

18. VARIATIONSRECHNUNG

Im Folgenden sei E ein normierter Raum, V ein Unterraum, $m \in E$ und $M = m + V$ ein affiner Unterraum. Ferner sei $U \subseteq M$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

18.1. Definition. Die Richtungsableitung von f in $u_0 \in U$ in Richtung $v \in V$ ist definiert als

$$\delta f(u_0; v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + tv) - f(u_0)}{t},$$

falls der Grenzwert existiert.

Existiert in u_0 die Richtungsableitung $\delta f(u_0; v)$ für jedes $v \in V$, so heißt die durch

$$\delta f(u_0)(v) := \delta f(u_0; v)$$

definierte Abbildung $\delta f(u_0) : V \rightarrow \mathbb{R}$ die erste Variation von f im Punkt u_0 bezüglich des Unterraums V .

Klar: $\delta f(u_0)$ ist eine lineare reellwertige Abbildung auf V .

18.2. Bemerkung. Im Unterschied zu Kapitel 14 haben wir es hier mit einem (möglicherweise) unendlich-dimensionalen Grundraum und einer nur auf einem affinen Unterraum definierten Funktion zu tun.

Ist $V = E$ so können wir den Begriff der totalen Ableitung wie vorher definieren: Wir nennen f in u_0 total differenzierbar, falls eine stetige lineare Abbildung $A : E \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + Ah + \varphi(h).$$

Dabei sei $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt $\varphi(h)/\|h\| \rightarrow 0$ falls $h \rightarrow 0$. Man nennt dann $f'(u_0) = A$ die Ableitung von f in u_0 .

In diesem Fall sieht man sofort, dass alle Richtungsableitungen von f in u_0 existieren und $\delta f(u_0, v) = f'(u_0)v$ gilt.

18.3. Satz. Hat f in u_0 ein lokales Extremum bezüglich V und existiert die erste Variation $\delta f(u_0)$, so gilt $\delta f(u_0) = 0$.

Beweis. Es sei $v \in V$. Wegen der Offenheit von U_0 existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $u_0 + tv \in U$ für $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Wir definieren die Funktion $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(t) = f(u_0 + tv)$. Sie hat in 0 ein lokales Extremum. Ferner ist g differenzierbar in 0 mit Ableitung $\delta f(u_0; v)$:

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + tv) - f(u_0)}{t} = \delta f(u_0; v).$$

Aus dem bekannten Satz von Analysis 1 folgt $0 = g'(0) = \delta f(u_0; v)$ für jedes $v \in V$. ◁

18.4. Definition. Gilt $\delta f(u_0) = 0$, so sagt man f werde in u_0 stationär bzw. habe dort einen stationären Punkt. Man nennt auch u_0 einen kritischen Punkt für f .

18.5. Lemma. Es seien $\alpha < \beta$ reelle Zahlen.

(a) Dann ist $E = C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m)$ ein normierter Raum (sogar ein Banachraum; das brauchen wir aber hier nicht) mit der Norm

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|f(t)\| + \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|f'(t)\|.$$

(b) Ist $W \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ offen und

$$U_0 = \{u \in E : (u(t), u'(t)) \in W \text{ für alle } t \in [\alpha, \beta]\},$$

so ist U_0 offen in E .

(c) $C_0^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m) = \{u \in E : u(\alpha) = 0 = u(\beta)\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum.

Beweis. (a) Klar ist, dass C^1 ein normierter Raum ist. Dass es sich sogar um einen Banachraum handelt, sieht man so: Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge bezüglich der obigen Norm. Dann ist dies auch eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm. Sie hat also nach Satz 14.16 einen Grenzwert f in $C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m)$. Die Folge (f'_n) der Ableitungen ist ebenfalls Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm, hat also auch einen Grenzwert g . Nach Satz 10.12 ist also f differenzierbar und $f' = g$. Man sieht dann sofort, dass $f_n \rightarrow f$ in der C^1 -Norm.

(b) Ist $u \in M$, so ist für jedes $t \in [\alpha, \beta]$ die Distanz $\text{dist}((u(t), u'(t)), (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \setminus W)$ positiv. Da die Distanz eine stetige Funktion ist, nimmt sie ein positives Minimum c auf $[\alpha, \beta]$ an. Dann ist auch $u + v \in U$ für jede Funktion $v \in V$ mit $\|v\|_{C^1} < c$.

(c) Klar. ◁

18.6. Satz. Es seien $E = C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m)$, W, U_0 wie in 18.5, $M = m + V$ ein affiner Unterraum von E und $L = L(t, x, y) : [\alpha, \beta] \times W \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $U = U_0 \cap M$ offen in M . Definiere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(1) \quad f(u) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u(t), u'(t)) dt, \quad u \in U.$$

Dann existiert für jedes $u \in U$ die erste Variation $\delta f(u)$, und es gilt

$$(2) \quad \delta f(u; v) = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \partial_x L(t, u(t), u'(t)), v(t) \rangle + \langle \partial_y L(t, u(t), u'(t)), v'(t) \rangle dt.$$

Beweis. Es seien u in U und $v \in V$. Da U offen ist, können wir für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Abbildung $\varphi : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$\varphi(s) = f(u + sv) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u(t) + sv(t), u'(t) + sv'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(s, t) dt$$

mit

$$\psi(s, t) = L(t, u(t) + sv(t), u'(t) + sv'(t)).$$

Klar: ψ ist stetig partiell differenzierbar nach s .

Behauptung. φ ist differenzierbar in 0 mit

$$\varphi'(0) = \int_{\alpha}^{\beta} \partial_s \psi(0, t) dt.$$

Dazu schreiben wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{1}{s}(\varphi(s) - \varphi(0)) = \frac{1}{s} \int_{\alpha}^{\beta} \psi(s, t) - \psi(0, t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^1 \partial_s \psi(\sigma s, t) d\sigma dt.$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von ψ auf der kompakten Menge $[\alpha, \beta] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ folgt dann die Behauptung.

Damit erhalten wir die Aussage des Satzes: Es ist nämlich $\varphi'(0) = \delta f(u; v)$ und

$$\partial_s \psi(0, t) = \langle \partial_x L(t, u(t), u'(t)), v(t) \rangle + \langle \partial_y L(t, u(t), u'(t)), v'(t) \rangle.$$

◁

18.7. Folgerung. Ist zusätzlich die Abbildung $t \mapsto \partial_y L(t, u(t), u'(t))$ stetig differenzierbar, so folgt mit partieller Integration aus (2), dass

$$(1) \quad \delta f(u; v) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\langle \partial_x L(t, u(t), u'(t)) - \frac{d}{dt} \partial_y L(t, u(t), u'(t)), v(t) \right\rangle dt$$

$$(2) \quad + [\langle \partial_y L(t, u(t), u'(t)), v(t) \rangle]_{\alpha}^{\beta}.$$

18.8. Satz. Es sei $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m)$, und es gelte

$$\int_{\alpha}^{\beta} \langle g(t), v(t) \rangle dt = 0$$

für jedes $v \in C_c^{\infty}(] \alpha, \beta[, \mathbb{R}^m) = \{f \in C^{\infty}(] \alpha, \beta[, \mathbb{R}^m) : f(t) = 0 \text{ für alle } t \text{ nahe } \alpha \text{ und } \beta\}$. Dann ist $g = 0$.

18.9. Bemerkung. (a) Zunächst ist nicht klar, ob C_c^{∞} überhaupt Funktionen $\neq 0$ enthält. Dazu folgendes Argument: Man überzeugt sich leicht, dass Vorschrift $\varphi(t) = \exp(-1/(1-t^2))$ für $|t| < 1$ und $\varphi(t) = 0$ für $|t| \geq 1$ eine C^{∞} -Funktion auf \mathbb{R} definiert. Für $T \in \mathbb{R}$ und $c > 0$ ist die Funktion $\varphi((t-T)/c)$ dann C^{∞} auf \mathbb{R} und positiv genau auf $]T-c, T+c[$.

(b) Allgemein nennt man den Träger einer Funktion den Abschluss der Menge aller Punkte, an denen sie $\neq 0$ ist. $C_c^{\infty}(] \alpha, \beta[, \mathbb{R}^m)$ sind die C^{∞} -Funktionen mit kompaktem Träger in $] \alpha, \beta[$.

Beweis von 18.8. Wir nehmen an, es sei $g \neq 0$. Dann ist eine Komponente $g_j \neq 0$. Wir finden ein offenes Teilintervall J von $[\alpha, \beta]$ mit $g_j(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. O.B.d.A sei g_j dort positiv. Wähle wie in 18.9 eine C^{∞} -Funktion φ , die auf J positiv ist. Setzt man $v = (0, \dots, \varphi, 0, \dots, 0)$, mit φ an der j -ten Stelle, so wird das obige Integral positiv, und wir erhalten einen Widerspruch. \triangleleft

18.10. Satz. Mit den Bezeichnungen von 18.6 sei u_0 ein kritischer Punkt von f bezüglich eines Unterraums V mit

$$C_c^{\infty}(] \alpha, \beta[, \mathbb{R}^m) \leq V \leq C_0^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m).$$

Zusätzlich sei $t \mapsto \partial_y L(t, u_0(t), u_0'(t))$ stetig differenzierbar. Dann gilt die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \partial_y L(t, u_0(t), u_0'(t)) = \partial_x L(t, u_0(t), u_0'(t)).$$

Beweis. Nach Satz 18.3 ist die erste Variation $\delta f(u_0)$ Null. Dies bedeutet, dass das Integral 18.6(2) für jede Wahl von $v \in V$ Null ist. Unter der zusätzlichen Stetigkeitsannahme an $t \mapsto \frac{d}{dt} \partial_y L(t, u_0(t), u_0'(t))$ erhalten wir die Form aus 18.7. Da wir $v \in V \leq C_0^1$ wählen, ist der Randterm Null. Also ist für jedes $v \in V$ das Integral in 18.7(1) Null. Aus Satz 18.8 folgt wegen $C_c^{\infty} \leq V$ dann die Behauptung. \triangleleft

18.11. Bemerkung. Ausgeschrieben liefert die Euler-Lagrange-Gleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion u_0 :

$$\partial_y^2 L(t, u_0, u_0') u_0'' + \partial_x \partial_y L(t, u_0, u_0') u_0' + \partial_t \partial_y L(t, u_0, u_0') - \partial_x L(t, u_0, u_0') = 0.$$

18.12. Lemma. Hängt L nicht von t ab (d.h. $L = L(x, y)$), so ist unter den Annahmen von Satz 18.10 für ein Extremum u_0 die Funktion

$$E = \partial_y L(u_0(t), u_0'(t)) u_0'(t) - L(u_0(t), u_0'(t))$$

konstant.

Beweis. Die Darstellung 18.11 zusammen mit der Annahme $\partial_t L = 0$ liefert

$$\begin{aligned}\partial_t E &= \partial_x \partial_y L(u_0, u'_0) (u'_0)^2 + \partial_y^2 L(u_0, u'_0) u''_0 u'_0 + \partial_y L(u_0, u'_0) u''_0 \\ &\quad - \partial_x L(u_0, u'_0) u'_0 - \partial_y L(u_0, u'_0) u''_0 \\ &= (\partial_x \partial_y L(u_0, u'_0) u'_0 + \partial_y^2 L(u_0, u'_0) u''_0 - \partial_x L(u_0, u'_0)) u'_0 = 0\end{aligned}$$

◁

Ein Minimalflächenproblem.

18.13. Beispiel: Rotationsminimalfläche. Zwischen zwei coaxialen Kreislinien vom Radius 1 im Abstand $2\beta > 0$ im Raum soll eine Rotationsfläche kleinsten Inhalts eingespannt werden. Bei geeigneten Abmessungen lässt sich eine solche Fläche durch eine Seifenhaut realisieren. Die Oberflächenspannung bewirkt hier, dass die Fläche möglichst klein wird.

Mathematisch: Wir suchen eine C^1 -Funktion $u : [-\beta, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(-\beta) = 1 = u(\beta)$, für die die durch Rotation des Graphen von u um die t -Achse entstehende Fläche minimal wird.

Der Flächeninhalt ist dabei gegeben durch

$$f(u) = 2\pi \int_{-\beta}^{\beta} u(t) \sqrt{1 + u'(t)^2} dt.$$

(Diese Formel werden wir in Analysis 3 herleiten. Sie kommt daher, dass der Radius der Rotationsfläche in t gerade $u(t)$ ist, der Umfang somit $2\pi u(t)$ und dass die Fläche der Rotationsfläche über dem Intervall $[t, t+h]$ somit in guter Näherung gleich

Umfang \cdot Breite $\approx 2\pi u(t) \|u(t) - u(t+h)\| \approx 2\pi u(t) \sqrt{h^2 + (u'(t)h)^2} = 2\pi u(t) \sqrt{1 + u'(t)^2} h$ ist.)

Wir haben also ein Funktional f wie in 18.6 mit (der Faktor 2π spielt hier keine Rolle)

$$L(t, x, y) = x \sqrt{1 + y^2},$$

das wir minimieren wollen. Wir wählen

$$V = \{u \in C^2([-\beta, \beta], \mathbb{R}^m) : u(-\beta) = 0 = u(\beta)\}$$

Dann sind die Voraussetzungen von Satz 18.10 erfüllt, und wir erhalten die Euler-Lagrange-Gleichung für Extremwerte u_0

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \partial_y L(t, u_0(t), u'_0(t)) &= \partial_x L(t, u_0(t), u'_0(t)) \quad \text{bzw.} \\ (1) \quad \frac{d}{dt} \left(u_0(t) \frac{u'_0(t)}{\sqrt{1 + u'_0(t)^2}} \right) &= \sqrt{1 + u'_0(t)^2}\end{aligned}$$

Da die Funktion L nicht von t abhängt, ist nach Lemma 18.12 die Funktion $E = \partial_y L(u_0, u'_0) u'_0 - L(u_0, u'_0)$ konstant, etwa $= -c$, d.h.

$$(2) \quad -c = u_0 \frac{(u'_0)^2}{\sqrt{1 + (u'_0)^2}} - u_0 \sqrt{1 + (u'_0)^2} = -\frac{u_0}{\sqrt{1 + (u'_0)^2}}$$

Dabei ist $c > 0$, da $u_0(\beta) = 1$. Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichung (1) liefert

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (c u'_0) &= \frac{u_0}{c} \quad \text{bzw.} \\ u''_0 &= \frac{1}{c^2} u_0\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - \frac{1}{c^2}$. Es hat die Nullstellen $1/c$ und $-1/c$. Wir haben also das Fundamentalsystem $\{\exp(t/c), \exp(-t/c)\}$; unsere Lösung ist also von der Form $u_0(t) = d_1 \exp(t/c) + d_2 \exp(-t/c)$.

Wir bestimmen d_1 und d_2 so, dass die Randwerte 1 angenommen werden. Dies liefert:

$$(3) \quad \begin{aligned} d_1 \exp(-\beta/c) + d_2 \exp(\beta/c) &= 1 \\ d_1 \exp(\beta/c) + d_2 \exp(-\beta/c) &= 1. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass

$$d_1 = d_2 = \frac{1}{\exp(\beta/c) + \exp(-\beta/c)} = \frac{1}{2 \cosh(\beta/c)}.$$

Einsetzen in Gleichung (3) liefert

$$(4) \quad u_0(t) = \frac{\cosh(t/c)}{\cosh(\beta/c)}.$$

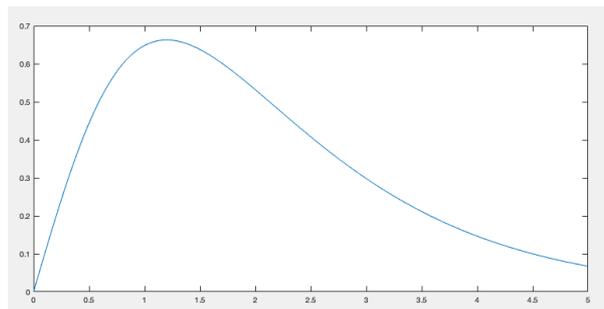
Es bleibt c zu bestimmen. Dazu setzen wir die Lösung u in Gleichung (2) ein. Es folgt für $t = \beta$:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sinh^2(\beta/c)}{c^2 \cosh^2(\beta/c)}}} = \frac{c \cosh(\beta/c)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(\beta/c) + \sinh^2(\beta/c)}} \quad \text{bzw.} \\ c^2 \cosh^2(\beta/c) + \sinh^2(\beta/c) &= \cosh^2(\beta/c) \quad \text{bzw.} \\ c^2 \cosh^2(\beta/c) &= \cosh^2(\beta/c) - \sinh^2(\beta/c). \end{aligned}$$

Mit $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ folgt $c \cosh(\beta/c) = 1$ bzw.

$$(5) \quad \frac{\beta/c}{\cosh(\beta/c)} = \beta.$$

Nun ist $s/\cosh s$ eine auf $\mathbb{R}_{>0}$ strikt positive Funktion mit genau einem Maximum $\beta_0 > 0$. Numerisch: $\beta_0 \sim 0,6627$ in $s_0 \sim 1,1997$.



Graph von $s/\cosh(s)$

Wir erhalten daher, etwas überraschend: Für $\beta > \beta_0$ hat (5) keine Lösung; für $\beta = \beta_0$ gibt es genau eine Lösung c , und für $\beta < \beta_0$ genau zwei, c_1 und c_2 .

Da die Euler-Lagrange-Gleichung lediglich eine notwendige Bedingung liefert, schließen wir: Das Funktional f hat für $\beta > \beta_0$ keine Minimalstelle. Für $\beta = \beta_0$ hat es höchstens eine, und für $\beta < \beta_0$ höchstens zwei, nämlich die Funktionen u aus (4) mit den entsprechenden Werten c_1 und c_2 für c .

Die entstehenden Flächen ergeben sich dann wie folgt (mit $c = 1/\cosh(\beta/c)$ und (2)):

$$\begin{aligned}
f(u_0) &= 2\pi \int_{-\beta}^{\beta} u_0(t) \sqrt{1 + u_0'(t)^2} dt \\
&= 2\pi \int_{-\beta}^{\beta} c (1 + u_0'(t)^2) dt \quad (\text{wegen (2)}) \\
&= 2\pi \int_{-\beta}^{\beta} c \left(1 + \frac{1}{c^2 \cosh^2(\beta/c)} \sinh^2(t/c) \right) dt \\
&\stackrel{s=t/c}{=} 4\pi c\beta + 2\pi c^2 \int_{-\beta/c}^{\beta/c} \sinh^2(s) ds \quad (\text{weil } c \cosh(\beta/c) = 1) \\
&= 4\pi c\beta + 2\pi c^2 \frac{1}{4} [\sinh(2s) - 2s]_{-\beta/c}^{\beta/c} \\
&= 2\pi c\beta + \pi c^2 \sinh(2\beta/c) = 2\pi c\beta + 2\pi c^2 \sinh(\beta/c) \cosh(\beta/c) \\
&= 2\pi c (\beta + \sinh(\beta/c)) \quad (\text{weil } c \cosh(\beta/c) = 1).
\end{aligned}$$

18.14. Bemerkung. Die Funktion $t \mapsto \cosh t$ nennt man Kettenlinie. Die hier entstehende Rotationsfläche heißt *Katenoid*.

H. Fischer und H. Kaul³ merken an, dass für $\beta = \beta_0$ kein lokales Minimum vorliegt. Falls $0 < \beta < \beta_0$ ist, so ergibt sich für die beiden Lösungen u_1 und u_2 zu den zwei möglichen Wahlen $c_1 < c_2$, dass $f(u_2) < f(u_1)$. Die Flächen $f(u_1)$ und $f(u_2)$ wachsen mit β bis zum Maximalwert $2\pi s_0$, mit der oben definierten Zahl $s_0 \sim 1,1997$.

Für $\beta < \beta_0$ ist die zu c_1 gehörige Lösung u_1 instabil unter Störungen, die zu c_2 gehörige stabil. Sei schreiben ferner:

Diese Ergebnisse stehen in Übereinstimmung mit Seifenhautexperimenten. Von den zu $c_1 < c_2$ gehörenden Katenoiden wird nur das mit dem größeren Taillenradius c_2 beobachtet; das zu c_1 gehörende wird wegen seiner Instabilität nicht realisiert. Die Seifenhaut bleibt beim Auseinanderziehen der Kreisringe solange bestehen, bis deren Abstand $2\beta_0 \sim 1,33$ erreicht, danach zerplatzt sie. Im Grenzbereich ist ihr Flächeninhalt $2\pi s_0$ mit $s_0 \sim 1,2$ größer als die Fläche der beiden Kreisringe.

18.15. Definition. Es sei W offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ und $f(u) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u, u') dt$. Wir nennen eine Funktion $g \in C^1([\alpha, \beta] \times W, \mathbb{R})$ ein erstes Integral der Euler-Lagrange-Gleichung, falls

$$t \mapsto g(t, u(t), u'(t)) = \text{constant für jede Extremale } u \text{ von } f.$$

Ein Beispiel dafür ist die Funktion E aus Lemma 18.12. Ein noch einfacheres:

18.16. Lemma. Hängt die Funktion L von der Variable x_k nicht ab, so ist unter den üblichen Differenzierbarkeitsannahmen (vgl. Satz 18.10)

$$g(t) = \partial_{y_k} L(t, u(t), u'(t))$$

ein erstes Integral.

³in: *Mathematik für Physiker*, Band 3, Teubner, Wiesbaden 2006

Beweis. Dies folgt sofort aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \partial_{y_k} L(t, u(t), u'(t)) = \partial_{x_k} L(t, u(t), u'(t)) = 0.$$

◁

Das Brachistochronenproblem oder die schnellste Rutsche. Das Brachistochronenproblem wurde 1696 von Johann Bernoulli als Herausforderung an die besten Mathematiker seiner Zeit gestellt. Gelöst wurde es im folgenden Jahr durch Leibniz (innerhalb von sieben Tagen, nachdem er davon erfahren hatte), von Jakob Bernoulli, dem Bruder Johanns, vom Marquis de l'Hospital, von Ehrenfried Walther von Tschirnhaus und von Isaac Newton⁴

18.17. Das Brachistochronenproblem. Es seien $(0, h)$ und $(b, 0)$ zwei Punkte in \mathbb{R}^2 , $b > 0$, $h > 0$. Gesucht wird eine Funktion mit der Eigenschaft, dass ein auf dem Graph dieser Funktion reibungslos gleitender Massepunkt die kürzestmögliche Zeit braucht, um von $(0, h)$ nach $(b, 0)$ zu kommen (schnellste Rutsche).

Es ist schon zu erwarten, dass der optimale Graph mit einer senkrecht nach unten gerichteten Tangente beginnen wird. Vorsichtshalber wählen wir daher die Koordinaten etwas geschickter:

Mit s bezeichnen wir die Richtung nach unten, startend in 0; s läuft also von 0 bis h . Den Graphen, auf dem das Teilchen läuft, tragen wir nach rechts ab. Die Graphenpunkte bezeichnen wir also mit $(s, B(s))$, $0 \leq s \leq h$, wobei $B : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion ist.

Mit $\gamma : [0, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ werde die zeitliche Bahnkurve des Massepunkts beschrieben. Befindet er sich zu den Zeitpunkten t_1 bzw. t_2 in $u(t_1) = (s_1, B(s_1))$ bzw. $u(t_2) = (s_2, B(s_2))$, und liegen t_1 und t_2 dicht beieinander, so ist die im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ durchlaufene Wegstrecke etwa gleich $(t_2 - t_1)v$, wobei v die mittlere (skalare) Geschwindigkeit in $[t_1, t_2]$ ist. Umgekehrt gilt für die benötigte Zeit

$$(1) \quad t_2 - t_1 \approx \frac{\text{Länge der Strecke, die in } [t_1, t_2] \text{ durchlaufen wird}}{\text{mittlere Geschwindigkeit in } [t_1, t_2]}.$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens am Punkt $(s, B(s))$ ist gegeben durch die in kinetische Energie umgewandelte potentielle Energie ($\frac{1}{2}mv^2 = mgs$, s Höhendifferenz zum Ausgangspunkt, g Erdbeschleunigung); also ist in s_1 die Geschwindigkeit

$$v(s_1) = \sqrt{2gs_1}.$$

Die Länge des Kurvenstücks zwischen $(s_1, B(s_1))$ und $(s_2, B(s_2))$ ist nach 10.2(d) und 10.5:

$$\int_{s_1}^{s_2} \|\gamma'(s)\| ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 + B'(s)^2} ds.$$

Wir erhalten daher für die Zeit T , die das Teilchen benötigt aus (1) im Grenzübergang (Riemann-Integral)

$$T = \int_0^h \frac{\sqrt{1 + B'(s)^2}}{\sqrt{2gs}} ds.$$

Als Randbedingung fordern wir, dass $B(0) = 0$ und $B(h) = b$.

Dies ist ein Variationsproblem mit dem Funktional $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h L(t, u(t), u'(t)) dt$, wobei

$$L(t, x, y) = L(t, y) = \sqrt{\frac{1 + y^2}{t}}.$$

⁴s. E. Knobloch. Leibniz and the Brachistochrone, Documenta Mathematica. Extra Volume ISMP (2012) 15–18.

Zwar ist L nur auf $]0, h]$ stetig differenzierbar; wir können das obige Verfahren dennoch anwenden, indem wir das Integral über $[0, h]$ als uneigentliches Riemann-Integral betrachten. Wenn wir annehmen, dass in einem Extremum B die Funktion $t \mapsto \partial_y L(t, B(t), B'(t))$ stetig differenzierbar ist, so erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt} \partial_y L = \partial_x L$ bzw. (da $\partial_x L \equiv 0$)

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{B'}{\sqrt{1+B'^2}} = c = \text{const.}$$

Damit hat B' ein festes Vorzeichen auf $]0, h]$. Da $B(0) = 0$ und $B(h) = b$ positiv ist, muss an einer Stelle (und somit immer) B' positiv sein. Somit ist auch c positiv, und wir können auflösen:

$$(3) \quad \begin{aligned} B'(t)^2 &= c^2 t (1 + B(t)^2) \quad \text{bzw.} \\ B'(t)^2 (1 - c^2 t) &= c^2 t \quad \text{bzw.} \\ B'(t) &= \frac{\sqrt{c^2 t}}{\sqrt{1 - c^2 t}} = \sqrt{\frac{t}{2r - t}} \quad \text{mit } r = \frac{1}{2c^2}. \end{aligned}$$

Im Prinzip sind wir nun fertig. Wir kennen B' und $B(0)$ und können daher B durch Integration bestimmen.

Die gefundene Lösung hat jedoch keine sehr anschauliche Form. Stattdessen schreibt man den Graphen von B als eine durch eine Variable φ parametrisierte Kurve $(x(\varphi), y(\varphi))$.

Geschickt setzt man

$$x(\varphi) = r(1 - \cos \varphi) = 2r \sin^2(\varphi/2)$$

(vgl. 8.18) für $\varphi \in [0, \varphi_0]$ mit noch zu bestimmendem $0 \leq \varphi_0 < \pi$.

Die Randbedingung erfordert $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ und $(x(\varphi_0), y(\varphi_0)) = (h, B(h)) = (h, b)$. Es folgt, dass $h = 2r \sin^2(\varphi_0/2)$ bzw. $\varphi_0 = 2 \arcsin \sqrt{h/(2r)}$.

Für $y(\varphi) = B(x(\varphi))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(\varphi) &= B'(x(\varphi))x'(\varphi) = \sqrt{\frac{r(1 - \cos \varphi)}{r(1 + \cos \varphi)}} r \sin \varphi \\ &\stackrel{\text{Erweitern}}{=} \sqrt{\frac{(1 - \cos \varphi)^2}{1 - \cos^2 \varphi}} r \sin \varphi = r(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

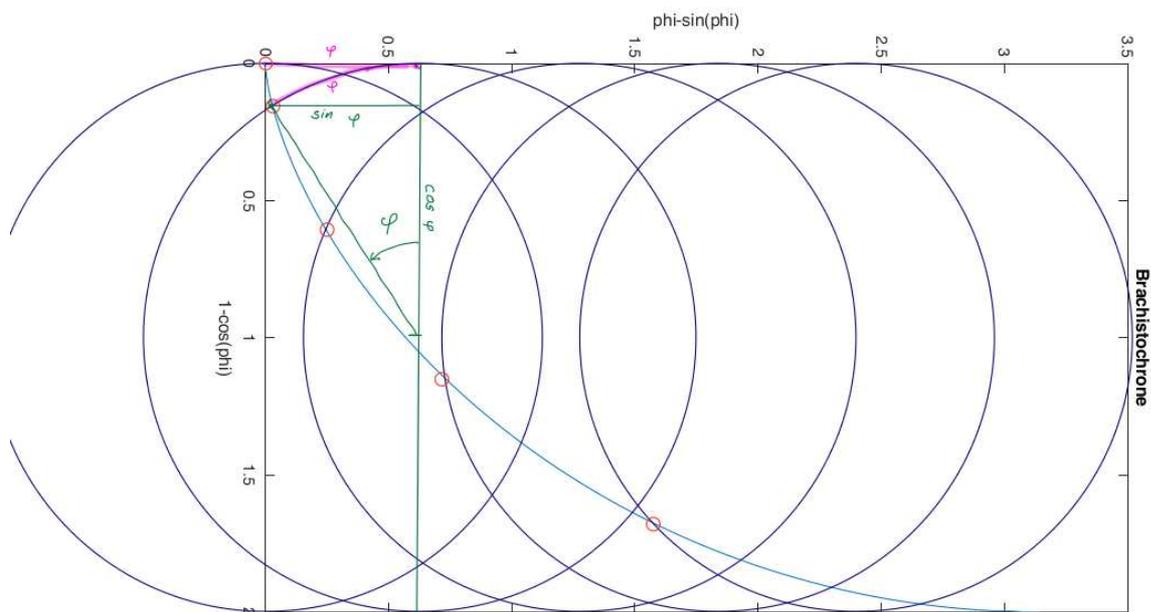
Dies integrieren wir leicht mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Wir erhalten also auf $[0, \varphi_0]$

$$(4) \quad x(\varphi) = r(1 - \cos \varphi)$$

$$(5) \quad y(\varphi) = r(\varphi - \sin \varphi).$$

aus der Bedingung $y(\varphi_0) = b$ folgt dann $r(\varphi_0 - \cos \varphi_0) = b$ und somit $r = \frac{b}{\varphi_0 - \cos \varphi_0}$.

Damit erhält man auch die geometrische Interpretation der Bahn: Der Graph von $(x(\varphi), y(\varphi))$ ist ein Zykloidenbogen, d.h. gerade die Kurve, die ein fester Punkt auf einem abrollenden Kreis beschreibt.



Der Kreis rollt auf der oberen Horizontale nach rechts ab. Der anfangs höchste Punkt (kleiner roter Kreis, in verschiedenen Stadien dargestellt), beschreibt dabei eine Zyklode (hellblaue Kurve). Dass dabei die Gleichungen (4)/(5) (hier für $r = 1$) gelten, ergibt sich aus der Tatsache, dass die Rechtsbewegung durch die Abrollbewegung gegeben ist (rosa Linie im ersten Kreis) und aus der Geometrie (grün im ersten Kreis).

Es bleibt die Frage, ob sich φ_0 und r immer geeignet wählen lassen. Dazu:

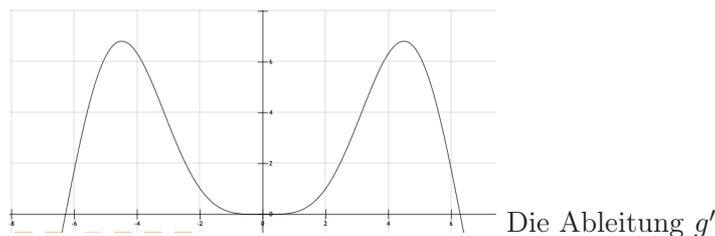
Behauptung. Es gibt genau dann einen Zyklidenbogen, der über dem Intervall $[0, h]$ als Graph darstellbar ist und die Punkte $(0, 0)$ und (h, b) miteinander verbindet, wenn $b/h < \pi/2$.

Beweis. Zunächst beachten wir, dass $\varphi_0 \leq \pi$ sein muss, wenn der Bogen als Graph über $[0, h]$ dargestellt sein soll, da $x(\varphi) = r(1 - \cos \varphi)$ nur auf $[0, \pi]$ injektiv ist (danach wird $x(\varphi)$ wieder kleiner).

Für φ_0 gilt:

$$\frac{b}{h} = \frac{B(h)}{h} = \frac{y(\varphi_0)}{x(\varphi_0)} = \frac{\varphi_0 - \sin(\varphi_0)}{1 - \cos(\varphi_0)}.$$

Nun ist die Funktion $g(\varphi) = \frac{\varphi - \sin(\varphi)}{1 - \cos(\varphi)}$ auf $]0, \pi]$ glatt und streng monoton wachsend. Letzteres ist nicht ganz offensichtlich; zur Verdeutlichung kann man sich den Graphen skizzieren.



Es gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$g(0^+) = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_0 - \sin \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0^+} \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = 0$$

und $g(\pi) = \pi/2$. Also gibt es genau dann (genau) ein $\varphi_0 \in]0, \pi[$, das die obige Gleichung löst, wenn $b/h < \pi/2$.

Wann sind kritische Punkte Extrema?

18.18. Bemerkung. Es sind noch zwei wesentliche Fragen offen:

- Wann ist die Bedingung erfüllt, dass in einem kritischen Punkt u_0 tatsächlich die Funktion $t \mapsto \partial_y L(t, u_0(t), u'_0(t))$ differenzierbar ist?
- Handelt es sich bei den unter den notwendigen Bedingungen gefundenen Funktionen tatsächlich um Extrema?

Wir gehen nun zunächst 18.18(a) an.

18.19. Definition. Es sei $L : [\alpha, \beta] \times W \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $f(u) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u(t), u'(t)) dt$. Man nennt f elliptisch, falls W mit je zwei Punkten (x, y_1) und (x, y_2) auch die Verbindungsstrecke enthält und die Matrix (Hesse-Matrix bzgl. y)

$$\left(\partial_{y_j y_k}^2 L(t, x, y) \right)_{j,k=1,\dots,m}$$

in jedem Punkt $(t, x, y) \in [\alpha, \beta] \times W$ positiv definit ist.

18.20. Satz. Es sei $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $\int_{\alpha}^{\beta} \langle g(t), \varphi'(t) \rangle dt = 0$ für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(] \alpha, \beta[, \mathbb{R}^m)$. Dann ist g konstant.

Beweis. O.B.d.A. sei $m = 1$. Wir wählen eine beliebige Funktion $\varphi_0 \in C_c^{\infty}(] \alpha, \beta[)$ mit $\int \varphi_0 dt = 1$.

Für eine Funktion $\varphi \in C_c^{\infty}(] \alpha, \beta[)$ setzen wir dann

$$\psi(t) = \int_a^t \varphi(s) - \left(\int \varphi \right) \varphi_0(s) ds.$$

Dabei sei $a > \alpha$ so gewählt, dass $\varphi(t) = 0 = \varphi_0(t)$ für $t < a$. Dann ist ψ offensichtlich eine beliebig oft differenzierbare Funktion (berechne ψ'). Ferner gilt $\psi(t) = 0$ für $t < a$ und $\psi(t) = 0$ für t nahe an β , denn dann ist (wegen $\varphi, \varphi_0 \in C_c^{\infty}$)

$$\int_a^t \varphi(s) - \left(\int \varphi \right) \varphi_0(s) ds = \int \varphi - \left(\int \varphi \right) \int \varphi_0 = 0.$$

Also ist $\psi \in C_c^{\infty}(] \alpha, \beta[)$ und somit nach Voraussetzung

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \psi'(t) dt = 0.$$

Dies bedeutet aber, dass

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \left(\varphi(t) - \left(\int \varphi \right) \varphi_0(t) \right) dt = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (g(t) - c) \varphi(t) dt = 0$$

für $c = \int g(t) \varphi_0(t) dt$ und beliebiges $\varphi \in C_c^{\infty}$. Nach Satz 18.8 ist $g - c = 0$, also $g(t) \equiv c$. \triangleleft

18.21. Lemma. Mit den Bezeichnungen von 18.6 sei

$$(1) \quad \delta f(u; \varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \partial_x L(t, u(t), u'(t)), \varphi(t) \rangle + \langle \partial_y L(t, u(t), u'(t)), \varphi'(t) \rangle dt = 0$$

für ein $u \in U$ und alle $\varphi \in C_c^{\infty}([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m)$. Dann ist für jedes $t_0 \in [\alpha, \beta]$

$$\partial_y L(t, u(t), u'(t)) - \int_{t_0}^t \partial_x L(s, u(s), u'(s)) ds \text{ konstant.}$$

Beweis. Die Funktion $g(t) = \int_{t_0}^t \partial_x L(s, u(s), u'(s)) ds$ ist als Stammfunktion einer stetigen Funktion stetig differenzierbar. Partielle Integration liefert mit (1):

$$\int_{\alpha}^{\beta} \langle \partial_y L(t, u(t), u'(t)) - g(t), \varphi'(t) \rangle dt = 0$$

für alle $\varphi \in C_c^{\infty}([\alpha, \beta])$. Aus Satz 18.20 folgt dann die Behauptung. \triangleleft

18.22. Lemma. Das Funktional $f(u) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u(t), u'(t)) dt$ mit der C^2 -Funktion $L : [\alpha, \beta] \times W \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Elliptizitätsbedingung 18.19. Dann ist die Abbildung ('Legendre-Transformation')

$$\Phi : [\alpha, \beta] \times W \rightarrow [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

$$(t, x, y) \mapsto (t, x, \partial_y L(t, x, y))$$

injektiv. Ihr Bild ist von der Form $[\alpha, \beta] \times \Omega$ für eine offene Menge Ω und $\Phi : [\alpha, \beta] \times W \rightarrow [\alpha, \beta] \times \Omega$ ist ein C^1 -Diffeomorphismus.

Beweis. Injektivität Die Gleichung $\Phi(t, x, y) = (t, x, p)$ ist äquivalent dazu, dass $\partial_y L(t, x, y) = p$. Daher ist Φ genau dann injektiv, wenn für jede feste Wahl von (t, x) die Abbildung

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad F(y) = \partial_y L(t, x, y)$$

injektiv ist. Dabei sei $I = \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in W\}$. Es seien $y_1, y_2 \in I$. Nach Voraussetzung ist

$$F'(y) = (\partial_{y_j y_k}^2 L(t, x, y)) = \text{Hess}_y L(t, x, y)$$

positiv definit. Wir setzen $h = y_2 - y_1$ und definieren $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(\tau) = \langle h, F(y_1 + \tau h) \rangle = \sum_{k=1}^m \partial_{y_k} L(y_1 + \tau h) h_k.$$

Dann ist g stetig differenzierbar, und für $h \neq 0$ ist

$$g'(\tau) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \partial_{y_j y_k} L(t, x, y_1 + \tau h) h_j h_k > 0.$$

Insbesondere ist dann $g(0) < g(1)$ und somit $F(y_1) \neq F(y_2)$.

Differenzierbarkeit. Die Jacobi-Matrix von Φ hat die Form

$$\Phi'(t, x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ * & * & H \end{pmatrix},$$

wobei E_m die Einheitsmatrix und $H = (\partial_{y_j y_k}^2 L)$ nach Voraussetzung positiv definit ist.

Damit ist Φ' invertierbar. Nach dem Satz von der lokalen Invertierbarkeit (Satz 12.44) ist damit für jeden Punkt $(t, x, y) \in [\alpha, \beta] \times W$ die Abbildung Φ ein (C^1) -Diffeomorphismus von einer Umgebung von (t, x, y) auf eine Umgebung von $(t, x, \partial_y L(t, x, y))$. Damit ist das Bild von Φ von der Form $[\alpha, \beta] \times \Omega$ für eine offene Menge Ω und Φ ist wegen der Injektivität ein Diffeomorphismus. \triangleleft

18.23. Folgerung. Die Umkehrabbildung zu Φ ist von der Form

$$\Phi^{-1} = \Psi : (t, x, p) \mapsto (t, x, Y(t, x, p))$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion Y ; es gilt

$$\partial_y L(t, x, y) = p \Leftrightarrow y = Y(t, x, p).$$

18.24. Satz. (Hilbert) Das Funktional $f(u) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u(t), u'(t)) dt$ mit der C^2 -Funktion $L : [\alpha, \beta] \times W \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Elliptizitätsbedingung 18.19. Ferner sei $u \in U$ ein kritischer Punkt von f , d.h. es gelte die Bedingung 18.21(1)(= 18.6(2)). Dann ist u zweimal stetig differenzierbar.

Insbesondere ist damit die zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung gemachte Differenzierbarkeitsannahme an $t \mapsto \partial_y L(t, u(t), u'(t))$ in einem kritischen Punkt u stets erfüllt.

Beweis. Nach Lemma 18.21 gibt es ein $c \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\partial_y L(t, u(t), u'(t)) = \int_{t_0}^t \partial_x L(s, u(s), u'(s)) ds + c = g(t).$$

Mit den Bezeichnungen aus 18.23 ist also

$$u'(t) = Y(t, u(t), g(t)).$$

Da Y , u und g stetig differenzierbar sind, ist auch u' stetig differenzierbar und somit $u \in C^2$. \triangleleft

Die Frage, ob eine Funktion, die die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt, auch wirklich ein Extremum liefert, ist i.Allg. nur schwer zu entscheiden. Wenn L nicht von x abhängt, hilft folgende Überlegung:

18.25. Extremalität. Es sei $m = 1$, $C_c^\infty([\alpha, \beta], \mathbb{R}) \leq V \leq C_0^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ und $f(u) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u'(t)) dt$ mit einer von x unabhängigen C^2 -Funktion $L : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Werte $u(\alpha) = a$ und $u(\beta) = b$ seien vorgegeben.⁵ Ferner sei u_0 ein kritischer Punkt bzgl. V . Nach Satz 18.10 erfüllt u_0 die Euler-Lagrange-Gleichung. Da L nicht von x abhängt, gilt:

$$\frac{d}{dt} \partial_y L(t, u_0'(t)) = \partial_x L(t, u_0'(t)) = 0,$$

also

$$(1) \quad \partial_y L(t, u_0'(t)) = c = \text{constant in } t.$$

Ist f elliptisch, d.h. $\partial_{yy} L(t, y) > 0$, so können wir nach dem Satz von der impliziten Funktion 12.48 die Gleichung $\partial_y L(t, y) = c$ (zumindest lokal) nach y auflösen. Wir erhalten eine stetig differenzierbare Funktion $g = g(t, c)$ mit

$$\partial_y L(t, y) = c \Leftrightarrow y = g(t, c).$$

⁵Wäre das nicht der Fall, so hätte es keinen Sinn über einen Raum V mit $V \subseteq C_0^1$ zu variieren.

Gleichung (1) ist also äquivalent dazu, dass $u'_0(t) = g(t, c)$.

Integration mit den Randbedingungen $u_0(\alpha) = a$ und $u_0(\beta) = b$ liefert

$$(2) \quad u_0(t) = a + \int_{\alpha}^t g(s, c) ds \quad \text{und} \quad \int_{\alpha}^{\beta} g(t, c) dt = b - a.$$

Die zweite Gleichung in (2) erfordert, ein c zu finden mit $\int_{\alpha}^{\beta} g(t, c) dt = b - a$. Es gibt höchstens eines, denn aus $\partial_y L(t, g(t, c)) = c$ folgt

$$1 = \frac{d}{dc} c = \partial_{yy}^2 L(t, g(t, c)) \partial_c g(t, c)$$

und somit, wegen der Positivität von $\partial_{yy}^2 L$, dass $\partial_c g(t, c) > 0$; dies wiederum erzwingt, dass

$$\frac{d}{dc} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, c) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \partial_c g(t, c) dt > 0.$$

Nun zur Extremalität: Nehmen wir an, wir haben eine stetig differenzierbare Funktion u_0 gefunden, die die Euler-Lagrange-Gleichung und $u_0(\alpha) = a$, $u_0(\beta) = b$ erfüllt. Dann ist u ein striktes lokales Minimum von f .

Dazu: Es sei (wegen der Vorgabe der Randwerte) $0 \neq \varphi \in C_0^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$. Die Menge

$$K = \{(t, u'_0(t) + s\varphi'(t)) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} : t \in [\alpha, \beta], 0 \leq s \leq 1\}$$

ist als Bild der kompakten Menge $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$ unter der stetigen Abbildung $(s, t) \mapsto (t, u'_0(t) + s\varphi'(t))$ kompakt. Daher nimmt $\partial_{yy}^2 L$ dort ein positives Minimum $\rho > 0$ an. Nach dem Mittelwertsatz existiert für festes t ein $\sigma_t \in]0, 1[$ mit

$$(3) \quad L(t, u'_0(t) + \varphi'(t)) = L(t, u'_0(t)) + \partial_y L(t, u'_0(t)) \varphi'(t) + \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 L(t, u'_0(t) + \sigma_t \varphi'(t)) \varphi'(t)^2$$

Nun ist $\partial_y L(t, u'_0(t)) = c$ und $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) dt = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = 0 - 0 = 0$ und $\partial_{yy}^2 L \geq \rho$. Es folgt für $\varphi \neq 0$:

$$(4) \quad f(u_0 + \varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} L(t, u'_0(t) + \varphi'(t)) dt \geq f(u_0) + c \cdot 0 + \frac{\rho}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)^2 dt > f(u_0).$$

Damit ist u_0 ein striktes Minimum für f unter unter allen C^1 -Funktionen auf $[\alpha, \beta]$, die in α den Wert a und in β den Wert b annehmen.

18.26. Noch einmal die Brachistochrone. Hier ist $L(t, y) = \sqrt{1 + y^2}/\sqrt{t}$. Damit ist L zwar keine C^2 -Funktion auf $[0, h] \times \mathbb{R}$, aber auf $]0, h] \times \mathbb{R}$ mit

$$\partial_y L(t, y) = \frac{y}{\sqrt{t}\sqrt{1 + y^2}} \quad \text{und} \quad \partial_{yy}^2 L(t, y) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1 + y^2}^3} > 0.$$

Gleichung (1) aus 18.25, d.h. $\partial_y L(t, u'_0(t)) = c$, war genau die Gleichung die wir für B' gelöst hatten, s. 18.17(2)/(3).

Für jedes $t \in]0, h]$ erhalten wir die Identität 18.25(3). Mit $B = u_0$ und $M = \max\{|B'(t) + \varphi'(t)| : t \in [0, h]\}$ erhalten wir, dass

$$\partial_{yy}^2 L(t, B'(t) + \sigma_t \varphi'(t)) = \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1 + (B'(t) + \sigma_t \varphi'(t))^2}^3} \geq \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1 + M^2}^3}, \quad t \in]0, h].$$

Wie in 18.25(4) schließen wir, dass

$$\begin{aligned} f(B + \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^h L(t, B'(t) + \varphi'(t)) dt \\ &\geq f(B) + \frac{1}{\sqrt{1 + M^2}^3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^h \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi'(t) dt > f(B). \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Brachistochrone tatsächlich ein Minimum liefert.

18.27. Beispiel. (Weierstraß 1870) Das durch $f(u) = \int_{-1}^1 t^2 u'(t)^2 dt$ auf

$$U = \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$$

definierte Funktional f nimmt kein Minimum an.

Wir betrachten dazu die Folge $u_n(t) = \arctan(nt)/\arctan(n)$. Dafür gilt

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \int_{-1}^1 t^2 \left(\frac{d}{dt} (\arctan(nt)/\arctan(n)) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{(\arctan n)^2} \int_{-1}^1 \frac{n^2 t^2}{(1 + n^2 t^2)^2} dt \\ &\stackrel{s=nt}{=} \frac{1}{(\arctan n)^2} \frac{1}{n} \int_{-n}^n \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} ds \\ &\leq C \frac{1}{(\arctan n)^2} \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei $C = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 (1 + s^2)^{-2} ds$.

Gäbe es eine minimierende stetig differenzierbare Funktion u , so müsste $\int_{-1}^1 t^2 u'(t)^2 dt = 0$ und damit $u' = 0$ gelten. Damit ist u konstant. Dann ist aber $u(-1) \neq -1$ oder $u(1) \neq 1$.