2. Die komplexen Zahlen

2.1. Definition. Die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bildet einen Körper, sofern man Addition und Multiplikation wie folgt definiert:
Addition
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$
Multiplikation
$$(x,y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$
Das Nullelement ist $(0, 0)$, das Einselement ist $(1, 0)$. Dieser Körper wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Seine Elemente heißen komplexe Zahlen.

Aufgabe. Prüfen Sie nach, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist! Was sind die additiven und multiplikativen Inversen?

Aus den obigen Regeln ergibt sich, dass
$$\begin{aligned}(x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0)\\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) &= (x_1x_2, 0)\end{aligned}$$
Wir können also $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen, indem wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$ identifizieren.

Die Schreibweise mit zwei Komponenten ist unpraktisch und wird nicht benutzt. Man führt eine formale Variable i ein und schreibt
$$x + iy \quad \text{statt} \quad (x, y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$
Mit dieser Identifikation entspricht also i dem Tupel $(0, 1)$. Unter Berücksichtigung der Regel $i^2 = -1$ kann man mit komplexen Zahlen dann wie mit reellen rechnen: Bei der Addition hat man:
$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$
bei der Multiplikation:
$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$
Die Identifikation des Elements $x + iy$ von $\mathbb{C}$ mit dem Punkt (x, y) von $\mathbb{R}^2$ ist dennoch praktisch (Visualisierung von $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlenebene).

Aufgabe. Wieso ist $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper?

2.2. Bezeichnungen. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt x Realteil von z und y Imaginärteil von z. Schreibe $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Die Zahl $\overline{z} = x - iy$ nennt man das Konjugiert-Komplexe von z.

Die Zahl $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty[$ heißt Betrag von z.

2.3. Satz. *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$.
(b) $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$.
(c) $(\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$.
(d) $\overline{\overline{z}} = z$.
(e) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Beweis.

(a) Sei $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. Dann ist
$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = \overline{z_1 + z_2}.$$

(b) analog zu (a).

(c) $\overline{z} \cdot \overline{z^{-1}} \overset{(b)}{=} \overline{z \cdot z^{-1}} = \overline{1} = 1$. Die Multiplikation mit $(\overline{z})^{-1}$ liefert die Behauptung.

(d) Schreibe $z = x + iy$. Dann ist $\overline{z} = x - iy$ und $\overline{\overline{z}} = x + iy = z$.

(e) Schreibe $z = x + iy$. Dann ist $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x$ und $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = \frac{1}{2i}(2iy) = y$.

◁

2.4. Satz. *Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(a) $|z| \geq 0$.

(b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(c) $|z| = |\overline{z}|, |z|^2 = z\overline{z}$.

(d) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(f) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Beweis. (a) und (b) sind klar.

(c) Schreibe $z = x + iy$. Dann ist $\overline{z} = x - iy$, also $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ und $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

(d) Es ist

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Quadratwurzel aus nichtnegativen Zahlen folgt die Behauptung.

(e) Da die Ungleichung beim Quadrieren erhalten bleibt (s. 1.10(f)), ist nach (c) zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} &\leq (\sqrt{z_1 \overline{z}_1} + \sqrt{z_2 \overline{z}_2})^2 \quad \text{bzw.} \\ (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) &\leq z_1 \overline{z}_1 + 2\sqrt{z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2} + z_2 \overline{z}_2 \text{ bzw.} \\ z_1 \overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 &\leq 2\sqrt{(z_1 \overline{z}_2)(\overline{z}_1 z_2)}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung heißt gerade, dass $2\mathrm{Re}\,(z_1 \overline{z}_2) \leq 2|z_1 \overline{z}_2|$. Dies ist richtig, da für jede komplexe Zahl z gilt $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$.

(f) Setze $w_1 = z_1 + z_2, w_2 = -z_2$. Dann liefert (e)

$$|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2|, \quad \text{also } |z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|, \quad \text{bzw. } |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Mit $w_2 = -z_1$ hätten wir stattdessen

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$$

erhalten. Da für eine reelle Zahl a gilt: $|a| = a$ oder $|a| = -a$, folgt die Behauptung. ◁