15. Gewöhnliche Differentialgleichungen

15.1. Definition.

(a) Eine gewöhnliche Differentialgleichung (im Gegensatz zur partiellen) ist eine Gleichung der Form
$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0, \quad t \in J,$$
für eine gesuchte Funktion $x : J \to X$, definiert auf einem Intervall J mit Werten in einem Banachraum X. Dabei ist
$$F : U \subseteq J \times X \times \dots \times X \to Y$$
eine Funktion, in die die Werte von x und seinen Ableitungen eingesetzt werden; Y ist ein weiterer Banachraum. In vielen Fällen ist $Y = \mathbb{R}^m$, d.h., man hat m Gleichungen.

Beispiel: $x'' + x = 0$ bzw. $x'' = -x$ (harmonische Schwingung, $k = 2$, $X = Y = \mathbb{R}$).
$\binom{x_1}{x_2}' - \binom{x_2}{-x_1} = 0$ (Kreisbewegung, $k = 1$, $X = Y = \mathbb{R}^2$.)

(b) Die Differentialgleichung heißt *explizit*, falls sie nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist:
$$x^{(k)} = f(t, x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)).$$
Beispiel: $x' = 2x$ (beschreibt exponentielles Wachstum, $X = Y = \mathbb{R}$).

(c) Eine Differentialgleichung der Form $\sum_{j=0}^{k} A_j(t)x^{(j)} + f(t) = 0$ heißt linear; weiterhin heißt sie *homogen*, falls $f = 0$, und *inhomogen*, falls $f \neq 0$.

Beispiel: $x'' + x' + x = 0$ bzw. $= f(t)$ (gedämpfte Schwingung, ohne bzw. mit Anregung)

(d) Ist $x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ eine Dgl, $t_0 \in J$, so besteht die Anfangswertaufgabe (AWA) darin, eine Lösung x zu finden, deren erste $k-1$ Ableitungen in t_0 die vorgegebenen Anfangswerte
$$x(t_0) = c_0, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = c_{k-1}$$
annehmen.

15.2. Beispiel. Bewegung eines Massepunktes unter dem Einfluss der Schwerkraft:
$$\text{Physik:} \quad x''(t) = -g, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Es folgt für $t_0 \in \mathbb{R}$ fest:
$$x'(t) - x'(t_0) = \int_{t_0}^{t} x''(s)\,ds = -\int_{t_0}^{t} g\,ds = -g(t - t_0).$$
Es folgt
$$x'(t) = -gt + c, \qquad c = gt_0 + x'(t_0)$$
und
$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} (-gs + c)\,ds = -\frac{1}{2}g(t^2 - t_0^2) + c(t - t_0) \\ x(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d \end{aligned}$$
mit
$$d = x(t_0) + \frac{1}{2}gt_0^2 - ct_0 = x(t_0) + \frac{1}{2}gt_0^2 - gt_0^2 - x'(t_0)t_0.$$
Also hat die Lösung der Differentialgleichung die Form $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$, wobei c und d sich aus den Startwerten $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ berechnen lassen. Zu jeder Wahl von $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ gibt es genau eine Lösung.

15.3. Beispiel. Die Anfangswertaufgabe $x' = ax, x(t_0) = x_0$ hat für jede Vorgabe von t_0, x_0 eine eindeutige Lösung, nämlich

$$x(t) = x_0 \, e^{a(t-t_0)},$$

wie wir schon wissen (7.20).

Einige Lösungsverfahren.

15.4. Separation der Variablen. Möglich für skalare Differentialgleichungen der Form

$$x' = f(t)g(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

mit stetigen Funktionen f, g.
Fall I: $g(x_0) = 0$. Dann ist $x \equiv x_0$ eine Lösung.
Fall II: $g(x_0) \neq 0$. Falls eine Lösung existiert, so ist auch $g(x(t)) \neq 0$ für t nahe t_0 wegen der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto g(x(t))$.

Dann gilt dort

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{g(x(s))} ds = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dy}{g(y)}.$$

Dies liefert eine implizite Gleichung der Form $G(t, x) = 0$. Auflösbar nach x?

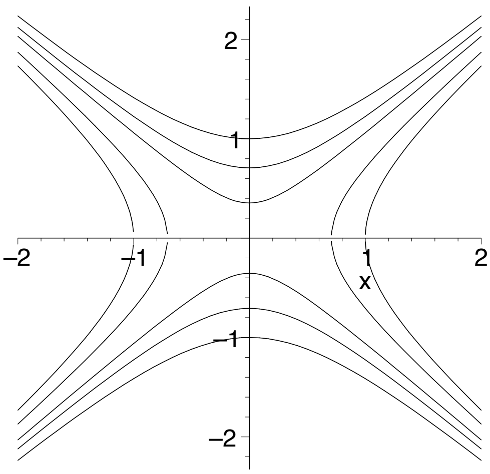
$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds - \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{g(y)}\right] = -\frac{1}{g(x)} \neq 0,$$

folglich: ja.

15.5. Bemerkung. Ist $g(x_0) = 0$, so kann es u.U. vorkommen, dass man Lösungen der Form I und Lösungen der Form II oben zu einer Lösung zusammenstückeln kann.

15.6. Beispiel. $x' = \frac{t}{x}$, $x(t_0) = x_0 \neq 0$, $f(t) = t$, $g(x) = 1/x$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} s\,ds &= \int_{x_0}^{x} y\,dy \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) &= \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) \\
\Rightarrow \quad x^2 - t^2 &= x_0^2 - t_0^2 =: c \\
\Rightarrow \quad x^2 &= c + t^2 \\
\Rightarrow \quad x &= \pm\sqrt{c + t^2} \quad \text{falls } t^2 \geq -c
\end{aligned}$$



15.7. Rückführung auf Separation der Variablen.

(a) $x' = f(at + bx + c)$. Setze $u(t) = at + bx(t) + c$. Dann folgt $u' = a + bx'(t) = a + bf(u)$. Finde u, liefert x.

(b) $x' = f(x/t)$. Setze $u = x/t$. Es folgt

$$u' = \frac{x't - x}{t^2} = \frac{1}{t}\left(x' - \frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}(f(u) - u).$$

Bestimme u mit Separation der Variablen.

15.8. Beispiel. $x' = \dfrac{2x - t}{t} = 2\dfrac{x}{t} - 1, x(t_0) = x_0, t_0 \neq 0$ liefert für $u = x/t$, $f(u) = 2u - 1$:

$$u' = \frac{1}{t}(2u - 1 - u) = \frac{1}{t}(u - 1), \quad u(t_0) = \frac{x(t_0)}{t_0} = \frac{x_0}{t_0} =: u_0.$$

- Ist $u(t_0) = 1$, so ist $u \equiv 1$ (und folglich $x(t) = t$) eine Lösung.
- Ist $u(t_0) \neq 1$, so liefert Separation der Variablen für $t/t_0 > 0, u/u_0 > 0$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} ds &= \int_{u_0}^{u} \frac{1}{y - 1} dy \\ \text{also : } \quad \ln |s| \,\Big|_{t_0}^{t} &= \ln |y - 1| \,\Big|_{u_0}^{u}. \end{aligned} \tag{1}$$

Es folgt $\ln \dfrac{u - 1}{u_0 - 1} = \ln \dfrac{t}{t_0}$. Somit $u = \frac{t}{t_0}(u_0 - 1) + 1$ bzw. $x = tu = t^2 \dfrac{u_0 - 1}{t_0} + t$.

15.9. Lineare skalare Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\begin{aligned} x' + a(t)x &= f(t) && f \not\equiv 0 && \text{inhomogen;} \\ x(t_0) &= x_0 && f \equiv 0 && \text{homogen.} \end{aligned}$$

(a) Homogene Differentialgleichung. Ist $x_0 = 0$, so ist $x(t) \equiv 0$ eine Lösung. Ist hingegen $x_0 \neq 0$, so gilt (Stetigkeit) zumindest für t nahe $t_0 : x(t)/x_0 > 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{x_0} &= -\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds, \qquad \text{also} \\ x(t) &= x_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}. \end{aligned}$$

Somit existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$, und $x(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Inhomogene Differentialgleichung. Ansatz: Variation der Konstanten.
Setze $F(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$. Dann ist $F(t) \neq 0$ für alle t und $F(t_0) = 1$.

Wir machen den Ansatz: $x(t) = C(t)F(t)$. Es folgt $C(t_0) = x(t_0) = x_0$. Ferner ergibt sich:

$$f(t) = x' + a(t)x = C'(t)F(t) + C(t)\underbrace{(F'(t) + a(t)F(t))}_{\substack{=0, \text{ da } F \text{ die} \\ \text{hom. Gleichung löst}}} = C'(t)F(t).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad C'(t) &= \frac{f(t)}{F(t)} = f(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \\ \Rightarrow \quad C(t) &= \int_{t_0}^{t} f(r)\, e^{\int_{t_0}^{r} a(s)\, ds} dr + C(t_0) \\ \Rightarrow \quad x(t) &= \left(\int_{t_0}^{t} f(r)\, e^{\int_{t_0}^{r} a(s)\, ds} dr + x_0\right) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \end{aligned} \tag{1}$$

15.10. Bemerkung. Verzichtet man auf das Stellen einer Anfangsbedingung, so ist $x'+a(t)x = f(t)$ eine inhomogene lineare Gleichung für die Funktion x, und man erhält die Regel:
Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung = allgemeine Lösung der homogenen Gleichung + spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

.

15.11. Beispiel. $x' - \frac{x}{t} = t$, $x(t_0) = x_0$. Hier ist $a(t) = -t^{-1}, f(t) = t$. Wir nehmen an, dass $t/t_0 > 0$; gilt sicher für t nahe t_0

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = -\ln\frac{t}{t_0}.$$

Nach 15.9 (1) ist daher

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\int_{t_0}^{t} r\frac{t_0}{r}dr + x_0\right)\frac{t}{t_0} \\ &= (t_0(t-t_0)+x_0)\frac{t}{t_0} = t(t-t_0) + \frac{x_0 t}{t_0} \\ &= t^2 + t\left(\frac{x_0}{t_0} - t_0\right). \end{aligned}$$

15.12. Bernoullische Differentialgleichung. Für $r \in \mathbb{R}$ betrachte

$$x' + a(t)x + b(t)x^r = 0 \quad \text{mit } x(t_0) = x_0 > 0.$$

Spezialfälle:

- $r = 0$ $\quad x' + a(t)x + b(t) = 0$ $\quad$ inhomogen linear.
- $r = 1$ $\quad x' + a(t)x + b(t)x = 0$ $\quad$ homogen linear.

Also $r \neq 0, 1$. Setze $z = x^{1-r}$. Multiplikation der Differentialgleichung mit $(1-r)x^{-r}$ liefert

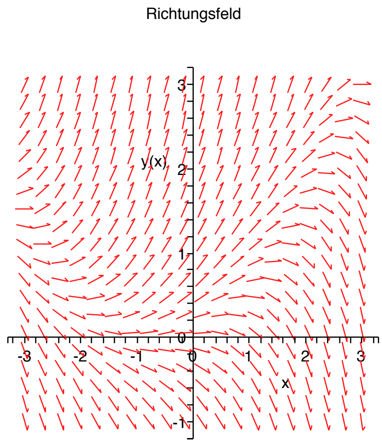
$$(1-r)x'x^{-r} + (1-r)a(t)x^{1-r} + (1-r)b(t)x^0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad z' + (1-r)a(t)z + (1-r)b(t) = 0$$

(inhomogen linear). Übung: Löse $x' - 4\frac{x}{t} - t\sqrt{x} = 0$.

15.13. Richtungsfeld. Gegeben sei die Dgl $x' = f(t,x)$, $(t,x) \in U$. An jedem Punkt (t,x) können wir das 'Steigungselement' $(1, f(t,x))$ anheften und erhalten so das sog. Richtungsfeld für die Differentialgleichung. Wenn eine Lösung $x'(t) = f(t,x)$ erfüllt, hat sie in $(t_0, x(t_0))$ Steigung $f(t_0, x(t_0))$, also die Tangente

$$L_{t_0}(t) = x(t_0) + f(t_0, x(t_0))(t - t_0).$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind also genau diejenigen Kurven, die sich an das Richtungsfeld anschmiegen. Das folgende Diagramm zeigt das Richtungsfeld für $x' = \frac{1}{4}(-t-t^2+4x)$.



Diese Idee benutzt man auch, um Differentialgleichungen numerisch zu lösen (Runge-Kutta-Verfahren. Heuser S. 55 ff).

Numerische Methoden funktionieren allerdings nur dann gut, wenn wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sicherstellen können. Daher:

Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

15.14. Reduktion auf Systeme erster Ordnung. Es sei $x^{(k)} = g(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ eine explizite Differentialgleichung. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= x; \\ x_2 &= x'; \\ &\vdots \\ x_k &= x^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Dann ist das Lösen von $x^{(k)} = g(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ mit den Anfangswerten $x(t_0) = c_0, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = c_{k-1}$ äquivalent zum Lösen von

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2; \\ &\vdots \\ x_{k-1}' &= x_k; \\ x_k' &= g(t, x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $x_1(t_0) = c_0, \dots, x_k(t_0) = c_{k-1}$. Fasst man $x_1, \dots, x_k$ als Vektor x auf, so lautet das letzte System

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = c,$$

mit $f(t, x) = (x_2, \dots, x_k, g(t, x_1, \dots, x_k))$ und $c = (c_0, \dots, c_{k-1})$.

Das heißt: Jede explizite Differentialgleichung ist äquivalent zu einem System 1. Ordnung. Es genügt also, Anfangswertaufgaben der Form $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ zu studieren.

15.15. Satz. **(Existenzsatz von Peano)** *Es sei* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $b > 0$. *Setze*

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \le a, \|x - x_0\| \le b\}.$$

Ist $f = f(t, x) : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig, so hat die Anfangswertaufgabe*

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

mindestens eine Lösung auf dem Intervall $]t_0 - c, t_0 + c[$, *wobei*

$$c = \min\{a, \frac{b}{A}\} \text{ und } A = \max\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in D\}.$$

Beachte: Das Maximum existiert wegen Stetigkeit von f und Kompaktheit von D.

Ohne *Beweis.* Stattdessen zeigen wir den Satz von Picard und Lindelöf, 15.18, unten.

15.16. Definition. Wir nennen eine Funktion $f : U \subseteq X \to Y$, wobei X und Y normierte Räume sind, lipschitzstetig, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt (die sogenannte Lipschitzkonstante) mit der Eigenschaft, dass

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|; \quad u_1, u_2 \in U.$$

15.17. Bemerkung.

(a) Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig; nicht jede stetige Funktion ist lipschitzstetig. Zum Beispiel ist $\sqrt{t}$ auf $[0,1]$ nicht lipschitzstetig: Wäre $\sqrt{t}$ lipschitzstetig, so ergäbe sich für die Wahl $u_1 = t$, $u_2 = 0$ die (offensichtlich falsche) Ungleichung $\sqrt{t} \leq Lt$ für alle $0 < t \leq 1$.

(b) Ist U konvex, d.h. liegt mit x, y auch die Verbindungsstrecke $[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$ in U, und ist f stetig differenzierbar mit $\|f'(u)\| \leq C$ für alle $u \in U$, so ist f lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante C. Das sieht man sofort aus dem Schrankensatz 12.28.

15.18. Satz. (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf). Es sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$, $a > 0$, $b > 0$. Setze

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times X : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Die Funktion $f = f(t,x) : D \to X$ sei stetig; zusätzlich sei f lipschitzstetig in x in folgendem Sinn: Es gibt ein $L \geq 0$ mit

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\,\|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } (t,x_1),(t,x_2) \in D.$$

Dann existiert

$$A = \sup\{\|f(t,x)\| : (t,x) \in D\},$$

und die Anfangswertaufgabe

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

hat eine eindeutige Lösung auf dem Intervall $]t_0 - d, t_0 + d[$, wobei $d = \min\{a, b/A, 1/L\}$.

15.19. Bemerkung. (a) Die Lipschitz-Bedingung aus 15.18 ist stets erfüllt, wenn die Funktion f auf einer Umgebung von D nach x stetig differenzierbar ist und die Ableitung auf D beschränkt ist. Dann ist nämlich

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \sup\{\|\partial_x f(t,x)\|\}\;\|x_1 - x_2\|.$$

(b) Die Einschränkung $d \leq 1/L$ vereinfacht den Beweis. Sie ist jedoch nicht notwendig, wie 15.27 zeigt.

Beweis von 15.18. *Schritt 1.* Wir zeigen die Existenz von A. Dazu beachten wir, dass die Menge $[t_0 - a, t_0 + a] \times \{x_0\}$ kompakt ist (z.B. Folgenkompaktheit benutzen). Wegen der Stetigkeit von f ist dann

$$A_0 = \sup\{\|f(t,x_0)\| : |t - t_0| \leq a\} < \infty.$$

Ist nun $(t_1, x_1) \in D$, so ist

$$\|f(t_0,x_0) - f(t_1,x_1)\| \leq \|f(t_0,x_0) - f(t_1,x_0)\| + \|f(t_1,x_0) - f(t_1,x_1)\| \leq A_0 + L\|x_0 - x_1\|$$

und daher

$$\|f(t_1,x_1)\| \leq \|f(t_0,x_0)\| + A_0 + Lb.$$

Nun sei $J_0 = [t_0 - r, t_0 + r]$ für ein $0 < r < d$.

Schritt 2. Trick: Wir integrieren und sehen, dass x genau dann die AWA $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ auf J_0 löst, wenn x auf J_0 stetig ist und

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \in J_0 \tag{1}$$

gilt.

Schritt 3. Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz an. Wir wählen als Banachraum $Y = C(J_0, X)$ mit der sup-Norm. Darauf definieren wir die Abbildung T durch:

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad x \in Y, t \in J_0.$$

Entscheidende Beobachtung: Nach (1) ist eine Funktion x genau dann eine Lösung der AWA, wenn sie ein Fixpunkt der Abbildung T ist.

Wir wählen als abgeschlossene Teilmenge von Y die Menge

$$M = \{x \in Y : \|x - x_0\|_{\text{sup}} \leq b\}$$

(hier wird x_0 als konstante Funktion aufgefasst) und prüfen die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes nach

(i) Für $x \in Y$ ist die Funktion Tx stetig auf J_0, da $\|Tx(t) - Tx(t')\| \leq A|t - t'|$. Sie gehört also zu Y. Ferner ist für $t \in J_0$

$$\|Tx(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ ds \right\| \leq A|t - t_0| \leq Ar \leq b.$$

somit ist $\|Tx - x_0\|_{\text{sup}} \leq b$ und T liefert T eine Abbildung $M \to M$.

(ii) T ist kontrahierend: Für $x, y \in Y$ und $t \geq t_0$ gilt

$$\begin{aligned} \|Tx(t) - Ty(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} L\|x - y\|_{\text{sup}}\, ds \\ &\leq rL\|x - y\|_{\text{sup}} \end{aligned}$$

Dieselbe Abschätzung erhält man auch für $t \leq t_0$. Damit ist

$$\|Tx - Ty\|_{\text{sup}} \leq rL\|x - y\|_{\text{sup}},$$

und weil $rL < dL \leq 1$ ist, ist T kontrahierend.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein Fixpunkt; dies ist die gesuchte Lösung der Anfangwertaufgabe. $\lhd$

15.20. Beispiel. Wir betrachten die Anfangswertaufgabe $x' = x^{2/3}$, $x(t_0) = x_0$ auf $\mathbb{R}$.

Der Satz von Peano garantiert die Existenz einer Lösung, weil die Funktion $g : x \mapsto x^{2/3}$ stetig ist. Der Satz von Picard und Lindelöf liefert die Eindeutigkeit dort, wo die Funktion g lipschitzstetig ist. Nun ist g für $x \neq 0$ stetig differenzierbar mit $g'(x) = x^{-1/3}$, somit ist g lipschitzstetig auf $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$. Daher ist die Lösung eindeutig, solange sie nicht Null wird.

Was passiert dort?

Für $x_0 \neq 0$ liefert Separation der Variablen die Gleichung

$$\int_{x_0}^{x} y^{-2/3} dy = \int_{t_0}^{t} 1 \; ds$$

bzw. $3(x^{1/3} - x_0^{1/3}) = t - t_0$ oder $x = (\frac{1}{3}(t-t_0) + x_0^{1/3})^3$.

O.B.d.A. sei $x_0 > 0$ und $t_1 < t_0$ die Nullstelle der obigen Funktion x. Dann kann man für jedes $t_2 < t_1$ durch

$$x_{t_2}(t) = \begin{cases} (\frac{1}{3}(t-t_2))^3 & t < t_2 \\ 0 & t_2 \leq t \leq t_1 \\ (\frac{1}{3}(t-t_0) + x_0^{1/3})^3 & t > t_1 \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare (!) Funktion definieren, die die Differentialgleichung erfüllt. Wir erhalten also unendlich viele Lösungen auf $\mathbb{R}$.

Für $x_0 = 0$ und $x_0 < 0$ bitte selbst überlegen.

Wir haben gesehen, dass man auf einem gewissen Intervall um t_0 die Existenz einer Lösung sicherstellen kann. Was passiert aber dann?

15.21. Beispiel. $x' = -x^2, x(t_0) = x_0$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und lipschitzstetig auf jedem Teilintervall $[-R, R]$.

Für $x_0 \neq 0$ liefert Separation der Variablen

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y^2} \, dy = \int_{t_0}^{t} 1 \, ds,$$

also $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = t - t_0$ bzw.

$$x = \frac{1}{t - (t_0 - \frac{1}{x_0})}.$$

Die Lösung ist also für $x_0 \neq 0$ in einer Umgebung von $t = t_0$ eindeutig bestimmt. Für $t \to t_0 - \frac{1}{x_0}$ gilt $|x(t)| \to \infty$, d. h. die Lösung „explodiert“ bei Annäherung an $t_0 - \frac{1}{x_0}$ („in endlicher Zeit“).

Das folgende Lemma zeigt, dass man das Wachstum kontrollieren kann:

15.22. Lemma. (Gronwallsches Lemma) *Es sei J ein Intervall, $t_0 \in J$. Ferner sei $g : J \to \mathbb{R}$ stetig mit $g \geq 0$, und es gelte*

$$g(t) \leq A \left| \int_{t_0}^{t} g(s) ds \right| + B, \quad t \in J$$

mit geeigneten $A, B \geq 0$. Dann gilt für alle $t \in J$

$$g(t) \leq B e^{A|t-t_0|}.$$

Beweis. Zunächst sei $t \geq t_0$. Wir betrachten die Funktion

$$G(t) = A \int_{t_0}^{t} g(s) ds + B.$$

Nach Annahme ist $G'(t) = Ag(t) \leq AG(t)$. Die Separation der Variablen liefert sofort:

$$G(t) \leq G(t_0) e^{A(t-t_0)}.$$

Wegen $g \leq G$ und $G(t_0) = B$ folgt die Behauptung. Analog für $t \leq t_0$. $\triangleleft$

Maximale Lösungen.

15.23. Definition. Es sei $f : U \subseteq \mathbb{R}\times X \to X$ stetig, $J, \tilde{J}$ Intervalle (nicht notwendig offen) und $x : J \to X$ sowie $\tilde{x} : \tilde{J} \to X$ Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(t,x)$. Insbesondere sollen $(t, x(t))$, $t \in J$, und $(t, \tilde{x}(t))$, $t \in \tilde{J}$, in U liegen. Bei (halb-)abgeschlossenen Intervallen gelte die Differentialgleichung in den Randpunkten im Sinn links- bzw. rechtsseitiger Ableitungen.

Man nennt $\tilde{x}$ Fortsetzung von x, falls $J \subseteq \tilde{J}$ und $\tilde{x}|_J = x$. Eine Lösung heißt maximal, falls sie keine Fortsetzung auf ein echt größeres Intervall hat.

15.24. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times X$ offen. Wir sagen, $f : U \to X$ erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich x, falls zu jedem $(t,x) \in U$ eine Umgebung V und eine Konstante L existieren mit

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \quad (t,x_1),(t,x_2) \in V.$$

15.25. Bemerkung. Stetigkeit und Beschränktheit der partiellen Ableitung nach x liefern lokale Lipschitz-Bedingung.

15.26. Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times X$ offen, $(t_0, x_0) \in U$, $f : U \to X$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. x. Sind $x_1 : J_1 \to X$ und $x_2 : J_2 \to X$ zwei Lösungen der AWA auf Intervallen J_1 und J_2 die beide t_0 enthalten, so ist*

$$x_1|_{J_1\cap J_2} = x_2|_{J_1\cap J_2}.$$

Beweis. Wir betrachten $J_+ = J_1 \cap J_2 \cap \{t \ge t_0\}$ und nehmen an, es gebe ein $\bar{t} \in J_+$ mit $x_1(\bar{t}) \ne x_2(\bar{t})$. Zuerst wenden wir den Satz von Picard-Lindelöf auf einer Umgebung von (t_0, x_0) an und sehen, dass die Lösung auf einem Intervall $]t_0 - d, t_0 + d[$ eindeutig ist. Also ist $x_1 = x_2$ auf $J_+ \cap [t_0, t_0 + d[$. Es sei $t_1 = \sup\{s \ge t_0 : x_1 = x_2 \text{ auf } [t_0, s]\}$. Dann ist $t_1 < \bar{t}$ und $x_1(t_1) = x_2(t_1)$ wegen der Stetigkeit von x_1, x_2. Wir wenden nun Picard-Lindelöf in einer Umgebung von $(t_1, x_1(t_1))$ an und erhalten die Eindeutigkeit der Lösung der AWA $x' = f(t,x)$, $x(t_1) = x_1(t_1)$ auf $]t_1 - d_1, t_1 + d_1[$ für ein $d_1 > 0$, so dass $x_1 = x_2$ auf $J_+ \cap [t_0, t_1 + d_1[$ im Widerspruch zur Definition von t_1. Analog auf $J_- = J_1 \cap J_2 \cap \{t \le t_0\}$ $\lhd$

15.27. Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times X$ offen und $(t_0, x_0) \in U$. Ferner $f : U \to X$ sei stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. x. Ist $\dim X = \infty$, so fordern wir zusätzlich, dass f auf allen Mengen der Form*

$$U_\varepsilon = \left\{(t,x) \in U : t_1 \le t \le t_2 \text{ und } \|x\| \le \frac{1}{\varepsilon} \text{ und } \operatorname{dist}((t,x), \partial U) \ge \varepsilon\right\},$$

wobei $\varepsilon > 0$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ sind, beschränkt ist.[1]

Dann existiert eine eindeutige maximale Lösung $x_{\max}$ der Anfangswertaufgabe

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Sie ist definiert auf einem offenen Intervall $]t_-, t_+[$. Ferner gilt

$$t_- = -\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{t \downarrow t_-} \|x_{\max}(t)\| = +\infty$$
$$\text{oder} \quad \lim_{t \downarrow t_-} \operatorname{dist}\{(t, x_{\max}(t)), \partial U\} = 0;$$

[1] Im endlich-dimensionalen Fall ist U_ε als abgeschlossene und beschränkte Menge nach dem Satz von Heine-Borel kompakt und daher f dort beschränkt.

analog gilt für t_+

$$t_+ = +\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{t \uparrow t_+} \|x_{\max}(t)\| = +\infty$$
$$\text{oder} \quad \lim_{t \uparrow t_+} \operatorname{dist}\{(t, x_{\max}(t)), \partial U\} = 0.$$

Kurz: Die Lösungskurve $t \mapsto (t, x_{\max}(t))$ lässt sich solange fortsetzen, bis sie entweder explodiert oder an den Rand von U läuft.

Beweis. Es seien $x_\gamma : J_\gamma \to X$, $\gamma \in \Gamma$ alle Lösungen der AWA auf Intervallen J_γ, die x_0 enthalten. Wir setzen $J_{\max} = \bigcup_\gamma J_\gamma$ und definieren $x_{\max}(t) = x_\gamma(t)$ falls $t \in J_\gamma$. Dies ist sinnvoll, denn ist $t \in J_{\gamma_1} \cap J_{\gamma_2}$ für zwei Intervalle, so stimmen beide Lösungen nach 15.26 auf $J_{\gamma_1} \cap J_{\gamma_2}$ überein. Ferner liefert es per definitionem eine maximale Lösung.

Nehmen wir an, $J_{\max}$ enthielte einen seiner beiden Randpunkte, etwa t_- als linken Randpunkt. Wir setzen $x_- = x_{\max}(t_-)$. Dann liegt (t_-, x_-) im Inneren von U. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist die AWA $x' = f(t, x)$, $x(t_-) = x_-$ auf einem offenen Intervall um t_- lösbar, etwa durch $\tilde{x}$. Dann ist für kleines δ die durch

$$z(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t); & t_- - \delta < t < t_- \\ x_{\max}(t); & t \in J_{\max} \end{cases}$$

definierte Funktion eine Lösung der AWA $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ und eine Fortsetzung von $x_{\max}$ auf ein größeres Intervall. Widerspruch. Daher ist $J_{\max} =]t_-, t_+[$ offen.

Angenommen, die Behauptung des Satzes bezüglich t_- ist falsch. Dann ist $t_- > -\infty$, und es gibt eine Folge $t_j \searrow t_-$ sowie ein $0 < \varepsilon < 1$ mit

$$\|x_{\max}(t_j)\| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}((t_j, x_{\max}(t_j)), \partial U) > 2\varepsilon \text{ für alle } j.$$

Wir setzen

$$U_\varepsilon = \left\{ (t, x) \in U : t_- \leq t \leq t_- + \varepsilon \text{ und } \|x\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \text{ und } \operatorname{dist}((t, x), \partial U) \geq \varepsilon \right\}.$$

Dann ist $U_\varepsilon \subseteq U$ und $U_\varepsilon \neq \emptyset$, da $(t_j, x_{\max}(t_j)) \in U_\varepsilon$. Nach Annahme (oder dem Satz von Heine-Borel im endlich-dimensionalen Fall) ist f auf U_ε beschränkt. Wir setzen

$$A = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in U_\varepsilon\}$$

und wählen N so groß, dass

$$t_- \leq t_N \leq t_- + \frac{\varepsilon}{2(A+1)}.$$

Zentrale Beobachtung. Für $t_- < t \leq t_N$ verlässt die Kurve $(t, x_{max}(t))$ die Menge U_ε nicht.

Dazu: Solange die Kurve in U_ε verläuft, gilt wegen $x'_{\max} = f(t, x_{\max})$

$$\|x_{\max}(t)\| \leq \|x_{\max}(t_N)\| + |t - t_N| \cdot A \leq \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2(A+1)} \cdot A < \frac{1}{\varepsilon},$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}((t, x_{\max}(t)), \partial U) &\geq \operatorname{dist}((t_N, x_{\max}(t_N)), \partial U) - |t - t_N| - \|x_{\max}(t_N) - x_{\max}(t)\| \\ &\geq 2\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2(A+1)} - \frac{\varepsilon}{2(A+1)} \cdot A \\ &> \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher erreicht die Kurve nie den Rand von U_ε.

Weiter. Wir setzen $x_- = \lim_{t \searrow t_-} x_{\max}(t)$. Der Grenzwert existiert, denn für alle $t_- < t \leq t_N$ gilt $(t, x_{\max}(t)) \in U_\varepsilon$, somit $\|x_{\max}(t) - x_{\max}(\tilde{t})\| \leq |t - \tilde{t}|A \to 0$ für $t, \tilde{t}$ mit $t - \tilde{t} \to 0$. Durch $x_{\max}(t_-) =$

x_- wird die Funktion $x_{\max}$ dann stetig auf $[t_-, t_+]$ fortgesetzt. Wegen der Abgeschlossenheit liegt $((t_-, x_-)$ in $U_\varepsilon \subseteq U$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} x_{\max}(t) - x_{\max}(t_N) &= \int_{t_N}^{t} f(s, x_{\max}(s))ds, \text{ für alle } t > t_-, \text{ somit auch} \\ x_{\max}(t_-) - x_{\max}(t_N) &= \int_{t_N}^{t_-} f(s, x_{\max}(s))ds \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von $x_{\max}$ und f. Betrachten des Differenzenquotienten zeigt ferner, dass die linksseitige Ableitung von $x_{\max}$ in t_- existiert mit

$$x'_{\max}(t_-) = f(t_-, x_{\max}(t_-)).$$

Die Lösung der AWA ist damit auf das Intervall $[t_-, t_+[$ fortsetzbar im Widerspruch zur Maximalität von $x_{\max}$. $\lhd$

15.28. Bemerkung. Verzichtet man auf die Lipschitzbedingung, so gilt – bis auf die Eindeutigkeit der Lösung – die Aussage des obigen Satzes ebenfalls.

Parameterabhängige Anfangswertaufgaben.

15.29. Satz. (Abhängigkeit von Parametern). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times X$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \times V \to X$ stetig. Ferner erfülle f eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. x, d.h. zu $((t_0, y_0), v_0)$ in $U \times V$ existieren eine Umgebung W in $U \times V$ und eine Lipschitzkonstante L so, dass*

$$\|f(t, y_1, v) - f(t, y_2, v)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

für alle $((t, y_1), v), ((t, y_2), v) \in W$, und

$$x_0 : V \to X \quad \text{sei stetig mit} \quad (t_0, x_0(v)) \in U \text{ für alle } v \in V.$$

Dann hängt die Lösung $x(\cdot; v)$ der Anfangswertaufgabe

$$(1) \qquad x'(t; v) = f(t, x(t; v), v), \quad x(t_0; v) = x_0(v),$$

stetig von v (bzgl. der sup-Norm auf kompakten Intervallen) ab.

Sind darüber hinaus f und x_0 s-mal stetig differenzierbar nach allen Variablen, so ist auch die Lösung der Anfangswertaufgabe s-mal stetig differenzierbar nach v.

Beweis. Schritt 1. Vorbereitungen. Es sei $v_0 \in V$. Wir zeigen, dass die Lösung der Anfangswertaufgabe (1) in v_0 stetig von v abhängt. Wir setzen $y_0 = x_0(v_0)$. Weil f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, gibt es $a, b, c > 0$ so, dass einerseits

$$U_0 = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times X : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq 2b\} \ \subset U$$

und andererseits

$$W = \{(t, y, v) \in \mathbb{R} \times X \times V : |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq 2b, \|v - v_0\| \leq c\} \subseteq U \times V$$

und f auf W Lipschitzstetig in y mit Lipschitzkonstante L ist.

Schritt 2. Wir zeigen nun, dass

$$A = \sup\{\|f(t, y, v)\| : (t, y, v) \in W\} < \infty.$$

Wir argumentieren dazu ähnlich wie im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. Für festes y_0 nimmt die stetige Funktion $(t, v) \mapsto \|f(t, y_0, v)\|$ auf der kompakten Menge $\{(t, v) : |t - t_0| \leq a, \|v - v_0\| \leq c\}$ ihr Maximum A_0 an. Dann folgt für beliebiges $(t, y, v) \in W$:

$$\begin{aligned} \|f(t, y, v) - f(t_0, y_0, v_0)\| &\leq \|f(t, y, v) - f(t, y_0, v)\| + \|f(t, y_0, v) - f(t_0, y_0, v_0)\| \\ &\leq L\|y - y_0\| + A_0 \leq 2Lb + A_0, \end{aligned}$$

so dass $\|f(t,y,v)\| \le \|f(t_0,y_0,v_0)\| + 2Lb + A$.

Schritt 3. Wir lösen die Aufgabe mit Parameter.

Da x_0 stetig ist, existiert ein $0 < \varepsilon \le c$ mit $\|x_0(v) - x_0(v_0)\| \le b$ für $\|v - v_0\| \le \varepsilon$. Setze $V_0 = \{v \in V : \|v - v_0\| \le \varepsilon\}$. Dann ist (beachte: $y_0 = x_0(v_0)$):

$$U_1 = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times X : |t - t_0| \le a, \|y - x_0(v)\| \le b \text{ für alle } v \in V_0\} \subseteq U_0.$$

Setze

$$D = U_1 \times V_0 \subseteq W.$$

Nun sei $q < 1$ beliebig. Wir setzen

$$\delta = \min\left\{a, \frac{b}{A}, \frac{q}{L}\right\}$$

und zeigen die Existenz der Lösung der Anfangswertaufgabe auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ für alle $v \in V_0$.

Genau wie im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf beobachten wir, dass eine Funktion $x(\cdot; v)$ genau dann die Anfangswertaufgabe $x' = f(t,x,v); x(t_0) = x_0(v)$ löst, wenn sie die Integralgleichung

$$(2) \qquad x(t;v) = x_0(v) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s;v), v)\ ds$$

erfüllt.

Wir lösen nun simultan diese Gleichung für alle $v \in V_0$ mit dem Banachschen Fixpunktsatz. Dazu wählen wir als Banachraum $Y = C([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times V_0, X)$ und als abgeschlossene Teilmenge die Menge $M = \{\varphi \in Y : \|\varphi(t,v) - x_0(v)\| \le b \text{ für alle } v \in V_0\}$. Ferner definieren wir die Abbildung T durch

$$(T\varphi)(t,v) = x_0(v) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s,v), v)\ ds.$$

Dieselbe Rechnung wie im Beweis des Satzes von Picard und Lindelöf zeigt, dass T die Menge M in sich abbildet und eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante q ist. Also gibt es genau eine Funktion φ in M mit $T\varphi = \varphi$.

Für festes v ist dann durch $x(t;v) := \varphi(t,v)$ die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe gegeben.

Schritt 4 Wir zeigen, dass die Abbildung $v \mapsto \varphi(\cdot, v)$ stetig von V_0 nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], X)$ ist. Dazu halten wir zuerst fest, dass die Funktion φ auf der kompakten Menge $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times V_0$ gleichmäßig stetig ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ so, dass

$$\|\varphi(t,v) - \varphi(t,v_0)\| < \varepsilon, \text{ falls } \|v - v_0\| < \delta, t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

Damit ist

$$\|x(\cdot; v) - x(\cdot; v_0)\|_{\sup} \le \varepsilon, \text{ falls } \|v - v_0\| < \delta,$$

und wir erhalten die stetige Abhängigkeit von v.

Dies zeigt den ersten Teil der Aussage, den zweiten zeigen wir hier nicht. $\lhd$

Kurvenscharen und Orthogonaltrajektorien.

15.30. Kurvenscharen und Differentialgleichungen. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für c_0 in Bild$F$ ist

$$\{(t,x) : F(t,x) = c_0\}$$

eine Niveaulinie (Höhenlinie, Äquipotentiallinie) von F. Nehmen wir an, in einer Umgebung eines Punktes (t_0, x_0) aus U mit $F(t_0, x_0) = c_0$ sei $\partial_x F(t,x) \ne 0$. Dann ist die Gleichung

$F(t,x)=c$ nach dem Satz von der impliziten Funktion lokal nach x auflösbar. Wir erhalten eine Lösungskurve $t\mapsto x(t,c)$ mit $F(t,x(t,c))=c$ auf einem Intervall $J\subseteq\mathbb{R}$ und für c nahe an c_0. Wir setzen $x_c(t)=x(t,c)$. Für verschiedene Wahlen von c sind die Kurven x_c als Niveaulinien notwendig verschieden, und wir erhalten eine Menge ('Schar') von Kurven $x_c: J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $F(t,x(t))=c$, parametrisiert durch c für c nahe bei c_0.

Beispielsweise ist durch $x/t^2=c$ eine Schar von Parabeln $x_c(t)=ct^2$ gegeben.

Diese Kurven erfüllen eine Differentialgleichung: Durch Ableiten nach t folgt aus $F(t,x(t))=c$, dass

$$0=\frac{d}{dt}[F(t,x(t)]=\partial_xF(t,x(t))x'(t)+\partial_tF(t,x(t))\quad\text{bzw.}\tag{1}$$

$$x'(t)=-\frac{\partial_tF(t,x)}{\partial_xF(t,x)}.\tag{2}$$

Ist andererseits $x:J\to\mathbb{R}$ eine Funktion, die die Differentialgleichung (1) erfüllt, so ist $F(t,x_c(t))$ konstant. Im Beispiel lautet (1): $0=\frac{x'}{t^2}-2\frac{x}{t^3}$ bzw. $x'=2x/t$ für $t\neq 0$.

15.31. Beispiel. $F(t,x)=t^2-x^2=c$ liefert eine Hyperbelschar. Die zugehörige Differentialgleichung ist $2t-2xx'=0$, also für $x\neq 0$ die Differentialgleichung $x'=t/x$.

15.32. Orthogonaltrajektorien. Es sei F wie oben.

Eine Kurve, die jede der Kurven der Schar orthogonal schneidet, heißt *Orthogonaltrajektorie*. Man findet eine solche Kurve (lokal) wie folgt. Wir beschreiben die Kurvenschar lokal durch die Differentialgleichung 15.30(1). Diese sei von der Form $x'=f(t,x)$.

Die Kurve $t\mapsto(t,x(t))$ hat in t die Ableitung $(1,x'(t))=(1,f(t,x))$. Damit die Orthogonaltrajektorie $t\mapsto(t,y(t))$ darauf senkrecht steht, muss sie die Ableitung $(1,y')=(1,-\frac{1}{f(t,x)})$ haben. Wir erhalten daher als Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorie

$$y'=-\frac{1}{f(t,y)}.$$

15.33. Beispiel.

(a) Die Orthogonaltrajektorie zu der Hyperbelschar aus 15.31 hat die Differentialgleichung $x'=-x/t$. Für $t_0\neq 0$, $x_0\neq 0$ erhält man mit Separation der Variablen für $t/t_0>0$ und $x/x_0>0$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{y}\quad=\quad-\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{s}\quad\text{bzw.}\quad\ln\frac{x}{x_0}=\ln\frac{t_0}{t}\quad\text{bzw. } x(t)=\frac{t_0x_0}{t}.$$

(b) Die Orthogonaltrajektorie zur Parabelschar aus 15.31 hat die Differentialgleichung $x'=-\frac{t}{2x}$. Separation der Variablen liefert für $x_0,t_0\neq 0$

$$x(t)^2-x_0^2=\frac{1}{2}(t_0^2-t^2)\;\text{ bzw. }\;x(t)^2+\frac{1}{2}t^2=x_0^2+\frac{1}{2}t_0^2\;\text{ (Ellipse).}$$

Exakte Differentialgleichungen und Eulersche Multiplikatoren.

15.34. Fragestellung. Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ mit $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ und $(t_0,x_0)\in U$. Wie findet man eine Funktion F, so dass sich die Lösung der Differentialgleichung als Äquipotentiallinie etwa von $F(t,x)=0$ ergibt?

Wir suchen eine auf einer Umgebung U_0 von (t_0,x_0) definierte stetig differenzierbare Funktion $F:U_0\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $F(t_0,x_0)=0$ und (damit wir problemlos auflösen können) $\partial_xF(t,x)\neq 0$ auf U_0.

Wie in 15.30 liefert Differenzieren von $F(t,x(t)) = 0$ nach t die Differentialgleichung

$$(1) \qquad x'(t) = -\frac{\partial_t F(t,x)}{\partial_x F(t,x)} \stackrel{!}{=} f(t,x).$$

Schreiben wir also f in der Form $f(t,x) = -\dfrac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ so suchen wir eine Funktion F mit $\operatorname{grad} F = (P,Q)$, d.h. ein Potential zu dem Vektorfeld (P,Q).

Wenn wir o.B.d.A. annehmen, dass U_0 sternförmig ist und P,Q stetig differenzierbar sind, so existiert nach Satz 13.23 ein Potential genau dann, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, d.h., wenn

$$\partial_x P(t,x) = \partial_t Q(t,x).$$

In diesem Fall findet man F leicht durch Aufintegrieren.

Man nennt traditionell solche Differentialgleichungen exakt und schreibt sie (weil $dx/dt = -P/Q$ gilt) oft in der Form

$$P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0.$$

Das ist nicht nur formal, sondern hat mit Differentialformen zu tun, denen wir in Analysis 3 begegnen. Es zeigt auch, dass die Variablen t und x hier auf gleichem Fuß stehen. U.U. kann es günstiger sein, nach t aufzulösen und die Lösung in der Form $t(x)$ statt $x(t)$ zu suchen.

15.35. Beispiel. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Anfangswertaufgabe $x' = -\dfrac{12tx+3}{6t^2}$, $x(1) = 1$. Für $P(t,x) = 12tx+3$ und $Q(t,x) = 6t^2$ ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Aus $\partial_t F(t,x) = 12tx+3$ folgt, dass $F(t,x) = 6t^2x+3t+c(x)$ mit einer von x abhängigen Konstante $c(x)$. Ableiten nach x liefert $6t^2 + c'(x) = \partial_x F(t,x) = Q(t,x) = 6t^2$. Also ist $c'(x) = 0$, bzw. $c(x)$ konstant. Wir können daher $F(t,x) = 6t^2x + 3t + c$ wählen. Auflösen von $F(t,x) = 0$ nach x ergibt

$$x(t) = -\frac{3t+c}{6t^2}.$$

Die Bedingung $x(1) = 1$ lässt sich durch die Wahl $c = -9$ erreichen. Dann ist $x(t) = \dfrac{3-t}{2t^2}$, $t > 0$.

15.36. Eulersche Multiplikatoren. Wie in 15.34 sei

$$f(t,x) = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}.$$

Erfüllt das Vektorfeld (P,Q) nicht die Integrabilitätsbedingung, so kann man hoffen, dass dies der Fall ist, wenn man den Bruch P/Q mit $M(t,x) \neq 0$ erweitert. Gesucht ist also eine Funktion M ('Integrierender Faktor', 'Eulerscher Multiplikator') derart, dass

$$\partial_x(M(t,x)P(t,x)) = \partial_t(M(t,x)Q(t,x)).$$

In der Regel macht das die Sache schwieriger. Da man aber nur irgendein M finden muss, kann man sich die Suche erleichtern, indem man nur solche von der Form $M(t), M(x)$ o.ä. sucht. Geschicktes Raten hilft.

15.37. Beispiel. Wir bringen $4t + 3x^2 + 2txx' = 0$ in die Form $x' = -(4t+3x^2)/(2tx)$. Für $P = 4t + 3x^2$ und $Q = 2tx$ ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt. Wir suchen ein M von der Form $M(t)$. Die Gleichung

$$\partial_x(MP) = \partial_t(MQ)$$

liefert

$$6xM(t) = 2txM'(t) + 2xM(t).$$

Für $x \neq 0$ schließen wir, dass $2M(t) = tM'(t)$ gelten muss. Dies wird für $M(t) = t^2$ erfüllt. Da $M(t) \neq 0$ gelten soll, schließen wir $t = 0$ aus.

Wir haben dann das Vektorfeld $(4t^3+3x^2t^2, 2t^3x)$ mit der Stammfunktion $F(t,x) = t^4+t^3x^2+c$. Als Lösungen der Differentialgleichung ergeben sich $x(t) = \pm\sqrt{-\frac{t^4+c}{t^3}}$.

15.38. Die Differentialgleichung $x'' = f(x)$**.** Motivation: Physik: Bewegung eines Teilchens der Masse $m = 1$ unter einer Kraft f, die nicht von t abhängt, nach dem Newtonsches Gesetz $f = ma = x''$.

Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f \in C(J, \mathbb{R})$, $a \in J$ beliebig. Definiere

$$U : J \to \mathbb{R} \qquad U(x) = -\int_a^x f(y)\,dy$$

(Bedeutung: potentielle Energie; Arbeit gegen das eindimensionale Kraftfeld f). Dann haben wir die Differentialgleichung

$$x''(t) = -U'(x(t)).$$

Nach dem Satz von Peano existiert lokal eine Lösung. Multipliziere mit $x'(t)$:

$$\begin{aligned} x''(t)x'(t) &= -U'(x(t))\,x'(t) \\ \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}(x')^2\right)' &= -(U(x))' \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(x')^2 + U(x) &= \text{const} = E \qquad \text{(Gesamt-Energie).} \end{aligned} \tag{1}$$

Speziell: Alle Bahnen laufen in Bereichen, wo $U(x) \le E$ ist. Es gilt

$$x' = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$$

(je nachdem, ob im Beobachtungsintervall $x'(t) \ge 0$ oder $x'(t) \le 0$ ist). Separation der Variablen für Startwert $x(t_0) = x_0$

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{2(E - U(y))}}\,dy = t - t_0.$$

Auflösen nach x liefert Lösung.

Nette Beobachtung: Das Integral links liefert die Zeit, die das Teilchen braucht, um von $x(t_0)$ nach $x(t)$ zu kommen.

Spezielles Beispiel. Es seien $x_A < x_B \in \mathbb{R}$ mit $U(x_A) = U(x_B) = E$ und $U(y) < E$ für alle $y \in]x_A, x_B[$.

Es gelte

$$\begin{aligned} U'(x_A) &= -f(x_A) < 0 \\ U'(x_B) &= -f(x_B) > 0. \end{aligned}$$

Damit ist $U > E$ direkt außerhalb des Intervalls $[x_A, x_B]$; die Bewegung verläuft also wegen (1) ganz in $[x_A, x_B]$, sie muss also nach 15.29 für alle Zeiten existieren. Wie sieht sie aus?

Das uneigentliche Riemann-Integral

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dy}{\sqrt{2(E - U(y))}}$$

existiert (weil der Nenner in x_A bzw. x_B nur wie $x^{-1/2}$ divergiert) und liefert die Zeit, die das Teilchen von x_A nach x_B braucht.

Starten wir die Beobachtung zu einer Zeit t_0 mit $x_A < x(t_0) < x_B$, so ist

$$x'(t_0) = \pm\sqrt{2(E - U(x(t_0)))} \neq 0, \text{ o.B.d.A. } x'(t_0) > 0.$$

Dann läuft das Teilchen bis x_B: Es kann nicht vorher stehenbleiben, weil auf jedem Teilintervall $[c,d]$ von $]x_A, x_B[$ die Geschwindigkeit x' von Null weg beschränkt ist (denn $\min_{[c,d]}\{E - U(x)\} > 0$). Es erreicht x_B in endlicher Zeit, weil $T < \infty$. Dort ist $x' = 0$ aber $x'' = f(x_B) < 0$. Also wechselt x' dort das Vorzeichen, und das Teilchen läuft zurück nach x_A, von dort nach x_B usw in periodischer Bewegung mit Periode $2T$.