11. Der Banachsche Fixpunktsatz

11.1. Der Banachsche Fixpunktsatz. Es sei M eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums, $c < 1$ und $f : M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \le c\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in M. \tag{1}$$

Dann existiert genau ein Punkt $x \in M$ mit $f(x) = x$.

Man nennt eine Abbildung mit (1) für $c < 1$ eine Kontraktion. Ein Punkt x mit $f(x) = x$ heißt Fixpunkt von f.

Beweis. Schritt 1. Die Abbildung f ist stetig wegen (1).

Schritt 2. Es gibt höchstens einen Fixpunkt: Ist y ein weiterer, so ist

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \le c\|x - y\|,$$

also $\|x - y\| = 0$ bzw. $x = y$.

Schritt 3. Es gibt einen Fixpunkt: Wähle x_0 in M beliebig. Definiere nun $x_1, x_2, , \ldots$ durch $x_k = f(x_{k-1})$, d.h. $x_k = f \circ \ldots \circ f(x_0)$ (k-mal). Dann gilt:

$$\|x_2 - x_1\| = \|f(x_1) - f(x_0)\| \le c\|x_1 - x_0\|.$$

Mit vollständiger Induktion folgt für $n \ge 1$:

$$\|x_k - x_{k-1}\| \le c^{k-1}\|x_1 - x_0\|.$$

Wir schließen daraus, dass (x_k) eine Cauchy-Folge ist: Für $k < m$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_k\| &= \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\| \\
&\le (c^{m-1} + c^{m-2} + \ldots + c^k)\ \|x_1 - x_0\| \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{m-1} c^j - \sum_{j=0}^{k-1} c^j\Big)\|x_1 - x_0\| = \Big(\frac{1 - c^m}{1 - c} - \frac{1 - c^k}{1 - c}\Big)\|x_1 - x_0\| \\
&= \frac{c^k - c^m}{1 - c}\ \|x_1 - x_0\| \le \frac{c^k}{1 - c}\ \|x_1 - x_0\| \to 0 \text{ as } k \to \infty. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Nach Definition ist der Banachraum vollständig, also hat die Folge einen Grenzwert x. Wegen der Abgeschlossenheit liegt x in M. Nun folgt aus der Stetigkeit von f und der Tatsache, dass $\lim x_{k-1} = \lim x_k$:

$$x = \lim x_k = \lim f(x_{k-1}) = f(\lim x_{k-1}) = f(x).$$

Also ist x ein Fixpunkt. $\lhd$

11.2. Bemerkungen.

(a) Hat viele Anwendungen, da sich viele Probleme auf Fixpunktprobleme reduzieren lassen.

(b) Interessant ist, dass die obige Folge $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \ldots$ der Iterierten von f für jeden Startwert x_0 gegen x konvergiert und man nach (2) sogar die *a priori*-Abschätzung (a priori= von Vornherein)

$$\|x - x_k\| = \|\lim x_m - x_k\| = \lim \|x_m - x_k\| \le \frac{c^k}{1 - c}\|x_1 - x_0\|$$

hat.

(c) Wichtig ist, dass $c < 1$ ist. Es langt nicht, dass $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ wie die Funktion $f : [1, \infty[\to [1, \infty[; f(x) = x + \frac{1}{x}$ zeigt. Sie hat keinen Fixpunkt. Hier gilt $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle x, y nach dem Mittelwertsatz, weil $f'(t) = 1 - 1/t^2 < 1$ für alle t.