17. Lineare Differentialgleichungen

Im Folgenden sei

- $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall,
- $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$),
- $A : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ stetig,
- $f : J \to \mathbb{K}^n$ stetig.

17.1. Lemma. *Unter den obigen Annahmen ist die Anfangswertaufgabe*

$$x' - A(t)x = f, \quad x(t_0) = x_0$$

auf ganz J eindeutig lösbar.

Beweis. Die Differentialgleichung ist von der Form $x' = F(t,x)$ mit $F(t,x) = A(t)x + f(t)$. Wir wenden zunächst den Satz von Picard-Lindelöf an: $A(t)x$ und f sind stetig in t, x, also ist F stetig. Ist F auch lipschitzstetig in x? Ja, denn

$$\|(f(t) + A(t)x_1) - (f(t) + A(t)x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\| \; \|x_1 - x_2\|.$$

Also gibt es eine maximale Lösung, die wir bis zum Rand fortsetzen können, wenn sie nicht explodiert. Da $\|x'(t)\| \leq \|f(t)\| + \|A(t)\|\|x\|$ ist, kann das nach dem Lemma von Gronwall nicht passieren. $\triangleleft$

17.2. Lemma. *(a) Die Menge aller Lösungen von $x' - A(t)x = 0$ bildet einen Vektorraum, den wir im Folgenden mit $\mathcal{N}_A$ bezeichnen wollen.*

(b) Ist $g \in \mathcal{N}_A$ und $g(\bar{t}) = 0$ für ein $\bar{t} \in J$, so ist $g(t) = 0$ für alle t.

Beweis. (a) Klar, (b) folgt aus 17.1. $\triangleleft$

17.3. Satz. *Es seien $x^1, \dots, x^n$ in $\mathcal{N}_A$. Setze*

$$D(t) = \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist äquivalent:

(i) $D(\bar{t}) = 0$ *für ein* $\bar{t} \in J$.
(ii) $D(t) = 0$ *für alle* $t \in J$.
(iii) $x^1(\bar{t}), \dots, x^n(\bar{t})$ *linear abhängig (als Vektoren in $\mathbb{R}^n$) für ein $\bar{t} \in J$.*
(iv) $x^1(t), \dots, x^n(t)$ *linear abhängig (als Vektoren in $\mathbb{R}^n$) für alle $t \in J$*
(v) $x^1, \dots, x^n$ *linear abhängig als Funktionen.*

Beweis. (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) sind trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (v) Dann existieren $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ (nicht alle Null) mit $\sum_{j=1}^n c_j x^j(\bar{t}) = 0$. Setze $x = \sum c_j x^j$. Dann ist $x \in \mathcal{N}_A$ und $x(\bar{t}) = 0$ also nach 17.2: $x(t) = 0$ für alle t. Damit sind $x^1, \dots, x^n$ linear abhängig.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii), (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) klar. $\triangleleft$

17.4. Satz. *$\dim \mathcal{N}_A = n$.*

Beweis. Die Abbildung, die einer Funktion x aus $\mathcal{N}_A$ den Wert $x(t_0) \in \mathbb{K}^n$ zurordnet, ist offensichtlich linear. Sie ist nach 17.1 sowohl surjektiv (Existenz einer Lösung für jedes x_0) als auch injektiv (Eideutigkeit). Also ist $\mathcal{N}_A \cong \mathbb{K}^n$. $\triangleleft$

17.5. Definition. Eine Basis $\{x^1, \dots, x^n\}$ von $\mathcal{N}_A$ nennen wir ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $x' = A(t)x$. Meist nennt man auch die daraus gebildete Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem.

17.6. Lemma. *$\Phi : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist ein Fundamentalsystem $\Leftrightarrow$ $\Phi' = A\Phi$ und $\det \Phi(t) \neq 0$ für ein (somit alle) $t \in J$.*

Beweis. Klar nach 17.3. ◁

17.7. Satz. *Es sei Φ ein Fundamentalsystem für $x' = A(t)x$.*

(a) *$x(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$ ist die Lösung der AWA $x' = A(t)x, x(t_0) = x_0$.*
(b) *Eine Matrixfunktion $\Psi : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ist ebenfalls ein FS $\Leftrightarrow$ es gibt eine invertierbare Matrix $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ mit $\Psi(t) = \Phi(t)C$.*

Beweis. (a) Setze $c = \Phi(t_0)^{-1}x_0$. Dann ist $x'(t) = (\Phi(t)c)' = \Phi'(t)c = A(t)\Phi(t)c = A(t)x(t)$ und $x(t_0) = x_0$.

(b) $\Leftarrow$ folgt wegen $(\Phi(t)C)' = \Phi'(t)C = A(t)\Phi(t)C$ und $\det(\Phi C) = \det \Phi \det C$ aus 17.6.

$\Rightarrow$ Setze $C(t) = \Phi(t)^{-1}\Psi(t)$. Wegen $\Psi(t) = \Phi(t)C(t)$ folgt aus der Produktregel

$$0 = \Psi' - A\Psi = \Phi'C + \Phi C' - A\Phi C = \Phi C'.$$

Aus der Invertierbarkeit von $\Phi(t)$ folgt $C'(t) = 0$ für alle t. Damit ist C konstante Matrixfunktion. ◁

17.8. Lösung der inhomogenen Aufgabe. Es sei Φ ein Fundamentalsystem für $x' = A(t)x$. Dann hat die Anfangswertaufgabe $x' = A(t)x + f$, $x(t_0) = x_0$ die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}f(s)ds \\ &= \Phi(t)\left[\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}f(s)ds\right]. \end{aligned}$$

Beweis. $x'(t) = A(t)\Phi(t)[\dots] + \Phi(t)\left[0 + \Phi(t)^{-1}f(t)\right] = A(t)x(t) + f(t)$; $x(t_0) = x_0$. ◁

Der Fall einer konstanten Matrix A. Nun sei zusätzlich A konstant in t. Wie in 16.11 sei $J = T^{-1}AT$ die Jordan-Normalform.

17.9. Lemma. *e^{tA} ist ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $x' = Ax$. Ein weiteres ist durch Te^{tJ} gegeben.*

Beweis. e^{tA} ist eine invertierbare Matrix für jedes $t \in \mathbb{R}$. Ferner ist $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ nach 16.7. Damit ist e^{tA} ein Fundamentalsystem. Da $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$ und T invertierbar ist, folgt aus 17.7, dass auch $Te^{tJ} = e^{tA}T$ ein Fundamentalsystem ist. ◁

17.10. Explizit. Man löst die AWA $x' = Ax, x(t_0) = x_0$ folgendermaßen: Man bestimmt Te^{tJ} nach 16.11. Nun berechnet man (z. B. mit Gauß-Algorithmus) die Lösung c von $Tc = v_0$ (d. h. $c = T^{-1}v_0$). Dann ist

$$x(t) = e^{tA}(e^{t_0A})^{-1}x_0 = e^{(t-t_0)A}x_0 = Te^{(t-t_0)J}T^{-1}x_0 = Te^{(t-t_0)J}c.$$

Auch die Lösung der inhomogenen Aufgabe vereinfacht sich:

$$x(t) = Te^{J(t-t_0)}T^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} Te^{J(t-s)}T^{-1}f(s)ds.$$

Wieder kann man $T^{-1}x_0$ bzw. $T^{-1}f(s)$ mit dem Gauß-Algorithmus bestimmen.

17.11. Beispiel. In 16.12 ist

$$Te^{Jt} = \begin{pmatrix} 6e^t & 17e^{2t} & -4e^{2t} + 17te^{2t} \\ 2e^t & 6e^{2t} & -e^{2t} + 6te^{2t} \\ 5e^t & 14e^{2t} & -3e^{2t} + 14te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Sucht man die Lösung zum Startwert $v_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, so löst man $Tc = v_0$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 17 & -4 & 9 \\ 2 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 14 & -3 & 7 \end{array}$$

Vertauschen der ersten beiden Zeilen liefert

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 6 & 17 & -4 & 9 \\ 5 & 14 & -3 & 7 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}$$

Es folgt $c_3 = -1, c_2 = 1, c_1 = -2$.

Die Lösung von $x' = Ax, x(t_0) = x_0$ ist also $x(t) = Te^{J(t-t_0)}c$, bzw.

$$x(t) = -2\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{(t-t_0)} + \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} e^{2(t-t_0)} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2(t-t_0)} - \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} (t-t_0)e^{2(t-t_0)}.$$

17.12. Reelle Lösungen. Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, so ist man auch an *reellen* Lösungen von $x' = Ax$ interessiert. Zunächst bestimmt man über $\mathbb{C}$ alle Eigenwerte von A. Da A reell ist, ist auch das charakteristische Polynom reell. Also ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $f_A(\lambda) = 0$ auch $f_A(\overline{\lambda}) = 0$. Bestimmt man nun $v_1, \dots, v_k$ wie in 16.9 als verallgemeinerte Eigenvektoren in dem Jordankästchen zu λ, so gilt auch

$$(A - \overline{\lambda}\mathrm{Id})\overline{v}_1 = 0, \quad (A - \overline{\lambda}\mathrm{Id})\overline{v}_j = \overline{v}_{j-1}, \quad j = 2, \dots, k.$$

Man erhält also parallel zu den verallgemeinerten Eigenvektoren zu λ diejenigen zu $\overline{\lambda}$ durch Konjugation.

Sind s und $\overline{s}$ die jeweils zugehörigen Spalten in einem Fundamentalsystem, so kann man s und $\overline{s}$ durch die *reellen* Funktionen $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}(s + \overline{s})$ und $\mathrm{Im}\, s = \frac{1}{2i}(s - \overline{s})$ ersetzen und erhält (da die lineare Unabhängigkeit wegen $LH\{s, \overline{s}\} = LH\{\mathrm{Re}\, s, \mathrm{Im}\, s\}$ erhalten bleibt) wiederum ein Fundamentalsystem.

17.13. Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ und folglich die Eigenwerte i und $-i$. Wir bestimmen einen Eigenvektor zu i:

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \end{pmatrix} = 0$$

hat die nichttriviale Lösung $p^1 = \binom{1}{i}$. Durch Konjugation erhalten wir sofort mit $p^2 = \overline{p^1} = \binom{1}{-i}$ einen Eigenvektor zum Eigenwert $-i$. Aus dem resultierenden komplexwertigen Fundamentalsystem

$$\begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ i\,e^{it} & -i\,e^{-it} \end{pmatrix} = (s, \overline{s})$$

erhalten wir ein reellwertiges, indem wir Real- und Imaginärteil der Spalten wählen:

$$\operatorname{Re} s = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im} s = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Als äquivalentes Fundamentalsystem ergibt sich also

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

17.14. Bemerkung. Kennt man das charakteristische Polynom der Matrix A, so erhält man sofort eine Abschätzung für das Wachstum der Lösungen von $x' = Ax$. Beispielsweise folgt sofort aus 16.11:

17.15. Satz. *Haben alle Eigenwerte Realteil $\le \rho$ und ist m die größte algebraische Vielfachheit eines zugehörigen Eigenwerts (d.h. als Nullstelle des char. Polynoms), so ist für eine Konstante $C \ge 0$:*

$$\|e^{tA}\| \le C(1 + |t|)^m e^{\rho t}.$$

Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. Nun seien $a_0, \dots, a_{n-1} : J \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen, $f : J \to \mathbb{K}$ stetig.

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)}(t) = f(t) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$x(t_0) = c_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}. \tag{2}$$

Wir wandeln die Anfangswertaufgabe um in ein System: Wir setzen

$$x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$$

und erhalten als äquivalentes System $X' = AX + F, X(t_0) = X_0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Aus der bisherigen Theorie erhalten wir sofort folgenden Satz:

17.16. Satz. *Die AWA* (1), (2) *ist auf J eindeutig lösbar.*

Die Lösungen der homogenen Gleichung ((1) *mit $f = 0$*) *bilden einen n-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{N}$; n Elemente $x_1, \dots x_n$ in $\mathcal{N}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Matrix*

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & & x_n' \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

in mindestens einem Punkt $t \in J$ regulär ist.
Beachte*: Sie ist nach 17.7 entweder überall singulär oder überall regulär.*

Man nennt eine Basis von $\mathcal{N}$ ein Fundamentalsystem. Φ ist die Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems.

17.17. Lösung der inhomogenen Gleichung. Ist $x_1, \ldots, x_n$ ein Fundamentalsystem, so ist die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (1) (ohne Berücksichtigung von Anfangswerten) gegeben durch

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \int_{t_0}^{t} \frac{\det W_j(s)}{\det W(s)}\, ds, \qquad d_j \in \mathbb{K} \text{ beliebig.}$$

Dabei ist $\det W$ die sog. Wronski-Determinante.

$$W = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W_j = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & 0 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & f & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der AWA (1),(2) erhält man durch geeignete Wahl der d_j, s.u..

Beweis. Wandeln wir die Differentialgleichung (1) in ein System um, so wissen wir aus 17.8, dass eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1} F(s) ds$$

mit der Matrix Φ aus 17.16 gegeben ist. Die Lösung von (1) ist dann die erste Komponente dieses Vektors. Wie sieht die aus?

Sie ist das Integral über die erste Komponente von $\Phi(t)\Phi(s)^{-1}F(s)$. Diese wiederum erhält man, indem man die erste Zeile von $\Phi(t)$, nämlich $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ mit dem Vektor $\Phi(s)^{-1}F(s)$ multipliziert. Nun ist $\Phi(s)^{-1}F(s)$ die Lösung y des Gleichungssystems $\Phi(s)y = F(s)$. Nach der Cramerschen Regel ist also $y_j = \det W_j(s)/\det W(s)$. Dies liefert die gewünschte Formel.

Um die AWA zu lösen, müssen wir nach 17.8 zu dieser speziellen Lösung die erste Komponente von $\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}X_0$ addieren. Diese ist $\sum x_j(t)d_j$, wobei $d = (d_1, \ldots, d_n)$ die Gleichung $\Phi(t_0)d = X_0$ löst. $\triangleleft$

17.18. D'Alembertsches Reduktionsverfahren. Kennt man eine Lösung $z \neq 0$ von

$$x'^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) x^{(j)} = 0, \tag{1}$$

so lässt sich die Bestimmung eines Fundamentalsystems auf die Bestimmung eines Fundamentalsystems einer Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ zurückführen.

Wichtig: Der Beweis gibt das Verfahren konkret an.

Beweis. Wir machen für weitere Lösungen den Ansatz: $y(t) = z(t)c(t)$ und setzen zur Vereinfachung der Notation $a_n := 1$.

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} \sum_{j=0}^{n} a_j (zc)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} z^{(j-l)} c^{(l)} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \left(z^{(j)} c + \sum_{l=1}^{j} \binom{j}{l} z^{(j-l)} c^{(l)} \right) \\ &= 0 + \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=1}^{j} a_j \binom{j}{l} z^{(j-l)} (c')^{(l-1)}. \end{aligned}$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung für c'. Der Koeffizient von $(c')^{(n-1)}$ ergibt sich bei $j = l = n$ als $z(t)$. Da z nicht Null ist, ist $z(t_0) \neq 0$ für ein t_0 [2]. Dann können wir auf einer Umgebung von t_0 durch z dividieren und erhalten dort die übliche Form der Differentialgleichung mit Höchstkoeffizient 1.

Wir finden dazu $n-1$ linear unabhängige Lösungen. Durch Integration finden wir (bis auf Konstanten bestimmte) Funktionen $c_1, \ldots, c_{n-1}$. Wir zeigen, dass $z, zc_1, \ldots, zc_{n-1}$ ein Fundamentalsystem ist: Angenommen, es gäbe $d_0, \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{K}$ mit

$$d_0 z + d_1 z c_1 + \ldots + d_{n-1} z c_{n-1} = 0.$$

Nach Division durch z folgt

$$d_0 + \sum_{j=1} d_j c_j = 0.$$

Ableiten liefert $\sum_{j=1}^{n-1} d_j c_j' = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $c_1', \ldots, c_{n-1}'$ folgt $d_1 = \ldots = d_{n-1} = 0$. Daraus wiederum folgt $d_0 = 0$. ◁

Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Nun seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ konstant. Wir können $J = \mathbb{R}$ wählen. Wir setzen zusätzlich $a_n = 1$ und nennen $\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$ das charakteristische Polynom für die homogene Differentialgleichung

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^{(j)} = 0$$

(es ist tatsächlich das charakteristische Polynom für die Matrix A vor 17.16).

17.19. Satz. Es sei $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{n_j}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

(a) Die Funktionen

$$x_{jk}(t) = t^k e^{\lambda_j t}, \qquad j = 1, \ldots, r, k = 0, \ldots, n_j - 1$$

bilden ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung $\sum a_j x^{(j)} = 0$.

(b) Sind alle a_j reell, so erhält man ein reelles Fundamentalsystem, indem man für $\lambda_j = \alpha + i\beta$ mit $\beta_j \neq 0$ die Lösungen $t^k e^{(\alpha+i\beta)t}$ und $t^k e^{(\alpha-i\beta)t}$ durch den Real- bzw. Imaginärteil $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t$ und $t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$ von $t^k e^{(\alpha+i\beta)t}$ ersetzt.

(c) Die Lösungen der Anfangswertaufgabe erhält man als geeignete Linearkombination der x_{jk}.

[2] Wir können nicht schließen, dass z überall von Null verschieden ist; Lemma 17.1 garantiert nur, dass $(z(t), \ldots, z^{(n-1)}(t))$ nirgends Null ist

Beweis. (a) Wir wissen bereits, dass der Lösungsraum der homogenen Gleichung n-dimensional ist. Es genügt also nachzurechnen, dass die Funktionen x_{jk} zum einen die homogene Gleichung lösen und zum anderen linear unbhängig sind.

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n} a_l (t^k e^{\lambda_j t})^{(l)} &= \sum_{l=0}^{n} a_l \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} (t^k)^{(m)} (e^{\lambda_j t})^{(l-m)} \\ \text{(umsummieren)} &= \sum_{m=0}^{n} \underbrace{(t^k)^{(m)}}_{=0 \text{ für } m>k} \sum_{l=m}^{n} a_l \binom{l}{m} (e^{\lambda_j t})^{(l-m)} \\ &= \sum_{m=0}^{k} (t^k)^{(m)} \sum_{l=m}^{n} a_l \binom{l}{m} \lambda_j^{l-m} e^{\lambda_j t}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{l=m}^{n} a_l \binom{l}{m} \lambda_j^{l-m} = \sum_{l=m}^{n} a_l \binom{l}{m} z^{l-m}\Bigg|_{z=\lambda_j} = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l z^l\right)\Bigg|_{z=\lambda_j} = 0,$$

da $m \leq k \leq n_j - 1$ und λ_j eine n_j-fache Nullstelle ist.

Dass die Funktionen x_{jk} linear unabhängig sind, wird in der Übung gezeigt.

(b), (c): klar. $\triangleleft$