$, so ist $f^+ \leq g^+$ und $f^- \geq g^-$. Ist also s eine einfache messbare Funktion mit $0 \leq s \leq f^+$, so ist auch $0 \leq s \leq g^+$. Es folgt:

$$\int_E f^+ = \sup\left\{\int_E s d\mu : 0 \leq s \leq f^+\right\} \leq \sup\left\{\int_E s d\mu : 0 \leq s \leq g^+\right\} = \int_E g^+ d\mu.$$

Analog $\int_E f^- d\mu \geq \int_E g^- d\mu$.

(c) Nach (a) wissen wir, dass $f \in L^1(E)$ ist. Weil $a\chi_E \leq f \leq b\chi_E$ ist, folgt die Behauptung nun aus (b).

(d) Ist $c = 0$ so ist nichts zu zeigen. Es sei zuerst $c > 0$. Ist s eine einfache messbare Funktion mit $0 \leq s \leq f^+$ so ist cs ebenfalls einfach mit $0 \leq cs \leq cf^+$. Nun ist $\int_E cs\, d\mu = c \int_E s\, d\mu$. Also ist

$$\begin{aligned}
\int_E cf^+\, d\mu &= \sup\left\{\int_E s\, d\mu : 0 \leq s \leq cf^+\right\} \\
&= \sup\left\{\int_E cs'\, d\mu : 0 \leq cs' \leq cf^+\right\} \\
&= \sup\left\{c \int_E s'\, d\mu : 0 \leq s' \leq f^+\right\} \\
&= c \int_E f^+\, d\mu.
\end{aligned}$$

Analog für f^-. Ist $c = -1$, so ist $cf = -f$, ferner $(-f)^+ = f^-$ und $(-f)^- = f^+$. Daher ist $-f \in L^1(E)$ genau dann, wenn $f \in L^1(E)$, und

$$\begin{aligned}
\int_E (-f)\, d\mu &= \int_E (-f)^+\, d\mu - \int_E (-f)^-\, d\mu \\
&= \int_E f^-\, d\mu - \int_E f^+\, d\mu = -\int_E f\, d\mu.
\end{aligned}$$

Für beliebiges $c < 0$ schreiben wir nun $cf = (-c)(-f)$ und schließen

$$\int_E cf\,d\mu = \int_E (-c)(-f)\,d\mu = (-c)\int_E (-f)d\mu = c\int_E f\,d\mu.$$

(e) Ist s eine einfache messbare Funktion mit $0 \le s \le f^+$, $s = \sum c_j \chi_{E_j}$, so ist $\int_E s = \sum c_j \mu(E \cap E_j) = 0$, da $0 \le \mu(E \cap E_j) \le \mu(E) = 0$. Es folgt, dass $\int_E f^+ d\mu = 0$, analog $\int_E f^- d\mu = 0$.

(f) Jede einfache Funktion s auf A mit $0 \le s \le f^+_{|A}$ lässt sich (durch Null auf $E \setminus A$) zu einer einfachen Funktion $\tilde{s}$ auf E fortsetzen mit $0 \le \tilde{s} \le f^+_{|E}$. Es folgt

$$\int_A f^+ d\mu = \sup_{0 \le s \le f^+_{|A}} \left\{ \int_A s\,d\mu \right\} = \sup_{0 \le s \le f^+_{|A}} \left\{ \int_E \tilde{s}\,d\mu \right\} \le \sup_{0 \le s \le f^+_{|E}} \left\{ \int_E s\,d\mu \right\} = \int_E f^+\,d\mu;$$

entsprechend für f^-. ◁

20.13. Satz. *Es sei $f \ge 0$ messbar. Wir definieren die Mengenfunktion $\varphi_f : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch $\varphi_f(A) = \int_A f\,d\mu$. Dann ist φ_f abzählbar additiv*

Damit ist φ_f wegen der Nichtnegativität sogar ein Maß. Dies liefert eine wichtige Beispielklasse von Maßen.

Beweis. Es sei $A = \cup A_j$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen A_j.

Wir nehmen zunächst an, dass f eine charakteristische Funktion ist, etwa $f = \chi_E$. Für beliebiges messbares B ist dann $\varphi_f(B) = \int_B \chi_E\,d\mu = \mu(B \cap E)$, und die abzählbare Additivität folgt aus der von μ. Wegen der Linearität des Integrals auf einfachen Funktionen folgt abzählbare Additivität auch, wenn f einfach und messbar ist.

Im allgemeinen Fall gilt für jede einfache messbare Funktion s mit $0 \le s \le f$, dass

$$\varphi_s(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_s(A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_f(A_j).$$

Nach Definition von $\varphi_f(A)$ folgt, dass auch $\varphi_f(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_f(A_j)$.

Gilt für ein j_0, dass $\varphi_f(A_{j_0}) = +\infty$ ist, so ist die Behauptung trivial, da $\varphi_f(A) \ge \varphi_f(A_{j_0})$ ist. Es sei also $\varphi_f(A_j) < +\infty$ für alle j. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann eine messbare einfache Funktion f mit $0 \le s \le f$ und

$$\int_{A_1} s\,d\mu \ge \int_{A_1} f d\mu - \varepsilon \text{ und } \int_{A_2} s\,d\mu \ge \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon.$$

Es folgt, dass

$$\varphi_f(A_1 \cup A_2) \ge \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu = \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \ge \varphi_f(A_1) + \varphi_f(A_2) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, schließen wir, dass

$$\varphi_f(A_1 \cup A_2) \ge \varphi_f(A_1) + \varphi(A_2).$$

Iteration liefert sofort, dass für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_f(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \ge \varphi_f(A_1) + \ldots + \varphi_f(A_k).$$

Da $A \supseteq A_1 \cup \ldots \cup A_k$ für jedes k gilt, folgt auch

$$\varphi_f(A) \ge \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_f(A_j)$$

und somit die Behauptung. ◁

20.14. Folgerung. Ist $f \in L^1(A)$, A messbar, und sind $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkte Mengen mit $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, so ist

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f\, d\mu.$$

Beweis. Wir schreiben $f = f^+ - f^-$ und definieren die Mengenfunktionen φ_{f^+} und φ_{f^-}. Diese sind abzählbar additiv nach 20.13. Weil für jede messbare Menge B gilt $\int_B f\, d\mu = \varphi_{f^+}(B) - \varphi_{f^-}(B)$ folgt die Behauptung. $\triangleleft$

20.15. Folgerung. Es sei f messbar, und es existiere $\int f\, d\mu$. Ist A messbar und N eine Nullmenge, so gilt

$$\int_A f\, d\mu = \int_{A\cup N} f\, d\mu.$$

Beweis. Schreibe $A \cup N = A \cup N'$ (disjunkt), wobei $N' = N \setminus A$ ebenfalls Nullmenge ist. Nach Satz 20.13 und 20.12(e) ist

$$\int_{A\cup N} f^\pm\, d\mu = \int_A f^\pm\, d\mu + \int_{N'} f^\pm\, d\mu = \int_A f^\pm\, d\mu + 0.$$

$\triangleleft$

20.16. Definition. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf der Menge der Funktionen auf X durch

$$f \sim g \Leftrightarrow \mu\left(\{x : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0;$$

gesprochen: "f ist fast überall gleich g" oder "$f = g$ f.ü.". Man sieht leicht, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Man sagt, eine Eigenschaft gelte fast überall auf X (bezüglich eines festen Maßes), falls die Menge, auf der die Eigenschaft verletzt ist, das Maß Null hat.

Für $E \subseteq X$ messbar schreibt man auch $f = g$ f.ü. auf E, falls $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\} \cap E) = 0$.

20.17. Lemma. *Gilt $f = g$ fast überall, so ist*

(1) $$f \text{ messbar} \Leftrightarrow g \text{ messbar}$$

(2) $$\int f\, d\mu \text{ existiert} \Leftrightarrow \int g\, d\mu \text{ existiert}$$

(3) $$f \in L^1 \Leftrightarrow g \in L^1;$$

Existiert eines der beiden Integrale, so ist für jede messbare Teilmenge E von X

(4) $$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

Beweis. Die Mengen

$$\{x : f(x) > a\} \quad \text{und} \quad \{x : g(x) > a\}$$

differieren höchstens um eine Nullmenge. Es folgt (1).

Ferner gilt: Das Integral von f existiert, falls $\int f^+\, d\mu < \infty$ oder $\int f^-\, d\mu < \infty$, und f ist integrierbar, falls beide endlich sind. Die weiteren Aussagen folgen daher, weil

$$\begin{aligned}\int g^\pm\, d\mu &= \int_{\{x:f(x)=g(x)\}} g^\pm\, d\mu + \int_{\{x:f(x)\neq g(x)\}} g^\pm\, d\mu \\ &= \int_{\{x:f(x)=g(x)\}} f^\pm\, d\mu + 0 = \int f^\pm\, d\mu.\end{aligned}$$

Betrachtet man $f\chi_E$ und $g\chi_E$, so erhält man die letzte Aussage. $\triangleleft$

20.18. Bemerkung. Funktionswerte auf Nullmengen spielen also bei der Integration keine Rolle.

Es ist daher üblich, $L^1(X)$ nicht als Menge von Funktionen zu sehen, sondern als Menge von Äquivalenzklassen von Funktionen. Anders ausgedrückt: Man unterscheidet *nicht* zwischen zwei Funktionen, wenn sie außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen.

Beispielsweise identifiziert man bezüglich des Lebesgue-Maßes die Nullfunktion auf $\mathbb{R}^n$ und $\chi_{\mathbb{Q}^n}$, weil $\mathbb{Q}^n$ eine Nullmenge ist.

20.19. Lemma.

(a) Ist $f \in L^1(X)$, so haben die Mengen

$$\{x : f(x) = +\infty\} \quad \text{und} \quad \{x : f(x) = -\infty\}$$

beide das Maß Null. Es ist also $|f(x)| < +\infty$ f.ü..

(b) Ist $f \geq 0$ messbar und $\int f\,d\mu = 0$, so ist $f = 0$ fast überall.

Beweis. (a) folgt aus 20.12(b).

(b) Wir schreiben

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_j \left\{x : \frac{1}{j+1} \leq f(x) < \frac{1}{j}\right\} \cup \{x : f(x) \geq 1\};$$

dies ist eine abzählbare disjunkte Vereinigung messbarer Mengen. Ist also f nicht fast überall Null, so hat eine dieser Mengen positives Maß, und die Behauptung folgt aus 20.12(b). $\triangleleft$

20.20. Lemma.

(a) *Ist $f \in L^1(X)$, so ist $|f| \in L^1(X)$ und $|\int f\,d\mu| \leq \int |f|\,d\mu$.*

(b) *Ist f messbar, $g \in L^1(X)$ und $|f| \leq g$, so ist $f \in L^1(X)$.*

Beweis. Schreibe $A = \{x : f(x) \geq 0\}$ und $B = \{x : f(x) < 0\}$. Dann ist $X = A \cup B$ (disjunkt), also nach Satz 20.14

$$\int |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu + \int_B f^-\,d\mu,$$

so dass $|f| \in L^1(X)$. Wegen $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt die Abschätzung.

(b) $f^+ \leq g, f^- \leq g$. $\triangleleft$

Konvergenzsätze.

20.21. Erinnerung. Eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen (a_k) ist konvergent, falls sie beschränkt ist, ansonsten divergiert sie bestimmt gegen $+\infty$. Wir schreiben $\lim a_k$ für den 'Grenzwert' in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

20.22. Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz. *Es sei (f_j) eine Folge messbarer Funktionen mit $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in X$. Ist $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiert durch $f(x) = \lim f_j(x)$, so gilt*

$$\lim \int f_j\,d\mu = \int f\,d\mu = \int \lim f_j\,d\mu \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Die Bedingung $f_j \geq 0$ is wichtig: Betrachte $f_j \equiv -1/j$ auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Schreibe $\alpha = \lim \int f_j \, d\mu$.

Die Funktion f ist als supremum messbarer Funktionen messbar, also existiert $\int f \, d\mu$. Wegen $\int f_k \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ folgt, dass $\alpha \leq \int f \, d\mu$.

Wähle $0 < c < 1$ beliebig. Ist s einfach und messbar mit $0 \leq s \leq f$ so setzen wir

$$E_k = \{x : f_k(x) \geq cs(x)\}.$$

Die Monotonie der Folge (f_k) zeigt, dass $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$. Weil $s(x)$ endlich ist, und $\lim f_k(x) = f(x)$ ist, gilt

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_k.$$

Für festes k ist also

$$\int f_k \, d\mu \geq \int_{E_k} f_k \, d\mu \geq c \int_{E_k} s \, d\mu.$$

Aus der abzählbaren Additivität des Maßes $B \mapsto \int_B s d\mu$ (s. 20.14) folgt dann

$$\alpha = \lim_{k \to \infty} \int f_k \, d\mu \geq c \lim_{k \to \infty} \int_{E_k} s \, d\mu = c \int s \, d\mu.$$

Wir bilden nun das supremum über alle einfach messbaren s mit $0 \leq s \leq f$ und erhalten

$$\alpha \geq c \int f \, d\mu.$$

Da $c < 1$ beliebig war, folgt die Behauptung. ◁

20.23. Satz. *Es seien $f_1, f_2 \in L^1(X)$. Dann ist $\int f_1 + f_2 \, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu$.*

Beweis. Erster Fall: $f_1, f_2 \geq 0$. Dann existieren monoton wachsende Folgen (s_k), (t_k) einfacher messbarer Funktionen, die punktweise gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. Setze $u_k = s_k + t_k$. Dies definiert eine monotone Folge einfacher Funktionen. Nach der Definition des Integrals für einfache Funktionen gilt

$$\int u_k \, d\mu = \int s_k \, d\mu + \int g_k \, d\mu.$$

Andererseits ist $\lim u_k(x) = \lim s_k(x) + \lim t_k(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Zweiter Fall: $f_1 \geq 0$, $f_2 \leq 0$. Setze $A = \{x : (f_1 + f_2)(x) \geq 0\}$ und $B = \{x : (f_1 + f_2)(x) < 0\}$. Dann sind f_1, $(-f_2)$ und $f_1 + f_2$ nichtnegativ auf A. Wir schließen mit Fall 1, dass (wegen $f_1 = (f_1 + f_2) + (-f_2)$)

$$\int_A f_1 \, d\mu = \int_A (f_1 + f_2) \, d\mu + \int_A (-f_2) \, d\mu = \int_A (f_1 + f_2) \, d\mu - \int_A f_2 \, d\mu.$$

Ebenso sind $-(f_1 + f_2)$, f_1 und $(-f_2)$ nichtnegativ auf B und somit

$$\int_B (-f_2) \, d\mu = \int_B f_1 \, d\mu + \int_B (-(f_1 + f_2)) \, d\mu.$$

Mit 20.14 folgt die Behauptung.

Dritter Fall: f_1 und f_2 sind beliebig. Definiere

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x : f_1(x) \geq 0 \text{ und } f_2(x) \geq 0\}, \\
E_2 &= \{x : f_1(x) \geq 0 \text{ und } f_2(x) < 0\}, \\
E_3 &= \{x : f_1(x) < 0 \text{ und } f_2(x) \geq 0\}, \\
E_4 &= \{x : f_1(x) < 0 \text{ und } f_2(x) < 0\}.
\end{aligned}$$

Dann ist $X = E_1 \cup \ldots E_4$ (disjunkt). Auf jeder dieser Mengen folgt die Behauptung nach dem ersten bzw. dem zweiten Fall. Wieder liefert 20.14 die Behauptung. $\lhd$

20.24. Satz. *Es sei (f_j) eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen. Wir definieren $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. Dann ist*

$$\int f\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j\, d\mu.$$

Sind insbesondere alle f_j in $L^1(X)$, und ist die rechte Seite endlich, so ist $f \in L^1$, und die Summe konvergiert f.ü. im üblichen Sinn.

Beweis. Wende den Satz von der monotonen Konvergenz auf die Partialsummenfolge an. $\lhd$

20.25. Satz (Lemma von Fatou). Es sei (f_j) eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und f definiert durch

$$f(x) = \liminf f_j(x).$$

Dann gilt

$$\int f(x)\, d\mu \le \liminf \int f_j(x)\, d\mu.$$

Hier kann $<$ gelten: Betrachte $f_j = \chi_{[j,j+1]}$ auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir definieren eine monoton wachsende Folge $g_k : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch

$$g_k(x) = \inf\{f_j(x) : j \ge k\}.$$

Die g_k sind alle messbar; es gilt

(1) $$g_k(x) \le f_k(x) \text{ und}$$
(2) $$g_k(x) \to f(x) \text{ für } k \to \infty.$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz in Verbindung mit (2) zeigt, dass

(3) $$\int g_k\, d\mu \to \int f\, d\mu(x).$$

Andererseits ist wegen (1) $\int g_k\, d\mu \le \int f_k\, d\mu$, also $\liminf \int f_j d\mu \ge \liminf \int g_j d\mu = \int f\, d\mu$. $\lhd$

20.26. Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. Es sei (f_j) eine Folge messbarer Funktionen. Der Grenzwert

$$f(x) = \lim f_j(x)$$

existiere fast überall. Ferner gebe es eine Funktion $g \in L^1(X)$ mit $|f_j(x)| \le g(x)$ fast überall. Dann ist $f \in L^1(X)$ und

$$\lim \int f_j\, d\mu = \int f\, d\mu = \int \lim f_j\, d\mu.$$

Beweis. Indem wir f und g auf einer Nullmenge ändern, können wir annehmen, dass die Grenzwerteigenschaft und die Abschätzung überall gelten.

Weil $|f| \le g$ und $g \in L^1(X)$ ist auch $f \in L^1(X)$ nach 20.20(b). Weiterhin ist $f_j + g \ge 0$ und Fatous Lemma zeigt, dass

$$\int (f+g)\, d\mu \le \liminf \int (f_j + g)\, d\mu.$$

Es folgt wegen der Additivität (Satz 20.23), dass

$$\int f\,d\mu \le \liminf \int f_j\,d\mu.$$

Analog folgt wegen $g - f_j \ge 0$ auch

$$\begin{aligned}\int (-f)\,d\mu &\le \liminf \int (-f_j)\,d\mu \text{ bzw.}\\ \int f\,d\mu &\ge \limsup \int f_j\,d\mu.\end{aligned}$$

Weil $\liminf \le \limsup$ ist, liefert dies die Existenz des Grenzwerts für $\int f_j\,d\mu$ und damit die Behauptung. $\triangleleft$

20.27. Satz Vergleich mit dem Riemann-Integral.

(a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar (also insbesondere beschränkt), so ist $f \in L^1([a,b])$ und

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Linke Seite im Sinne von Lebesgue, rechte Seite im Sinn von Riemann.)

Man schreibt daher auch für Lebesgue-Integrale $\int_a^b$ statt $\int_{[a,b]}$.

(b) Ist f auf $[a,b]$ beschränkt, so ist f genau dann Riemann integrierbar, wenn f fast überall stetig ist (d.h. das Maß aller Punkte, in denen f unstetig ist, ist Null).

(c) Ist I ein Intervall in $\mathbb{R}$ (eventuell halbunendlich oder $= \mathbb{R}$) und f nichtnegativ und uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist $f \in L^1(I)$, und das Lebesgue-Integral stimmt mit dem uneigentlichen Riemann-Integral überein.

(Wichtig: $f \ge 0$, s.u.!)

Beweis. (a) Es sei f beschränkt und o.B.d.A. ≥ 0 (ansonsten ersetze f durch $f + c$ für eine geeignete positive Konstante c). Wir wählen eine Folge $(\mathcal{P}_k)$ von Partitionen von $[a,b]$, wobei $\mathcal{P}_{k+1}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{P}_k$ sei und die Feinheit gegen Null konvergiere. Es sei $\mathcal{P}_k = \{x_0, \ldots, x_l\}$ mit $x_0 = a$ und $x_l = b$. Wir definieren $M_k(a) = m_k(a) := f(a)$ und, für $j = 0, \ldots, l-1$,

$$\begin{aligned} m_k(x) &= \inf\{f(y) : x_j \le y \le x_{j+1}\}; \quad x \in\,]x_j, x_{j+1}]\\ M_k(x) &= \sup\{f(y) : x_j \le y \le x_{j+1}\}; \quad x \in\,]x_j, x_{j+1}].\end{aligned}$$

Die m_k bzw. M_k sind messbare einfache Funktionen. Da die $\mathcal{P}_k$ sich verfeinern, gilt

$$m_1 \le m_2 \le \ldots \le f \le \ldots \le M_2 \le M_1 \quad \text{auf}[a,b].$$

Die Grenzwerte $m = \lim m_k$ und $M = \lim M_k$ existieren also. Beide Funktionen sind als punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen messbar (nach 20.5) und beschränkt. Es gilt

$$m \le f \le M.$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \int_{[a,b]} m_k(x)dx \ \Big(= \int_a^b m_k(x)dx \quad \text{im Sinn von Riemann}\Big),\\ \beta_k &= \int_{[a,b]} M_k(x)dx \ \Big(= \int_a^b M_k(x)dx \quad \text{im Sinn von Riemann}\Big),\end{aligned}$$

so ist nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim \alpha_k = \int_{[a,b]} m(x)\,dx$$
$$\lim \beta_k = \int_{[a,b]} M(x)\,dx$$

Ist f Riemann-integrierbar, so ist $\lim \alpha_k = \lim \beta_k$, also $\int_{[a,b]} m(x)\,dx = \int_{[a,b]} M(x)\,dx$, und das Riemann-Integral ist der gemeinsame Grenzwert. Weil $m \leq M$ ist, folgt nach 20.19(b), dass $m = M$ fast überall. Wegen $m \leq f \leq M$ ist dann auch f messbar, und

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} m(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \text{im Sinn von Riemann)}$$

(b) Ist $x \in [a,b]$ und gehört x zu keiner der Mengen $\mathcal{P}_k$, so gilt

$$m(x) = M(x) \Leftrightarrow f \text{ stetig in } x.$$

Dazu: Es sei zunächst $m(x) = M(x)$, d.h. $\lim m_k(x) = \lim M_k(x)$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgelegt, so existiert ein k_0 mit $M_k(x) - m_k(x) < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Ist $\mathcal{P}_{k_0} = \{x_0, \ldots, x_l\}$ und $x_j < x < x_{j+1}$, so ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in]x_j, x_{j+1}[$. Daher ist f stetig in x.

Ist umgekehrt f stetig in x, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ falls $|y-x| < \delta$. Ist k_0 so groß, dass $|\mathcal{P}_k| < \delta$ für $k \geq k_0$, so ist $M_k(x) - m_k(x) \leq \varepsilon$. Daher ist $\lim m_k(x) = \lim M_k(x)$.

Nun ist die Vereinigung der $\mathcal{P}_k$ abzählbar und daher eine Nullmenge. Ist f Riemann-integrierbar, so gilt, wie wir im Beweis von (a) gesehen haben, $m = M$ f.ü.. Damit ist f fast überall stetig. Ist umgekehrt f fast überall stetig, so ist $m = M$ f.ü. und daher wie in Teil (a) die Funktion f Riemann-integrierbar.

(c) Es sei $I =]a,b]$ (andere Fälle analog). Dass f auf I uneigentlich Riemann-integrierbar ist, heißt, dass für jede Folge $a_k \searrow a$ die Riemann-Integrale $\int_{a_k}^b f(x)dx$ existieren und einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ haben, der dann $\int_a^b f(x)dx$ genannt wird.

Die Existenz aller Integrale $\int_{a_k}^b f(x)dx$ zeigt mit (a), dass f auf jedem $[a_k, b]$ Lebesgue-integrierbar ist, erst recht also messbar. Damit ist f auf $]a,b]$ messbar, denn

$$\{x \in]a,b] : f(x) < c\} = \bigcup \{x \in [a_k, b] : f(x) < c\}.$$

Wir betrachten für $a_k \searrow a$ die Folge $g_k = \chi_{[a_k,b]} f$. Da $f \geq 0$ ist, ist $0 \leq g_k \nearrow f$ monoton wachsend. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\int_{]a,b]} f\,dx = \int_{]a,b]} \lim g_k\,dx = \lim \int_{]a,b]} g_k\,dx = \lim \int_{[a_k,b]} f\,dx = \lim \int_{a_k}^b f\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

◁

20.28. Warnung.

(a) Die Aussagen 'f ist fast überall stetig' und 'f ist fast überall gleich einer stetigen Funktion' sind nicht äquivalent: Betrachte $\chi_{\mathbb{Q}}$.

(b) Die Nichtnegativität von f in 20.27(c) ist wesentlich: Betrachte etwa $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^n/n$ auf $[n, n+1[$.

Parameterabhängige Integrale.

20.29. Satz (Stetigkeit). Es sei T ein metrischer Raum (z. B. $T \subseteq \mathbb{R}^k$), $t_0 \in T$ und $f : T \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften

(i) Für jedes feste $t \in T$ ist $f(t, \cdot)$ messbar.
(ii) $\exists g \in L^1(X) : |f(t,x)| \leq g(x)$ fast überall.
(iii) $\lim_{t\to t_0} f(t,x) = f(t_0, x)$ für fast alle x.

Dann ist die Abbildung

$$t \mapsto \int f(t,x)\, d\mu(x) \tag{1}$$

stetig in t_0.

Beweis. Wegen der Bedingungen (i) und (ii) ist f für jedes t nach x integrierbar, somit die rechte Seite in Gleichung (1) definiert.

Nun sei (t_k) eine Folge in T mit $t_k \to t_0$. Definiere $f_k(x) := f(t_k, x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f_k(x)| &\leq g(x) && \text{fast überall} \\ f_k(x) &\to f(t_0,x) && \text{fast überall} \end{aligned}$$

Mit dominierter Konvergenz folgt: $\int f(t_k, x)\, d\mu(x) = \int f_k(x)\, d\mu \to \int f(t_0, x)\, d\mu$. ◁

20.30. Satz (Differenzieren unter dem Integral). Es sei T eine offene Menge in $\mathbb{R}^k$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, und $f : T \times X \to \mathbb{R}$ habe folgende Eigenschaften

(i) Für jedes $t \in T$ ist $f(t, \cdot)$ integrierbar
(ii) Für jedes $x \in X$ ist $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)$ stetig auf T (insbesondere existiere die Ableitung).
(iii) Es gibt ein $h \in L^1(X)$ mit $|\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)| \leq h(x)$ für alle t und x.

Dann gilt

(a) Für jedes t ist $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x) : X \to \mathbb{R}$ messbar.
(b) $F(t) := \int f(t,x)\, d\mu(x)$ existiert für alle t und ist auf T partiell nach t_j differenzierbar mit
$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\, d\mu(x).$$

Beweis. (a) Die partielle Ableitung ist als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar: Für jedes x ist
$$\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+he_j, x) - f(t,x)}{h},$$
und die Funktionen auf der rechten Seite (parametrisiert durch h) sind messbar.

(b) Es sei o.B.d.A. $k = 1$ und $F(t) = \int f(t,x)\, d\mu(x)$. Dann ist

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \int \frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t-t_0}\, d\mu(x) = \int \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + s(t-t_0), x)\, ds\, d\mu(x). \tag{1}$$

Nun ist für festes x und jede Folge $t_k \to t_0$ mit dem Satz von der dominierten Konvergenz (angewendet auf die Folge $g_k(s) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + s(t_k - t_0), x) \to \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$; (ii) liefert Dominante, da stetige Funktionen auf $[0,1]$ beschränkt sind)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + s(t_k - t_0), x)\, ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, ds = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x). \tag{2}$$

Es folgt, wiederum mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, diesmal angewendet auf die Folge

$$h_k(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + s(t_k - t_0), x)\, ds \overset{(2)}{\to} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, ds = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$$

(mit (iii) für Dominieren):

$$F'(t_0) \overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} \int h_k(x)\, d\mu \overset{\text{dom Konv}}{=} \int \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0+s(t_k-t_0), x)\, ds\, d\mu(x) \overset{(2)}{=} \int \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, d\mu(x).$$

$\triangleleft$

Integration komplexwertiger Funktionen.

20.31. Definition. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt messbar, falls ihr Realteil und ihr Imaginärteil messbare Funktionen sind. Sie heißt integrierbar (schreibe $f \in L^1(X)$), falls Real- und Imaginärteil integrierbar sind.

20.32. Lemma. *Sind $f_1, f_2 : X \to \mathbb{C}$ messbar, so auch $f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2, |f_1|$.*

Beweis. $\mathrm{Re}\,(f_1 + f_2) = \mathrm{Re}\, f_1 + \mathrm{Re}\, f_2$, $\mathrm{Im}\,(f_1 + f_2) = \mathrm{Im}\, f_1 + \mathrm{Im}\, f_2$.

$\mathrm{Re}\,(f_1 \cdot f_2) = (\mathrm{Re}\, f_1)(\mathrm{Re}\, f_2) - (\mathrm{Im}\, f_1)(\mathrm{Im}\, f_2)$, $\mathrm{Im}\,(f_1 f_2) = (\mathrm{Re}\, f_1)(\mathrm{Im}\, f_2) + (\mathrm{Im}\, f_1)(\mathrm{Re}\, f_2)$.

$|f_1| = \big((\mathrm{Re}\, f_1)^2 + (\mathrm{Im}\, f_1)^2\big)^{1/2}$. Alle diese Funktionen sind messbar nach 20.5. $\triangleleft$

20.33. Lemma. *Ist $f : X \to \mathbb{C}$ messbar, so gilt: f integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrierbar.*

Beweis. Dies folgt mit 20.20(b) aus den Ungleichungen

$$\mathrm{Re}\, f \le |f|,\ \ \mathrm{Im}\, f \le |f| \quad \text{bzw.} \quad |f| \le |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|.$$

$\triangleleft$

20.34. Bemerkung. Die Sätze der Integrationstheorie gelten auch für komplexwertige Funktionen. (d.h. 20.9(a),(d),(e),(f), 20.14, 20.15, 20.17, 20.20, 20.23, 20.26, 20.27). Die Beweise lassen sich alle direkt verallgemeinern; lediglich bei 20.20(a) muss man sich etwas überlegen: Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass $\int cf\, d\mu = c \cdot \int f\, d\mu$ reell und nichtnegativ ist. Schreibe $cf = u + iv$ Dann ist $u \le |f|$, und es gilt:

$$\Big|\int f\, d\mu\Big| = \int cf\, d\mu = \int u\, d\mu \le \int |f|\, d\mu;$$

dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen, weil das Integral reell ist.