14. Metrische Räume

Mit Hilfe einer Norm können wir den Abstand $\|x-y\|$ zweier Punkte x, y messen. Eine Metrik ist eine Verallgemeinerung dieses Konzepts:

14.1. Metriken. Es sei M eine beliebige Menge. Wir nennen eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik auf M, sofern sie folgende Axiome erfüllt:

(D1) $d(x,y) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y, \quad x, y \in M$
(D2) $d(x,y) = d(y,x), \quad x, y \in M$
(D3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \quad x, y, z \in M$ „Dreiecksungleichung“

Das Paar (M,d) nennt man einen metrischen Raum.

14.2. Beispiele.

(a) Ist X ein normierter Raum, so ist durch $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik auf X definiert.
(b) Auf einer beliebigen Menge wird durch $d(x,y) = 1$, falls $x \neq y$ und $d(x,x) = 0$ eine Metrik, die sogenannte *diskrete* oder triviale Metrik, definiert. Nicht jede Metrik kommt daher von einer Norm her.
(c) (*Französische Eisenbahnmetrik*) Ist $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$, so kann man eine Metrik d wie folgt definieren:
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \|x\| + \|y\|, & x \neq y \end{cases}.$$
(Skizze! Um von x nach y zu kommen, muss man stets über Paris fahren.)
(d) Es sei X ein Vektorraum, auf dem eine Folge $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3, \ldots$ von Normen gegeben ist. Dann wird - was nicht ganz offensichtlich ist - durch
$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x-y\|_k}{1 + \|x-y\|_k}$$
eine Metrik auf X definiert. Solche Metriken betrachtet man in der Funktionalanalysis.

Klar ist:

14.3. Lemma. *Ist (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$, so liefert die Einschränkung von d auf $A \times A$ eine Metrik auf A („induzierte Metrik“).*

Im Folgenden sei (M,d) ein metrischer Raum. Viele Begriffe verallgemeinern sich unmittelbar von normierten auf metrische Räume:

14.4. Definition. Es sei (M,d) ein metrischer Raum.

(a) Ist $x \in M$ und $\varepsilon > 0$, so nennt man $B(x,\varepsilon) = \{y \in M : d(x,y) < \varepsilon\}$ die ε-Kugel um x.
(b) Man nennt eine Menge U eines metrischen Raums offen, falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x,\varepsilon) \subseteq U$.
(c) Man nennt $A \subseteq M$ abgeschlossen, falls $M \setminus A$ offen ist.
(d) Eine Folge (x_k) konvergiert gegen x, falls zu jedem ε ein n_0 existiert, so dass $d(x_k, x) < \varepsilon$ für alle $k \geq n_0$.
(e) (x_n) heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem ε ein n_0 existiert, so dass $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ für alle $k, l \geq n_0$.
(f) Wir sprechen von einem vollständigen metrischen Raum, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat.

(g) Für $A \subseteq M$ heißt $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ der Durchmesser von A.

(h) Eine Funktion $f : M \to N$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

14.5. Bemerkung. Es seien $(M,d), (N,d')$ metrische Räume. Man sieht wie in Analysis 1:

(a) Die Mengen M und $\emptyset$ sind in M sowohl offen als auch abgeschlossen; beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen, beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen (6.2).

(b) Die Mengen $B(x,\varepsilon)$, $x \in M$, $\varepsilon > 0$, sind offen, (6.2).

(c) $A \subseteq M$ ist genau dann abgeschlossen, falls für jede Folge (x_k) in A mit $x_k \to x \in M$ gilt: $x \in A$ (6.4).

(d) Ein Element $y \in M$ heißt Häufungspunkt von $X \subseteq M$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$, $x \neq y$ existiert mit $x \in B(y,\varepsilon)$. Die Menge aller Häufungspunkte von M ist abgeschlossen (6.5).

(e) Eine Funktion $f : M \to N$ ist genau dann stetig, wenn für jede Folge (x_k) in M mit $x_k \to x \in M$ gilt $f(x_k) \to f(x) \in N$. Äquivalent: Zu jedem $x \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, falls $d(x,y) < \delta$ (5.2, 6.14).

14.6. Definition. Hängt in 14.5(e) das δ nicht von dem x ab, so heißt f gleichmäßig stetig.

14.7. Zum Nachdenken.

(a) Es sei M eine Menge mit der diskreten Metrik. Dann ist *jede* Teilmenge von M offen und abgeschlossen. Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie ab einem festen Index konstant ist. M ist vollständig.

(b) Es sei (X,d) der metrische Raum aus 14.2(d). (Ein Beispiel ist der Raum $C^\infty([0,1])$ der auf $[0,1]$ beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit $\|f\|_k = \max\{\|f^{(j)}\|_{\sup} : j = 0, 1, \ldots, k\}$, der so, wie wir später sehen werden, ein vollständiger metrischer Raum wird.)

Überlegen Sie sich: Eine Folge (x_n) konvergiert gegen x, genau dann, wenn $\|x_n - x\|_k \to 0$ für $k = 1, 2, \ldots$.

14.8. Definition. Es sei $X \subseteq M$, $x \in M$.

(a) Eine Umgebung von x ist eine offene Menge, die x enthält.

(b) Wir nennen x einen inneren Punkt von X, falls X eine Umgebung von x enthält.

(c) Mit X° („Innneres von X“) bezeichnen wir die Menge aller inneren Punkte von X.

(d) x heißt Randpunkt von X, falls jede Umgebung von x in M sowohl ein Element aus X als auch eines aus $M \setminus X$ enthält (es muss nicht notwendig $x \in X$ gelten!).

(e) Der Rand ∂X von X ist die Menge aller Randpunkte von X.

(f) $\overline{X} = X \cup \partial X$ nennt man den Abschluss von X in M.

14.9. Lemma. *Mit obigen Bezeichnungen gilt:*

(a) $\overline{X} = X^\circ \cup \partial X$ *(disjunkt).*

(b) $\overline{X}$ *besteht aus X vereinigt mit den Häufungspunkten von X.*

(c) $\overline{X}$ *ist abgeschlossen.*

(d) $\overline{X} = \bigcap A$, *wobei der Durchschnitt über alle abgeschlossenen Mengen gebildet wird, die X enthalten.*

(e) ∂X *ist abgeschlossen.*

Beweis. (a) Nach Definition ist die Vereinigung disjunkt. Klar: $X^\circ \cup \partial X \subseteq \overline{X}$. Ist $x \in \overline{X} \setminus \partial X$, so ist $x \in X$, und es gibt eine Umgebung von x, die kein Element von $M \setminus X$ enthält. Also $x \in X^\circ$.

(b) Sei x ein Häufungspunkt von X. Ist $x \in X$ so ist $x \in \overline{X}$. Ist $x \notin X$, so enthält jede Umgebung von x ein Element von X (da Häufungspunkt) aber auch eines von $M \setminus X$, nämlich x. Also ist dann $x \in \partial X$. Somit liegen alle Häufungspunkte in $\overline{X}$. Andererseits besteht $\partial X \setminus X$ nach Definition aus Häufungspunkten von X.

(c) Ist $y \notin \overline{X}$, so ist $y \notin X$, und es gibt eine Umgebung von y, die kein Element von X enthält. Dann enthält diese Umgebung auch keinen Häufungspunkt von X, denn mit diesem Punkt enthielte sie auch eine Umgebung davon. Also ist $M \setminus \overline{X}$ offen bzw. $\overline{X}$ abgeschlossen.

(d) $\overline{X}$ ist eine abgeschlossene Menge, die X enthält. Jede abgeschlossene Menge, die X enthält, enthält auch die Häufungspunkte von X, also nach (b) auch $\overline{X}$.

(e) $M \setminus \partial X = X^\circ \cup (M \setminus \overline{X})$ ist offen. $\lhd$

14.10. Definition. Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Wir nennen $K \subseteq M$ folgenkompakt, falls jede Folge in K eine Teilfolge hat, die gegen ein Element von K konvergiert.

(b) Wir nennen $K \subseteq M$ kompakt, wenn K die *Überdeckungseigenschaft* hat: Zu jeder Familie U_i, $i \in I$, von offenen Mengen mit $\bigcup_i U_i \supseteq K$ (man nennt dies ‘offene Überdeckung’) existiert eine endliche Indexmenge $i_1, \ldots, i_m$ mit $\bigcup_{j=1}^m U_{i_j} \supseteq K$. (Man nennt dies eine endliche Teilüberdeckung).

Bisher hatten wir nur mit Folgenkompaktheit operiert. Wir zeigen wir nun, dass die beiden Begriffe in metrischen Räumen äquivalent sind. Damit lassen sich dann alle unsere Beweise aus Kapitel 6 übertragen. Als Beispiel für die Argumentation ohne Folgenkompaktheit hier ein Lemma:

14.11. Lemma. *Es sei K eine kompakte Teilmenge des metrischen Raums (M, d). Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge A von K kompakt.*

Beweis. Es sei $U_i, i \in I$, eine Familie offener Mengen mit $\bigcup U_i \subseteq A$. Dann ist $\bigcup U_i \cup (M \setminus A)$ eine offene Überdeckung von K. Nach Voraussetzung finden wir eine endliche Menge $i_1, \ldots, i_K$ mit

$$\bigcup_{j=1}^{K} U_{i_j} \cup (M \setminus A) \supseteq K.$$

Es folgt, dass $\bigcup_{j=1}^K U_{i_j} \supseteq A$. $\lhd$

14.12. Lemma. *Ist $K \subseteq M$ folgenkompakt, so ist* $\operatorname{diam} K < \infty$.

Beweis. Gäbe es Folgen (x_k) und (y_k) in K mit $d(x_k, y_k) \to \infty$, so hätte (wegen der Folgenkompaktheit) (x_k) eine konvergente Teilfolge (x_{k_j}) gegen ein $x \in K$ und (y_{k_j}) wiederum eine konvergente Teilfolge $(y_{j_{k_l}})$ gegen ein $y \in K$. Für hinreichend großes l wäre $d(x_{j_{k_l}}, x) < 1$ und $d(y_{j_{k_l}}, y) < 1$, also

$$d(x_{j_{k_l}}, y_{j_{k_l}}) \le d(x_{j_{k_l}}, x) + d(x, y) + d(y, y_{j_{k_l}}) < d(x, y) + 2.$$

Widerspruch. $\lhd$

14.13. Satz. *In einem metrischen Raum sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.*

Beweis. Es sei $K \subseteq M$.

„⇒" Es sei (x_k) eine Folge in K. Für $n = 1, 2, \ldots$ definieren wir $F_n \subseteq K$ als den Abschluss (s. 14.8) der Menge $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.

1. *Schritt*: Wir zeigen, dass der Schnitt $\bigcap F_n$ nichtleer ist. Wäre er leer, so wäre $\bigcup (M \setminus F_n) \overset{deMorgan}{=} M \setminus \bigcap F_n = M \supseteq K$ eine offene Überdeckung von K. Nach Annahme gäbe es eine endliche Teilüberdeckung: $K \subseteq \bigcup_{n=1}^N (M \setminus F_n) \overset{\text{de Morgan}}{=} M \setminus \bigcap_{n=1}^N F_n$. Dies ist offensichtlich falsch: Es ist nämlich $\bigcap_{n=1}^N F_n = \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\} \subseteq K$; also fehlen diese Elemente.

2. *Schritt*: Also existiert mindestens ein x in dem Schnitt. Dies heißt aber gerade, dass eine Teilfolge von (x_k) gegen x konvergiert: Da x im Abschluss jeder der Folgen $x_j, x_{j+1}, \ldots$ liegt, existiert zu $\varepsilon_j = \frac{1}{j} > 0$ ein x_{n_j} mit $n_1 < n_2 < \ldots$ und $d(x_{n_j}, x) < \varepsilon_j$.

„⇐" (indirekt) Angenommen, es gäbe eine Überdeckung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ von K ohne endliche Teilüberdeckung (d.h. von der wir nicht endlich viele Mengen U_λ so auswählen können, dass sie K überdecken).

1. *Schritt*: Wir können K durch eine endliche Menge von Kugeln $B(y_j, 1/2)$ überdecken; sonst könnten wir nämlich induktiv eine Folge ohne konvergente Teilfolge konstruieren (und zwar so: z_0 sei beliebig gewählt. Sind $z_0, \ldots, z_{j-1}$ bereits gewählt, so wissen wir, dass $K \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} B(z_k, 1/2)$ mindestens ein Element z_j enthält. Dann ist $d(z_k, z_j) \geq 1/2$ für alle $k < j$. Folglich kann die so konstruierte Folge keine konvergente Teilfolge haben.).

2. *Schritt*: Davon gibt es (nach Annahme) mindestens eine Kugel, etwa $B(x_1, 1/2)$ mit der Eigenschaft, dass $K_1 = K \cap B(x_1, 1/2)$ keine endliche Teilüberdeckung hat. Wir überdecken K_1 mit endlich vielen Kugeln $B(y_j, 1/4)$. Für eine davon, etwa $B(x_2, 1/4)$ hat $K_2 = K \cap B(x_2, 1/4)$ keine endliche Teilüberdeckung.

Iterativ erhalten wir eine Folge von Mengen, $K_j = K \cap B(x_j, 2^{-j})$ mit $x_j \in K$, von denen keine eine endliche Teilüberdeckung hat (insbesondere ist $K_j \neq \emptyset$).

3. *Schritt*: Nach Annahme hat die Folge ihrer Mittelpunkte (x_j) eine konvergente Teilfolge, etwa mit Grenzwert x. Dann liegt x in einer der Mengen U_λ, etwa U_{λ_0}. Nun ist U_{λ_0} offen. Folglich gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{\lambda_0}$. Wir finden ein j, so dass $d(x_j, x) < \varepsilon/2$ und $2^{-j} < \varepsilon/2$. Dann gilt

$$B(x_j, 2^{-j}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U_{\lambda_0},$$

im Widerspruch zu der Annahme, dass $B(x_j, 2^{-j})$ nicht durch endlich viele der U_λ überdeckt werden kann. $\triangleleft$

Wie in Kapitel 6 sieht man nun:

14.14. Satz.

(a) *Eine kompakte Menge ist abgeschlossen.*

(b) *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion ist kompakt.*

(c) *Eine stetige Funktion ist auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig.*

(d) *Eine stetige reellwertige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ihr Maximum und ihr Minimum an.*

14.15. Erinnerung. Es sei M kompakt. Dann können wir auf dem Raum $C(M)$ der stetigen (komplex- oder reellwertigen) Funktionen auf M durch $\|f\|_{\sup} = \max\{|f(x| : x \in M\}$ eine Norm, die sog. Supremumsnorm, definieren.

14.16. Satz. *Ist M kompakt, so ist $C(M)$ ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm.*

Beweis. Es sei (f_k) eine Cauchy-Folge in $C(M)$. Was heißt das? Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 so, dass

(1) $\quad \|f_k - f_l\| < \varepsilon$ für alle $k, l \geq n_0 \quad$ bzw. $\quad |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$ für alle $k, l \geq n_0, x \in M$.

Schritt 1. Wir suchen eine Grenzfunktion. (Trick) Es sei $x \in M$ fest. Dann ist wegen (1) die Folge $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Sie hat also einen Grenzwert, den wir $f(x)$ nennen. Wir erhalten so eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$.

Schritt 2. (f_n) konvergiert gegen f in der Supremumsnorm. (Trick) Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 so, dass $|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon/2$ für alle $k, l \geq n_0$, $x \in M$. Dann gilt aber auch

(2) $$|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \text{ für alle } k \geq n_0, x \in M,$$

denn für die Folge $a_l = |f_k(x) - f_l(x)|$ gilt $a_l < \varepsilon/2$ für alle $l \geq n_0$, also wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion $|f_k(x) - f(x)| = \lim a_l \leq \varepsilon/2$. (2) zeigt die Konvergenz $f_k \to f$ in der Supremumsnorm.

Schritt 3. f ist stetig, weil der gleichmäßige (=sup-Norm-) Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen stetig ist. $\lhd$

14.17. Definition.

(a) Eine Menge Z in einem metrischen Raum M heißt zusammenhängend, falls sie sich *nicht* durch zwei disjunkte offene Teilmengen von M, die mit Z jeweils nichtleeren Durchschnitt haben, überdeckt werden kann. Mit anderen Worten: Finden wir offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ mit $Z \subseteq U \dot\cup V$, so ist $Z \cap U = \emptyset$ oder $Z \cap V = \emptyset$.

(b) Eine Menge W heißt wegzusammenhängend, falls je zwei Punkte durch einen stetigen Weg verbunden werden können (d.h., zu $x, y \in W$ existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to W$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$).

14.18. Lemma. *Die zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.*

Beweis. Übung. $\lhd$

14.19. Lemma. *Ist $f : M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen M und N, so ist das Bild jeder zusammenhängenden Teilmenge Z von M in N zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $f(Z) \subseteq U \dot\cup V$ mit disjunkten offenen Mengen $U, V \subseteq M$. Dann ist $Z \subseteq f^{-1}f(Z) = f^{-1}(U) \dot\cup f^{-1}(V)$. Wegen der Stetigkeit von f sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen. Da Z nach Annahme zusammenhängend ist, muss also $f^{-1}(U) \cap Z = \emptyset$ oder $f^{-1}(V) \cap Z = \emptyset$ gelten. Also ist eine der Mengen $f(Z) \cap U$ oder $f(Z) \cap V$ leer. $\lhd$

14.20. Satz.

(a) *Jede wegzusammenhängende Menge W ist zusammenhängend.*

(b) *Jede zusammenhängende offene Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend.*

Beweis. (a) Annahme, W ist nicht zusammenhängend; $W \subseteq U \dot\cup V$ und $x \in U \cap W$, $y \in V \cap W$. Dann existiert ein stetiger Weg $\gamma : [0,1] \to W$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Als Bild der zusammenhängenden Menge $[0,1]$ ist $\gamma([0,1])$ zusammenhängend im Widerspruch dazu, dass wir schreiben können $\gamma([0,1]) \subseteq U \dot\cup V$ mit $x \in \gamma([0,1]) \cap U$ und $y \in \gamma([0,1]) \cap V$.

(b) Es sei $X \neq \emptyset$ offen und zusammenhängend. Wähle $a \in X$ beliebig. Setze

$$X_a = \{x \in X : \exists \gamma \in C([0,1], X) \text{ mit } \gamma(0) = a, \gamma(1) = x\}.$$

1. *Schritt.* X_a ist offen. Ist $x \in X_a$ und ε so klein, dass $B(x, \varepsilon) \subseteq X$, so lässt sich jeder Punkt y aus $B(x, \varepsilon)$ mit a verbinden, indem man zuerst auf einem stetigen Weg nach x geht und von dort auf gerader Strecke nach y.

2. *Schritt.* $X \setminus X_a$ ist ebenfalls offen: Es sei $x \in X$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq X$. Angenommen, es gäbe ein $y \in X_a \cap B(x, \varepsilon)$. Dann so liesse sich x mit a auf stetigem Weg verbinden: Zunächst geht man auf einem geeigneten Weg nach y, dann auf gerader Strecke nach x.

Dies liefert eine Zerlegung von X in zwei disjunkte offene Mengen. Da X zusammenhängend ist, muss eine leer sein. Notwendigerweise ist dies $X \setminus X_a$. $\triangleleft$