16. Lineare Abbildungen auf Banachräumen. Die Exponentialabbildung

Im Folgenden seien V, W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Die Norm einer linearen Abbildung.

16.1. Definition. Wir nennen $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ beschränkt, falls

$$\|A\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} < \infty.$$

Äquivalent: $\|A\| = \sup_{\|v\|_V = 1} \|Av\|_W$ mit gleicher Begründung wie in 12.19. Stets ist dann

$$\|Av\|_W \leq \|A\| \|v\|_V.$$

Man bezeichnet die Menge aller beschränkten Homomorphismen mit $\mathcal{L}(V, W)$ und schreibt $\mathcal{L}(V)$ statt $\mathcal{L}(V, V)$.

16.2. Lemma.

(a) *$\|\cdot\|$ ist Norm auf $\mathcal{L}(V, W)$.*
(b) *Ist $A \in \mathcal{L}(V, W)$ und $B \in \mathcal{L}(U, V)$, so ist $AB \in \mathcal{L}(U, W)$ und $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ („Submultiplikativität“)*
(c) *Die Norm von Id in $\mathcal{L}(V)$ ist 1.*

Beweis. (a) Es sei $\|v\|_V = 1$.

(i) $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ klar
(ii) $\|(\lambda A)v\|_W = |\lambda| \|Av\|_W$, also $\|\lambda A\| = \sup \|(\lambda A)v\|_W \overset{?!}{=} |\lambda| \sup \|Av\|_W = |\lambda| \|A\|$.
(iii) $\|(A + B)v\|_W \leq \|Av\|_W + \|Bv\|_W$, daher ist

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \|(A + B)v\|_W \leq \sup\{\|Av\|_W + \|Bv\|_W\} \\ &\leq \sup \|Av\|_W + \sup \|Bv\|_W = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

(b) $\|(AB)u\|_W \overset{\mathrm{def}}{=} \|A(Bu)\|_W \leq \|A\| \|Bu\|_V \leq \|A\| \|B\| \|u\|_U$.

(c) Klar. ◁

16.3. Satz. *Für $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ sind äquivalent*

(i) *A ist stetig auf V.*
(ii) *A ist stetig in 0.*
(iii) *A ist beschränkt.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Annahme: A ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge (v_k) in V mit $\|v_k\| = 1$, aber $c_k := \|Av_k\| \to \infty$. Für großes k ist $c_k > 0$, und wir setzen

$$w_k := v_k / \sqrt{c_k}.$$

Dann gilt $\|w_k\| = 1/\sqrt{c_k} \to 0$ aber $\|Aw_k\| = \sqrt{c_k} \to \infty$ – Widerspruch!

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $v_0 \in V$ und (v_k) Folge gegen v_0. Dann gilt $\|Av_k - Av_0\|_W = \|A(v_k - v_0)\| \leq \|A\| \, \|v_k - v_0\|_V \to 0$, d. h. A ist stetig. ◁

16.4. Satz. *Es sei V ein endlich-dimensionaler normierter Raum mit der Norm $\|\cdot\|_V$. Dann gilt:*

(a) *Alle Normen auf V sind äquivalent.*

(b) *V vollständig, d.h. ein Banachraum.*

(c) *Die Einheitssphäre $\{v \in V : \|v\|_V = 1\}$ in V ist kompakt.*

Beweis. (a) Wähle einen Isomorphismus $T : \mathbb{K}^n \to V$. Die Norm von V erzeugt eine Norm auf $\mathbb{K}^n$, indem wir $\|x\| := \|Tx\|_V$ setzen. Auf $\mathbb{K}^n$ sind jedoch alle Normen äquivalent (Satz 7.16), d.h. es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1\|x\|_1 \le \|x\| = \|Tx\|_V \le C_2\|x\|_1. \tag{1}$$

Ist $\|v\|'_V$ eine weitere Norm auf V, so erfüllt sie ebenfalls solche Ungleichungen mit Konstanten C'_1, C'_2. Dann folgt

$$\|v\|_V \le C_2\|T^{-1}v\|_1 \le \frac{C_2}{C'_1}\|v\|'_V \le \frac{C_2C'_2}{C'_1}\|T^{-1}v\|_1 \le \frac{C_2C'_2}{C_1C'_1}\|v\|_V,$$

somit sind $\|v\|_V$ und $\|v\|'_V$ äquivalent.

(b) Ist (v_j) eine Cauchy-Folge in V, so ist $(T^{-1}v_j)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$. Sie hat einen Grenzwert $x \in \mathbb{K}^n$. Wegen (1) folgt, dass $\|v_j - Tx\|_V \le C_2\|T^{-1}v_j - x\|_1 \to 0$, also hat (v_j) den Grenzwert Tx.

(c) analog zeigt man Folgenkompaktheit (äquivalent zur Kompaktheit nach Satz 14.13). ◁

16.5. Satz. *Ist V endlich-dimensional und $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, so ist A beschränkt (und somit stetig).*

Beweis. Wähle eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und versehe V mit der Norm $\|v\|_V = \sum_{j=1}^n |c_j|$ für $v = \sum_{j=1}^n c_jv_j$. Ist nun $\|v\|_V \le 1$ so ist $|c_j| \le 1$ für alle j, also

$$\|Av\|_W \le \sum_{j=1}^n |c_j|\|Av_j\|_W \le \sum_{j=1}^n \|Av_j\|.$$

◁

16.6. Satz. *Ist V normierter Raum, W Banachraum, so ist $\mathcal{L}(V, W)$ ein Banachraum bezüglich der Norm $\|A\| = \sup_{\|v\|_V=1} \|Av\|_W$.*

Beweis. (Vgl. 14.16) Zu zeigen ist nur die Vollständigkeit. Es sei also (A_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(V, W)$ bzgl. der Operatornorm, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere ein n_0 so, dass

$$\|A_k - A_l\| < \varepsilon \text{ für alle } k, l \ge n_0. \tag{1}$$

Zunächst definieren wir eine Abbildung $A : V \to W$, indem wir für jedes $v \in V$ die Folge (A_kv) betrachten. Dies ist eine Cauchyfolge in dem Banachraum W, hat also einen Grenzwert $Av = \lim A_kv$. Ferner gilt:

(i) Diese Abbildung ist linear, wie man sofort sieht.

(ii) Es gilt $A_k \to A$: Ist $\varepsilon > 0$ vorgelegt und n_0 so gewählt, dass (1) gilt, so gilt für alle $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ wegen der Stetigkeit der Norm

$$\|A_kv - Av\| = \lim_{l\to\infty} \|A_kv - A_lv\| \le \varepsilon, \text{ also } \|A_k - A\| \le \varepsilon.$$

(iii) A ist beschränkt: Sind ε, n_0 wie oben, so ist $\|A\| \le \|A_k\| + \varepsilon < \infty$.

◁

Exponentialfunktion von Operatoren.

16.7. Satz. *Es sei V ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(V)$. Wir setzen*

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

(a) *Die Reihe für e^{tA} konvergiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ absolut in $\mathcal{L}(V)$.*

(b) *Die Funktion $t \mapsto e^{tA}$ ist differenzierbar (also auch stetig) auf $\mathbb{R}$, und $(e^{tA})' = A\, e^{tA} = e^{tA}\, A$.*

(c) *$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$, $s, t \in \mathbb{R}$, $e^0 = \mathrm{Id}_V$,*

(d) *Ist zudem $B \in \mathcal{L}(V)$, so gilt: $AB = BA \Leftrightarrow e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}$*

Bemerkung *Alle Eigenschaften gelten auch für komplexe s, t, falls V ein $\mathbb{C}$-Banachraum ist; dies benötigen wir aber nicht.*

Beweis. Dies ist eine Potenzreihe, wie wir sie in Kapitel 10 kennengelernt haben. Ihr Konvergenzradius ist unendlich: Wegen der Submultiplikativität (16.2(b)) ist $\|A^k\| \le \|A\|^k$ und somit $\limsup \sqrt[k]{\|A^k\|/k!} \le \|A\| \lim \sqrt[k]{1/k!} = 0$.

Wir erhalten sofort (a).

(b) Aus Satz 9.17 folgt, dass die Funktion differenzierbar ist und für die Ableitung gilt

$$(e^{tA})' = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^{k-1}}{k!} A^k = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

(c) Wie im skalaren Fall gilt (Cauchy-Produkt): $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+t)^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{s^j t^{k-j}}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{s^j}{j!} A^j \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} A^{k-j} = e^{sA} e^{tA}$.

(d) „$\Rightarrow$“ Vertauschen A und B, so kann man $e^{tA} e^{tB}$ wie im Fall komplexer Zahlen mit dem Cauchyprodukt und dem binomischen Lehrsatz berechnen:

$$e^{tA} e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j t^{k-j}}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A+B)^k = e^{t(A+B)}.$$

Beachte: Für die vorletzte Identität braucht man, dass $AB = BA$ ist.

„$\Leftarrow$“ Berechnet man $e^{tA} e^{tB}$ mit dem Cauchyprodukt (s.o.), so ist der Koeffizient von t^2: $\frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2)$. In $e^{t(A+B)}$ ist er $\frac{1}{2}(A+B)^2$ Aus Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 9.20) folgt $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$, also $AB = BA$. $\lhd$

16.8. Frage. Wie berechnet man e^{tA} für ein $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$? Wichtigstes Hilfsmittel ist die Jordan-Zerlegung:

16.9. Erinnerung: Jordansche Normalform. Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V)$ und $f_A = \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{n_j}$ mit paarweise verschiedenen λ_j das charakteristische Polynom. Dann gibt es Basen B_j von $\mathrm{Kern}\,(\lambda_j \mathrm{Id} - A)^{n_j}$ so, dass für $B = (B_1, \dots, B_r)$ gilt

$${}_B A_B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die $J_j, j = 1, \dots, r$ obere Dreiecksmatrizen von folgender Gestalt:

$$J_j = \begin{pmatrix} J_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{jk_j} \end{pmatrix}$$

wobei die J_{jk} (die sog. Jordan-Kästchen) quadratische Matrizen von der Form

$$J_{jk} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

sind. Bis auf die Reihenfolge der Kästchen ist die Zerlegung eindeutig.

16.10. Lemma. *Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $J = {}_B A_B$ die Jordan-Normalform. Dann ist $J = T^{-1}AT$ mit $T = {}_{\text{kan. Basis}}\mathrm{Id}_B$. Man erhält daher die $n \times n$-Matrix T dadurch, dass man die n Basisvektoren als Spaltenvektoren nebeneinander in das Matrixschema schreibt. Die Matrix e^{tA} lässt sich dann mit folgenden Überlegungen berechnen:*

(a) *Es seien $J_1, \dots J_r$ quadratische Matrizen und*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_r t} \end{pmatrix}.$$

(b) $e^{(\lambda \mathrm{Id} + B)t} = e^{\lambda t} e^{Bt}, \lambda \in \mathbb{C}$

(c) *Für eine $(k \times k)$-Matrix der Form wie unten ist*

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $e^{tA} = e^{(TJT^{-1})t} = Te^{tJ}T^{-1}$.

Beweis.

(a) Kästchensatz

(b) 16.7(f). Beachte $e^{\lambda \mathrm{Id} t} = e^{\lambda t}\mathrm{Id}$.

(c) Folgt, wenn man sich die Potenzen einer solchen Matrix ansieht. Im ersten Schritt ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Bei jeder weiteren Potenzbildung verschiebt sich die Reihe der Einsen weiter nach rechts oben. Startet man mit einer $(k \times k)$-Matrix dieser Form, so ist die k-te Potenz Null.

(d) $e^{t(TJT^{-1})} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(TJT^{-1})^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} TJ^jT^{-1} = Te^{tJ}T^{-1}$.

16.11. Folgerung. Es sei $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ eine Jordanbasis für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $J = {}_BA_B$ die Jordan-Normalform. Dann ist

$$e^{tA} = Te^{Jt}T^{-1} \qquad \text{mit } T = {}_{\text{kanon. Basis}}\mathrm{Id}_B = \text{Spaltenmatrix}\,(w_1, \dots, w_n).$$

Dies ist bereits ein einfach zu berechnender Ausdruck. Es geht aber noch besser:

Man berechnet leicht Te^{tJ}, weil für ein beliebiges k-Tupel von n-Vektoren gilt:

$$(1)\quad \underbrace{(v_1, \dots, v_k)}_{n\times k} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & t^2/2 \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}}_{k\times k} = \underbrace{\left(v_1, tv_1 + v_2, \dots, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}v_1 + \dots + v_k\right)}_{n\times k}.$$

Man erhält dann Te^{Jt}, indem man als $v_1, \dots, v_k$ den zu einem Jordankästchen J_{jl} gehörigen Abschnitt aus der Basis B wählt und die Matrix auf der rechten Seite von (1) noch mit $e^{\lambda_j t}$ multipliziert.

16.12. Beispiel.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -8 & 47 & -8 \\ -4 & 18 & -2 \\ -8 & 39 & -5 \end{pmatrix} \\ \det(x\mathrm{Id} - A) &= \det \begin{pmatrix} x+8 & -47 & 8 \\ 4 & x-18 & 2 \\ 8 & -39 & x+5 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\ &= (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Mögliche Jordanform

$$(*)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad (**)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dazu

$$2\mathrm{Id} - A = \begin{pmatrix} 10 & -47 & 8 \\ 4 & -16 & 2 \\ 8 & -39 & 7 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2, also (**), nicht (*).

Wie sieht die Basis aus?

(a) Eigenvektor zum Eigenwert 1. (Es gibt genau 1 bis auf Streckung.)

$$\begin{pmatrix} 9 & -47 & 8 \\ 4 & -17 & 2 \\ 8 & -39 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -47 & 8 \\ 4 & -17 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_3^1 \end{pmatrix} = 0.$$

Setze $p_3^1 = 5 \Rightarrow p_2^1 = 2 \Rightarrow p_1^1 = 6 \Rightarrow p^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) Eigenvektor zum Eigenwert 2. (Es gibt genau 1 bis auf Streckung.)

$$\begin{pmatrix} 10 & -47 & 8 \\ 4 & -16 & 2 \\ 8 & -39 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -47 & 8 \\ 4 & -16 & 2 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Setze $p_3^2 = 7 \Rightarrow p_2^2 = 3 \Rightarrow p_1^2 = (141 - 56)/10 = 8,5 \Rightarrow p^2 = \begin{pmatrix} 8,5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, bessere Wahl $p^2 = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

(c) Nun bestimme p^3 mit $Ap^3 = 2p^3 + p^2$, d.h. $(2\mathrm{Id} - A)p^3 = -p^2$.

$$\begin{pmatrix} 10 & -47 & 8 \\ 4 & -16 & 2 \\ 8 & -39 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -47 & 8 \\ 4 & -16 & 2 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^3 \\ p_2^3 \\ p_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wähle $p_3^3 = -3 \Rightarrow p_3^2 = -1 \Rightarrow p_3^1 = (-17 + 24 - 47)/10 = -4 \Rightarrow p^3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Also ist eine Basis, bezüglich derer A die Gestalt (**) hat, gegeben durch

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Somit ist

$$T = {}_{\text{kanon. Basis}}\mathrm{Id}_B = \begin{pmatrix} 6 & 17 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 5 & 14 & -3 \end{pmatrix}.$$

und

$$Te^{Jt} = \begin{pmatrix} 6e^t & 17e^{2t} & -4e^{2t} + 17te^{2t} \\ 2e^t & 6e^{2t} & -e^{2t} + 6te^{2t} \\ 5e^t & 14e^{2t} & -3e^{2t} + 14te^{2t} \end{pmatrix}.$$