13. Kurvenintegrale, Vektorfelder und Potentiale

13.1. Definition/Erinnerung.

(a) Eine Funktion $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nennt man ein Vektorfeld.

(b) Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nennt man eine Kurve.

(c) Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt stückweise glatt, falls es eine Partition $a = t_0 < t_1 \ldots < t_N = b$ von $[a, b]$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$, $j = 1, \ldots, N$, stetig differenzierbar ist.

13.2. Definition. Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise glatte Kurve mit Bild $\gamma = \Gamma$, $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren das Kurvenintegral von F über γ

$$\int_\gamma \langle F, dx\rangle \tag{1}$$

durch

$$\int_\gamma \langle F, dx\rangle = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt.$$

Dabei ist die Partition wie oben.

13.3. Bemerkung.

(a) Manchmal schreibt man statt $\int_\gamma \langle F, dx\rangle$ auch $\sum \int_\gamma F_i\, dx_i$, etwa $\int_\gamma (xdy - ydx)$ in $\mathbb{R}^2$

(b) Motivation aus der Mechanik, wo Arbeit gegen ein Kraftfeld entlang der Kurve geleistet wird. Auf kleinen Stücken gilt $W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}$

(c) Eigentlich betrachtet man hier Differentialformen. Mehr dazu später.

13.4. Beispiel. In $\mathbb{R}^2$ sei $F(x, y) = (1, 1)$ und $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist

$$\int_\gamma \langle F, dx\rangle = \int_0^\pi \langle (1, 1), (-\sin t, \cos t)\rangle dt = \int_0^\pi -\sin t + \cos t dt = [\cos t + \sin t]|_0^\pi = -2.$$

13.5. Lemma und Bemerkung. *Das Integral $\int_\gamma \langle F, dx\rangle$ ist von der Kurvenparametrisierung unabhängig, solange die Orientierung erhalten bleibt.*

Man schreibt daher in (1) oft $\int_\Gamma$ statt $\int_\gamma$ und spricht von der orientierten Kurve Γ. Die Parametrisierung muss sich der Leser selbst suchen; eine geschickte Wahl spart viel Arbeit.

Beweis. Ist $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ bijektiv und differenzierbar mit $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$, so ist für die umparametrisierte Kurve $\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi$:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde\gamma} \langle F, dx\rangle = \int_c^d \langle F(\gamma \circ \varphi(s)), (\gamma \circ \varphi)'(s)\rangle\, ds &= \int_c^d \langle F(\gamma(\varphi(s)), \gamma'(\varphi(s))\rangle \varphi'(s)\, ds \\ &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_\gamma \langle F, dx\rangle.\end{aligned}$$

Ändern wir die Orientierung, so kehrt sich das Vorzeichen um. ◁

13.6. Definition. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Man sagt, F habe das Potential oder auch die Stammfunktion V auf U, falls $V : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion ist mit $\operatorname{grad} V = F$. In diesem Fall nennt man F das Gradientenfeld zu V.

13.7. Satz. *Das Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ habe das Potential $V \in C^1(U, \mathbb{R})$. Dann gilt für jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit* $\operatorname{Bild} \gamma = \Gamma \subseteq U$

$$\int_\Gamma \langle F, dx\rangle = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

(Potential am Endpunkt − Potential am Anfangspunkt).

Beweis. O.B.d.A. γ glatt

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle F, dx\rangle &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b \langle \operatorname{grad} V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b (V \circ \gamma)'(t)\, dt \\ &= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)).\end{aligned}$$

$\triangleleft$

13.8. Folgerung. *Hat F ein Potential $V \in C^1(U, \mathbb{R})$, so gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve, die in U verläuft,*

$$\int_\Gamma \langle F, dx\rangle = 0.$$

13.9. Beispiel. Das Vektorfeld F aus 13.4 hat das Potential $V(x, y) = x + y$. Es gilt also $\int_\gamma \langle F, dx\rangle = V(\gamma(\pi)) - V(\gamma(0)) = V(-1, 0) - V(1, 0) = -2$.

Frage: Wann hat F ein Potential?

13.10. Notwendige Bedingung. Hat $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein Potential $V \in C^2(U, \mathbb{R})$, so ist

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \qquad \text{„Integrabilitätsbedingung“}$$

nach dem Satz von Schwarz, da $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$.

13.11. Beispiel. Die Bedingung aus 13.10 ist nicht hinreichend. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachte

$$F(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt: Dieses Vektorfeld ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Für die geschlossene glatte Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt aber

$$\int_\gamma \langle F, dx\rangle = \int_\gamma (-y\, dx + x\, dy) = \int_0^{2\pi} (-\sin t\,(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t)\, dt = 2\pi.$$

Daher kann F nach 13.8 kein Potential haben.

13.12. Definition. Ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. (Zum Begriff „zusammenhängend“ mehr im nächsten Kapitel.)

Im $\mathbb{R}^n$ gilt: Die offene Menge U ist genau dann zusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten $y_1, y_2 \in U$ eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \to U$ existiert mit $\gamma(a) = y_1, \gamma(b) = y_2$.

13.13. Satz. *Sei U ein Gebiet und $V_1, V_2 \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit*

$$\operatorname{grad} V_1 = \operatorname{grad} V_2.$$

Dann ist $V_1 - V_2 = \text{const}$. Genau dann liefern also zwei Potentiale dasselbe Gradientenfeld, wenn sie bis auf eine Konstante übereinstimmen.

Beweis. Wähle einen festen Punkt $y_0 \in U$. Nun sei y ein beliebiger Punkt in U, $\gamma : [a, b]$ eine stückweise glatte Kurve in U von y_0 nach y. Dann gilt nach 13.7

$$V_1(y) - V_1(y_0) = \int_\gamma \langle \operatorname{grad} V_1, dx\rangle = \int_\gamma \langle \operatorname{grad} V_2, dx\rangle = V_2(y) - V_2(y_0).$$

Also $V_2(y) - V_1(y) = V_2(y_0) - V_1(y_0) = \text{const } \forall y$.

13.14. Satz. *Es sei U ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, F ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann ist äquivalent*

(i) *Für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve ist $\int_\gamma \langle F, dx\rangle = 0$.*

(ii) *F besitzt ein Potential.*

Beweis. Nach 13.8 ist nur (i)$\Rightarrow$(ii) zu zeigen.

Wähle einen festen Punkt $x_0 \in U$. Ist $x \in U$, so wähle eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$, dann setze

$$V(x) = \int_\gamma \langle F, dx\rangle.$$

Wir zeigen: Der Wert von V hängt nicht von der Wahl der Kurve ab. Ist $\delta : [0, 1] \to U$ eine weitere solche Kurve, $\delta(0) = x_0, \delta(1) = x$, so definiere $\alpha : [0, 2] \to U$ durch

$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t) & : \ 0 \le t \le 1 \\ \delta(2-t) & : \ 1 \le t \le 2 \end{cases}.$$

Dann ist α geschlossen und stückweise glatt, also nach Voraussetzung

$$0 = \int_\alpha \langle F, dx\rangle = \int_\gamma \langle F, dx\rangle - \int_\delta \langle F, dx\rangle,$$

und somit

$$\int_\gamma \langle F, dx\rangle = \int_\delta \langle F, dx\rangle.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{grad} V = F$:

Für hinreichend kleines h können wir $V(x + he_j)$ definieren durch

$$V(x + he_j) = \int_\gamma \langle F, dx\rangle + \int_{\alpha_h} \langle F, dx\rangle,$$

wobei $\alpha_h : [0, h] \to \mathbb{R}^n$ definiert ist durch $\alpha_h(t) = x + te_j$. Es folgt

$$\frac{V(x + he_j) - V(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \langle F(x + te_j), e_j\rangle\, dt = \frac{1}{h}\int_0^h F_j(x + te_j)\, dt \overset{\text{de l'Hospital}}{\to} F_j(x),$$

da $\frac{d}{dh}\int_0^h F_j(x + te_j)\, dt = F(x + he_j) \to F_j(x)$. ◁

13.15. Definition. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, falls es einen Punkt $x_0 \in U$ (den sogenannten Sternpunkt) gibt, so dass für jedes $x \in U$ die Strecke $\{x_0 + t(x - x_0) : 0 \le t \le 1\}$ ganz in U liegt.

13.16. Beispiel.

(a) Kugeln sind sternförmig.

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$ ist sternförmig mit Sternpunkt $(-1,0)$.

(c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig.

13.17. Lemma. *Ist U offen und sternförmig, und erfüllt $F \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ die Integrabilitätsbedingung, so hat F auf U eine Stammfunktion.*

Beweis. Wir bezeichnen mit x_0 den Sternpunkt und definieren für $x \in U$ die Kurve $\gamma_x : [0,1] \to U$ durch $\gamma_x(t) = x_0 + t(x - x_0)$. Setze $V(x) = \int_{\gamma_x} \langle F, dx\rangle$. Wir wollen zeigen, dass dies eine Stammfunktion ist. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $x_0 = 0$. Dann ist für kleines $|h|$, etwa $|h| < \delta$ für ein $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{V(x+he_j) - V(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^1 \langle F(t(x+he_j)), x+he_j\rangle - \langle F(tx), x\rangle dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 F_k(tx+the_j) - F_k(tx)\ dt\ \frac{x_k}{h} + \int_0^1 F_j(tx+the_j)\ dt\ \frac{h}{h}. \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an auf die Funktion $g(s) = F_k(tx + sthe_j)$. Beachte, dass $g'(s) = \dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}(t(x+she_j))th$. Dann ist der letzte Ausdruck

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx+sthe_j)ds\ th\ dt \frac{x_k}{h} + \int_0^1 F_j(t(x+he_j))dt.$$

Die Menge $\{tx + the_j : 0 \leq t \leq 1, |h| \leq \delta\}$ ist kompakt als Bild der kompakten Menge $[0,1] \times [-\delta,\delta]$ unter der stetigen Funktion $(t,h) \mapsto tx + the_j$. Also sind alle Komponenten F_k von F und ihre Ableitungen darauf gleichmäßig stetig, und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_0 > 0$ derart, dass

$$\begin{aligned} |F_k(tx+the_j) - F_k(tx)| &< \varepsilon, \\ \left|\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx+the_j) - \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx)\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq 1, |h| < \delta_0$. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} &= \lim_{h\to 0} \frac{V(x+he_j) - V(x)}{h} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx)ds\ t\ dt\ x_k + \int_0^1 F_j(tx)\, dt \\ &\overset{IntBd}{=} \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx)ds\ t\ dt\ x_k + \int_0^1 F_j(tx)\, dt, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Integrabilitätsbedingung benutzt haben. Nun betrachten wir die Funktion $g(t) = tF_j(tx)$. Es ist $g'(t) = F_j(tx) + t\sum_{k=1}^n \dfrac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx)x_k$. Der gesamte letzte Ausdruck ist also

$$= \int_0^1 g'(t)dt = g(1) - g(0) = 1 \cdot F_j(1x) - 0 \cdot F_j(0x) = F_j(x).$$

◁

13.18. Definition (Homotopie von Kurven). Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Man nennt zwei Kurven γ_0, $\gamma_1 : [a,b] \to U$ homotop, falls es eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [a,b] \to U$$

gibt mit

$$H(0,t) \;=\; \gamma_0(t), \qquad H(1,t) = \gamma_1(t).$$

Für jedes s ist also $H(s,\cdot) : [a,b] \to U$ eine Kurve.

Im folgenden Satz werden wir zusätzlich annehmen, dass die Kurven den gleichen Anfangs- und den gleichen Endpunkt haben; wir verlangen dann auch, dass die Homotopie diese erhält:

$$H(s,0) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \qquad H(s,1) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b), \qquad 0 \le s \le 1.$$

13.19. Satz. *Es sei U offen in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ erfülle die Integrabilitätsbedingung. Sind γ_0 und γ_1 homotope Kurven in U mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten, so gilt*

$$\int_{\gamma_0} \langle F, dx\rangle = \int_{\gamma_1} \langle F, dx\rangle.$$

Vor dem Beweis ein Lemma:

13.20. Lemma. *Es sei $\emptyset \ne A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert man*

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf(\{\|x-a\| : a \in A\}.$$

Dann gilt:

(a) *Die Funktion $x \mapsto$ dist(x,A) ist stetig.*

(b) *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $A = \mathbb{R}^n \setminus U \ne \emptyset$, so ist dist$(x,A) > 0$ für $x \in U$.*
[Wegen der Abgeschlossenheit von A wird das Infimum sogar angenommen und ist ein Minimum.]

(c) *dist$(x,A) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$.*

Beweis. (a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $a \in A$ ist $\|x-a\| \le \|x-y\| + \|y-a\|$, also (durch Übergang zum Infimum auf der rechten Seite) $\operatorname{dist}(x,A) \le \|x-y\| + \operatorname{dist}(y,A)$, bzw. $\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \le \|x-y\|$, somit auch $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \le \|x-y\|$.

(b) Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subseteq U$. Also ist $\operatorname{dist}(x,A) \ge \varepsilon$.

(c) folgt sofort aus (b). $\lhd$

Beweis von 13.19. Es sei $H = H(s,t)$ die Homotopie. Das Bild von $[0,1] \times [a,b]$ unter H ist kompakt, also nimmt die stetige Funktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$ dort ihr Minimum an. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ so, dass

(1) $$B(H(s,t),\varepsilon) \subseteq U \quad \text{für alle } s,t.$$

Die Abbildung H ist auf $[0,1] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $\delta > 0$ derart, dass

(2) $$|H(s,t) - H(s',t')| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } |s-s'| < \delta \text{ und } |t-t'| < \delta.$$

Wir wählen nun Partitionen $0 = s_0 < \ldots < s_N = 1$ von $[0,1]$ und $a = t_0 < \ldots < t_M = b$ von $[a,b]$ der Feinheit $< \delta$ und betrachten für $j = 0,\ldots,N$, die Kurven $\alpha_j(t) = H(s_j,t)$. Es ist $\alpha_0 = \gamma_0$ und $\alpha_N = \gamma_1$. Wir zeigen nun, dass das Integral von F über alle diese Kurven α_j gleich ist, und erhalten daraus die Behauptung. Dazu:

$$\int_{\alpha_j} \langle F, dx\rangle - \int_{\alpha_{j-1}} \langle F, dx\rangle = \sum_{k=1}^{M} \int_{\delta_k} \langle F, dx\rangle,$$

wobei δ_k die geschlossene, stückweise glatte Kurve ist, die dadurch ensteht, dass wir folgendermaßen laufen:

Von $H(s_j, t_{k-1})$ nach $H(s_j, t_k)$ auf α_j;
von $H(s_j, t_k)$ nach $H(s_{j-1}, t_k)$ auf gerader Strecke;
von $H(s_{j-1}, t_k)$ nach $H(s_{j-1}, t_{k-1})$ auf α_{j-1} (rückwärts);
von $H(s_{j-1}, t_{k-1})$ nach $H(s_j, t_{k-1})$ auf gerader Strecke.

Man beachte, dass (i) an dem gemeinsamen Anfangspunkt und an dem gemeinsamen Endpunkt aller Kurven keine Geradenstücke auftreten, da $H(s, 0) = \text{const.}$ und $H(s, 1) = \text{const.}$, und (ii) sich die Geradenstücke dazwischen alle wegheben, da sie in entgegengesetztem Sinn durchlaufen werden.

Jede der Kurven δ_k verläuft in einer Kugel, die ganz in U liegt (etwa in $B(H(s_j, t_k), \varepsilon)$ nach (2)). Dort hat F eine Stammfunktion, daher ist $\int_{\delta_k} \langle F, dx\rangle = 0$. ◁

13.21. Definition. Es sei U ein Gebiet.

(a) Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ in U heißt nullhomotop, falls es ein $c \in U$ und eine Homotopie $H : [0, 1] \times [a, b] \to U$ gibt, so dass $H(0, t) = \gamma(t)$ die Ausgangskurve und $H(1, t) = c$, $a \le t \le b$, konstant, also eine sog. “Punktkurve” ist. Mit anderen Worten γ ist in U auf einen Punkt zusammenziehbar.

(b) Ein Gebiet U heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve in U nullhomotop ist.

13.22. Lemma. *Sternförmige Mengen im $\mathbb{R}^n$ sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei x_0 der Sternpunkt. Definiere die Homotopie H durch

$$H(s, t) = \gamma(t) + s(x_0 - \gamma(t)), \quad 0 \le s, t \le 1.$$

◁

13.23. Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ erfülle die Integrabilitätsbedingung. Dann existiert ein Potential V zu F auf U.*

Beweis. Nach 13.14 ist nur zu zeigen, dass für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve γ gilt $\int_\gamma \langle F, dx\rangle = 0$.

Da U einfach zusammenhängend ist, ist die Kurve γ nullhomotop. Für die (konstante) Punktkurve γ_0 ist offensichtlich $\int_{\gamma_0} \langle F, dx\rangle = 0$. Andererseits ändert sich das Integral nach Satz 13.19 unter Homotopien nicht. Folglich ist auch $\int_\gamma \langle F, dx\rangle = 0$. ◁

13.24. Folgerung. *$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Es gibt dort nämlich ein Vektorfeld F, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt, das aber kein Potential hat, s. Beispiel 13.11.*